

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»
Факультет математики и информационных технологий

На правах рукописи

КОЛОДИЙ Наталья Александровна
СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
НА ПЛОСКОСТИ

01.01.05 — Теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Волгоград 2009

Работа выполнена в Волгоградском государственном университете на кафедре фундаментальной информатики и оптимального управления факультета математики и информационных технологий.

Научные руководители: академик РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Прохоров Юрий Васильевич;
доктор физико-математических наук,
профессор Линьков Юрий Николаевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник МИАН
Гущин Александр Александрович;
доктор физико-математических наук,
профессор Павлов Игорь Викторович.

Ведущая организация: Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко,
механико-математический факультет.

Защита диссертации состоится 6 марта 2009 года в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, 2-й корпус МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. Текст автореферата в электронном виде размещен на официальном сайте ВМиК МГУ <http://www.cmc.msu.ru/> в разделе "Наука" — "Работа диссертационных советов" — "Д 501.001.44".

Автореферат разослан января 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор

Н. П. Трифонов

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости начала формироваться сравнительно недавно. Она тесно связана с теорией многопараметрических мартингалов и теорией стохастических уравнений Вольтерра на действительной прямой.

Теория стохастических интегральных уравнений Вольтерра на $\mathbb{R}_+$ активно развивается последние 30 лет. Например, в работе М. Л. Клепцовой и А. Ю. Веретенникова¹ получены условия существования и единственности сильного решения и условия существования слабого решения уравнения Вольтерра по винеровскому процессу с неслучайными коэффициентами. В работе Э. Парду и Ф. Проттера² получены условия существования и единственности решения уравнения Вольтерра с упреждающими коэффициентами. В работах А. М. Колодий^{3 4} были получены условия существования и единственности сильных решений и условия существования слабых решений уравнений Вольтерра, содержащих стохастические интегралы по компонентам семимартингалов и криволинейные стохастические интегралы.

Теория многопараметрических мартингалов формируется с 70-х годов прошлого века. В работах Ж. Уолша⁵, И. И. Гихмана⁶ и М. Доззи⁷ даны определения и приведены результаты исследования двупараметрической винеровской меры, линии и множества остановки на плоскости, различных типов многопараметрических мартингалов и стохастических интегралов. В работе А. А. Гущина⁸ исследованы различные типы разложений двупараметрических субмартингалов, доказаны теоремы о разложении сильных субмартингалов и о разложении квадрата сильного мартингала на мартингал и слабо предсказуемое поле. В работе А. А. Гущина и Ю. С. Мишуры⁹ доказано существование квадратической вариации двупараметрического сильного мартингала.

¹А. Ю. Веретенников, М. Л. Клепцова, «О сильных решениях стохастических уравнений Ито-Вольтерра». — *Теория вероятностей и ее применение*, **12** (1984), 32–40.

²E. Pardoux, P. Protter, «Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients». — *The Annals of Probability*, **18** (1990), 1635–1655.

³А. М. Kolodii, «On conditions for existence of strong and weak solutions of stochastic Volterra equations». — *Theory of Stochastic Processes*, **2(18)** (1996), 67–78.

⁴А. М. Kolodii, «On conditions for existence of solutions of integral equations with stochastic line integrals». — *Probability Theory and Math. Statist.* (1994), 405–422.

⁵J. B. Walsh, «Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane». — *Lecture Notes Math.* **1215** (1986), 329–491.

⁶И. И. Гихман, Т. Е. Пясецкая, «Два типа стохастических интегралов по мартингальным мерам на плоскости». — *Доклады АН УССР. Серия А*, **11** (1975), 963–965.

⁷M. Dozzi, «Twoparameter stochastic processes». — *Math. Research*, **61** (1991), 17–43.

⁸А. А. Гущин, «К общей теории случайных полей на плоскости». — *Успехи мат. наук.* **37**, вып. 6 (1982), 53–74.

⁹А. А. Гущин, Ю. С. Мишура, «Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов». — *Теория вероятностей и мат. статистика*, №42 (1990), 27–35.

Диссертация посвящена исследованию стохастических интегральных уравнений Вольтерра

$$\xi(z) = \eta(z) + \int_{[0,z]} a(z, x, \xi) \gamma(z, dx) + \int_{[0,z]} b(z, x, \xi) \mu(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2,$$

содержащих интегралы по таким случайным интегрирующим ядрам $(\gamma(z, x); z, x \in \mathbb{R}_+^2)$ и $(\mu(z, x); z, x \in \mathbb{R}_+^2)$, что для любого фиксированного $z \in \mathbb{R}_+^2$ поле $\gamma(z, \cdot)$ является полем локально ограниченной вариации, а поле $\mu(z, \cdot)$ является сильным квадратично интегрируемым мартингалом.

Развитие теории стохастических уравнений Вольтерра на плоскости является актуальным, что подтверждается вниманием к этой теме исследователей, развивающих стохастический анализ, и возможностью применения теории многопараметрических мартингалов и уравнений Вольтерра к построению и исследованию математических моделей в некоторых областях приложений стохастических интегральных уравнений.

Цель работы

Главными целями диссертации являются:

- 1) доказательство измеримости по параметру квадратической вариации сильного двухпараметрического мартингала и стохастического интеграла по сильному двухпараметрическому мартингалу;
- 2) построение и исследование стохастических интегралов, управляемых двухпараметрическими сильными мартингальными ядрами;
- 3) доказательство неравенств для моментов равномерных норм и модулей непрерывности стохастических интегралов и полей, управляемых мартингальными ядрами;
- 4) поиск условий и доказательство существования, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений стохастических уравнений Вольтерра с локально интегрируемыми траекториями;
- 5) поиск условий и доказательство существования и единственности непрерывного решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости, управляемого стандартным двухпараметрическим винеровским процессом.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- 1) доказана измеримость по параметру квадратической вариации сильного двухпараметрического мартингала и стохастического интеграла по сильному двухпараметрическому мартингалу;
- 2) даны определения нескольких типов стохастических интегралов по сильным мартингальным ядрам и исследованы их свойства;

3) получены неравенства для моментов равномерных норм и модулей непрерывности случайных полей, определяемых стохастическими интегралами по сильным мартингальным ядрам;

4) доказаны теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости с локально интегрируемыми траекториями и с траекториями в пространстве $\mathbb{D}^\ell$; доказана теорема о непрерывной зависимости от параметра решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости с локально интегрируемыми траекториями;

5) доказаны теоремы существования и единственности непрерывного решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости, управляемого стандартным двупараметрическим винеровским процессом.

Методы исследования

Методы доказательств утверждений, представленных в данной работе, опираются на применение общих методов стохастического анализа; аппарата теории многопараметрических мартингалов и, в частности, результатов А. А. Гущина и Ю. С. Мишуры¹⁰ о существовании и свойствах квадратической вариации сильного мартингала; неулучшаемых достаточных условий И. А. Ибрагимова¹¹ существования непрерывных модификаций случайных процессов; общих идей построения измеримых по параметру модификаций однопараметрических семимартингалов и стохастических интегралов, содержащихся в работах К. Долеан¹² и К. Стрикера и М. Йора¹³; общих методов доказательств существования и единственности решений однопараметрических стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегральных уравнений Вольтерра, содержащихся во многих работах, например, С. Ватанабэ и Н. Икэда¹⁴, И. И. Гихмана и А. В. Скорохода¹⁵, М. Л. Клепцовой и А. Ю. Веретенникова¹⁶, А. М. Колодий¹⁷.

Для исследования стохастических уравнений Вольтерра на плоскости в диссертации применяются неравенства для моментов равномерных норм и мо-

¹⁰А. А. Гушин, Ю. С. Мишура, «Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов». — *Теория вероятностей и мат. статистика*, №42 (1990), 27–35.

¹¹И. А. Ибрагимов, «Об условиях гладкости траекторий случайных функций». — *Теория вероятностей и ее применение*, 28, вып. 2 (1983), 229–250.

¹²C. Doleans, «Integrales stochastiques dependant d'un parametre». — *Publ. Inst. statist. Univ. Paris*, 16 (1967), 23–33.

¹³C. Stricker, M. Yor, «Calcul stochastique d'ependant d'un parametre». — *Ztchr. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete*, 45 (1978), 109–133.

¹⁴С. Ватанабэ, Н. Икэда, «Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы». — М.: Наука, 1986.

¹⁵И. И. Гихман, А. В. Скороход, «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения». — Наукова думка, Киев, 1982.

¹⁶А. Ю. Веретенников, М. Л. Клепцина, «О сильных решениях стохастических уравнений Ито-Вольтерра». — *Теория вероятностей и ее применение*, 12 (1984), 32–40.

¹⁷А. М. Kolodii, «On conditions for existence of strong and weak solutions of stochastic Volterra equations». — *Theory of Stochastic Processes*, 2(18) (1996), 67–78.

дулей непрерывности случайных полей, определяемых несколькими типами стохастических интегралов по сильным мартингалным ядрам. Эти неравенства получены автором и опубликованы в работе [9]. Их доказательства приведены в §2.2 главы 2. Перевод работы [9] опубликован на английском языке в *Journal of Mathematical Sciences*¹⁸.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы их получения могут быть применены для дальнейшего развития теории стохастических интегро-дифференциальных уравнений, например, для поиска условий и доказательства существования слабых решений и сходимости дискретных аппроксимаций стохастических интегральных уравнений на плоскости. Практическая значимость диссертации заключается в возможности применения ее результатов для построения и исследования математических моделей в некоторых областях естествознания, например, в стохастической биометрике.

Апробация работы

Автор выступала с докладами на следующих конференциях, где излагались результаты, относящиеся к диссертации:

- 1) XXIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (апрель 2001, Москва, МГУ) [3];
- 2) Международная конференция: Колмогоров и современная математика (июнь 2003, Москва, МГУ) [17];
- 3) International Conference Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics II (октябрь 2004, Киев, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко) [20];
- 4) XI Всероссийская Школа-Коллоквиум по Стохастическим Методам (октябрь 2004, Сочи) [7];
- 5) Всероссийская Школа-Коллоквиум по Стохастическим Методам (октябрь 2005, Сочи) [10];
- 6) International Conference Modern Stochastic: Theory and Application (июнь 2006, Киев, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко) [22];
- 7) Всероссийская Школа-Коллоквиум по Стохастическим Методам (октябрь 2008, Волгоград) [12].

Публикации

По теме диссертации опубликована 21 работа, список которых приведен в конце автореферата [1] — [21].

¹⁸N. A. Kolodii, «Some properties of random fields related to stochastic integrals with respect to strong martingales». — *Journal of Mathematical Sciences*, **137**, №1 (2006), 4531–4540.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, насчитывающего 49 наименований и организованного в алфавитном порядке, и указателя символов. Все результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно, за исключением формулировок нескольких утверждений, цитируемых с приведением источников. Нумерация лемм, теорем и формул начинается в каждой главе заново и состоит из двух чисел. Первое число относится к номеру главы, второе — к номеру утверждения (леммы, теоремы или формулы). Общий объем работы составляет 101 страницу.

2. Краткое содержание диссертации

В следующем описании используется нумерация лемм и теорем из текста диссертации.

Глава 1. Измеримость по параметру квадратических вариаций сильных мартингалов и стохастических интегралов

§ 1.1. Элементы теории двупараметрических сильных мартингалов

Данный параграф содержит определения используемых в дальнейшем объектов и вспомогательные результаты, среди которых — лемма 1.2 и теорема 1.1 о свойствах сильных квадратично интегрируемых мартингалов и их взаимных квадратических вариаций.

Пусть $R_+^2 = [0, \infty[\times [0, \infty[$ — первый квадрант плоскости. Для обозначения элементов R_+^2 будем использовать буквы x, y, z, u, v , причем, если в одном и том же выражении присутствует буква z и присутствует z_1 и (или) z_2 , то всегда полагаем, что z_1 — первая координата, а z_2 — вторая координата вектора z (аналогично для x, y, u, v). Неравенства $x \leq y$, $x < y$, $x \geq y$, $x > y$ и структурные операции $x \vee y$, $x \wedge y$ определены поэлементно. Например, $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$, неравенство $x < y$ эквивалентно системе неравенств $x_1 < y_1$ и $x_2 < y_2$. Соотношение $x \leq z$ (аналогично, соотношение $x \geq z$) означает, что $x_1 < z_1$ и $x_2 \geq z_2$ (соответственно, $x_1 \geq z_1$ и $x_2 < z_2$). Далее, $]x, y]$ обозначает прямоугольник $]x, y] = \{u : x < u \leq y\}$ (пустой, если не выполнено условие $x < y$), $[x, y] = \{u : x \leq u \leq y\}$.

Пусть $\mathbb{D}^\ell$ обозначает пространство всех таких функций $g(\cdot) : R_+^2 \mapsto R^\ell$, что:

1) g непрерывна справа, т.е. $\lim_{z \leq x \rightarrow z} g(x) = g(z)$ для каждого $z \in R_+^2$;

2) для каждого $z \in R_+^2 \setminus (R_+ \times \{0\})$ существует предел $\lim_{x \geq z, x \rightarrow z} g(x)$;

3) для каждого $z \in R_+^2 \setminus (\{0\} \times R_+)$ существует предел $\lim_{x \leq z, x \rightarrow z} g(x)$;

4) для каждого $z > 0$ существует предел $\lim_{z > x \rightarrow z} g(x)$.

Для $g \in \mathbb{D}^\ell$ определим: $\|g\|_z = \sup_{x \in [0, z]} |g(x)|$, $z \in \mathbb{R}_+^2$. Введем обозначения:

$$\mathbb{R}_0^2 = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : z_1 = 0 \text{ или } z_2 = 0\}, \quad \mathbb{D}_0^\ell = \{g \in \mathbb{D}^\ell : g(z) = 0 \text{ для } z \in \mathbb{R}_0^2\}.$$

Если X — метрическое пространство, то $\mathcal{B}(X)$ обозначает σ -алгебру борелевских подмножеств пространства X ; $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}([0, z])$.

Функцию $g(\cdot) : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}^\ell$ будем называть непрерывной слева, если $\lim_{z \geq x \rightarrow z} g(x) = g(z)$ для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$.

Приращение функции $g(\cdot) : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ на непустом прямоугольнике $]x, y]$ определяем равенством: $g(]x, y]) = g(y) - g(x_1, y_2) - g(y_1, x_2) + g(x)$. Если $]x, y] = \emptyset$, то $g(]x, y])$ полагаем равным нулю.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство. Двупараметрическое семейство σ -алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2)$ подмножеств пространства Ω будем называть фильтрацией на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, удовлетворяющей «обычным» условиям, если:

- 1) $\mathcal{F}_y \subset \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$ для любых $y \leq z$;
- 2) $\mathcal{F}_z$ содержит все элементы $\mathcal{F}$ нулевой вероятности;
- 3) $\mathcal{F}_z = \bigcap_{z < y} \mathcal{F}_y$ для любого z ;

4) выполнено условие Каироли-Уолша: для любых y и z σ -алгебры $\mathcal{F}_y$ и $\mathcal{F}_z$ условно независимы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{y \wedge z}$.

Определим: $\mathcal{F}_z^* = (\bigvee_{s \geq 0} \mathcal{F}_{(z_1, s)}) \vee (\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_{(t, z_2)})$ для $z \in \mathbb{R}_+^2$. Класс множеств

$\mathcal{T} = \left\{ A \mid A \subset \mathbb{R}_+^2 \times \Omega, ([0, z] \times \Omega) \cap A \in \mathcal{B}_z \otimes \mathcal{F}_z \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2 \right\}$ называется σ -алгеброй $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$. σ -алгеброй $\mathbb{F}$ -предсказуемых подмножеств пространства $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ называют минимальную σ -алгебру $\mathcal{P}$, относительно которой измеримы все непрерывные слева $\mathbb{F}$ -согласованные поля с действительными значениями.

Далее, $\mathcal{M}_{S, \ell}^2$ обозначает пространство всех квадратично интегрируемых сильных $\mathbb{F}$ -мартингалов:

$$\mathcal{M}_{S, \ell}^2 = \left\{ \mu \mid \mu \in \mathbb{F} \cap \mathbb{D}_0^\ell, E|\mu(z)|^2 < \infty, E\{\mu(]z, z']) \mid \mathcal{F}_z^*\} = 0 \quad \forall z \leq z' \right\}.$$

Всегда в дальнейшем $\mathcal{D}$ обозначает класс всех разбиений $\mathbb{R}_+^2$ семействами прямоугольников

$$\delta = \left\{ \delta_{i,j} =]u_{i,j}, u_{i+1,j+1}] \mid \begin{array}{l} u_{i,j} = (u'_i, u''_j), i, j \in \{0, 1, \dots\}; u_{0,0} = (0, 0), \\ u_{i,j} < u_{i+1,j+1}, \lim_{i \rightarrow \infty} u'_i = +\infty, \lim_{j \rightarrow \infty} u''_j = +\infty \end{array} \right\}.$$

Пусть $|\delta| = \sup_{i,j} |u_{i,j} - u_{i+1,j+1}|$, $\delta_{i,j}^{u,v} = \delta_{i,j} \cap]u, v]$.

Для произвольных случайных полей $\mu \in \mathcal{M}_{S, \ell}^2$ и $\nu \in \mathcal{M}_{S, d}^2$ определим

$$\langle \mu, \nu \rangle_z^\delta = \sum_{i,j} \mu(\delta_{i,j}^{0,z}) \nu^\top(\delta_{i,j}^{0,z}).$$

Из результатов работы А. А. Гущина и Ю. С. Мишуры¹⁹ следует, что существует такое случайное поле $(\langle \mu, \nu \rangle_z, z \in \mathbb{R}_+^2)$ со значениями в $\mathbb{R}^{\ell \times d}$, что элементы матрицы $\langle \mu, \nu \rangle$ принадлежат $\mathbb{F} \cap \mathbb{D}_0^1$ и $\langle \mu, \nu \rangle_z = \mathbf{P}\text{-}\lim_{|\delta| \rightarrow 0} \langle \mu, \nu \rangle_z^\delta$ для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$.

Поле $\langle \mu, \nu \rangle$ называют совместной (или взаимной) квадратической вариацией сильных квадратично интегрируемых мартингалов μ и ν , $\langle \mu \rangle = \langle \mu, \mu \rangle$ называют квадратической вариацией сильного квадратично интегрируемого мартингала μ . В дальнейшем будем также использовать обозначение: $\bar{\mu} = \text{tr} \langle \mu \rangle$.

Если $\mu \in \mathcal{M}_{S,\ell}^2$, $p > 1$, $\mathbf{E} \bar{\mu}_z^{p/2} < \infty$, то $\mathbf{E} \|\mu\|_z^p \leq C_{p,\ell} \mathbf{E} \bar{\mu}_z^{p/2}$.

§ 1.2 и § 1.3 посвящены проблемам существования измеримых по параметру модификаций взаимных квадратических вариаций сильных квадратично интегрируемых мартингалов и стохастических интегралов по двумпараметрическим сильным мартингалам. Измеримость по параметру однопараметрических случайных процессов исследовалась многими авторами. Например, в работах К. Долеана²⁰ и К. Стрикера и М. Йора²¹ содержится ряд результатов о существовании измеримых по параметру модификаций случайных процессов, квадратических вариаций семимартингалов и управляемых ими стохастических интегралов. В двумпараметрическом случае решение вопроса об измеримости по параметру имеет свои существенные особенности, не позволяющие воспользоваться известными результатами для однопараметрического случая.

§ 1.2. Измеримость по параметру взаимных квадратических вариаций сильных мартингалов

Пусть $(\Theta, \mathcal{U})$ — произвольное измеримое пространство.

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\mathcal{C}$ — такая σ -алгебра подмножеств пространства $\Theta \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{U} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{F}$ и $U \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \in \mathcal{C}$ для каждого $U \in \mathcal{U}$;

2) $(\xi_n(\theta, z, \omega))_{n \in \mathbb{N}}$ — такая последовательность $\mathcal{C}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримых функций, что $\xi_n(\theta, \cdot, \omega) \in \mathbb{D}^1$ для любых $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{r,j \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\|\xi_r(\theta, \cdot) - \xi_j(\theta, \cdot)\|_z > \varepsilon\} = 0 \text{ для любых } \varepsilon > 0, \theta \in \Theta, z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Тогда существует такая $\mathcal{C}|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -измеримая функция $\xi(\theta, z, \omega)$, что

¹⁹А. А. Гущин, Ю. С. Мишура, «Неравенства Девиса и разложение Ганди для двумпараметрических сильных мартингалов». — *Теория вероятностей и мат. статистика*, №42 (1990), 27–35.

²⁰C. Doleans, «Integrales stochastiques dependant d'un parametre». — *Publ. Inst. statist. Univ. Paris*, 16 (1967), 23–33.

²¹C. Stricker, M. Yor, «Calcul stochastique d'ependant d'un parametre». — *Ztchr. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete*, 45 (1978), 109–133.

для каждого $\theta \in \Theta$ траектории случайного поля $\xi(\theta, \cdot)$ п.н. принадлежат $\mathbb{D}^1$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\|\xi_r(\theta, \cdot) - \xi(\theta, \cdot)\|_z > \varepsilon\} = 0$ для любых $\varepsilon > 0, \theta \in \Theta, z \in \mathbb{R}_+^2$.

Определим σ -алгебру

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ C \mid C \subset \Theta \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega, C \cap (\Theta \times [0, z] \times \Omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{B}_z \otimes \mathcal{F}_z \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2 \right\}.$$

Теорема 1.3. Предположим, что $\mu(\theta, x, \omega), \nu(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{F}}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ и $\mu(\theta, \cdot), \nu(\theta, \cdot) \in \mathcal{M}_{S,1}^2$ для каждого $\theta \in \Theta$. Тогда существует $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ -измеримая функция $(\theta, x, \omega) \mapsto \langle \mu(\theta), \nu(\theta) \rangle(x, \omega)$ такая, что для каждого фиксированного $\theta \in \Theta$ траектории случайного поля $\langle \mu(\theta), \nu(\theta) \rangle(\cdot)$ п.н. принадлежат $\mathbb{D}_0^1$ и $\langle \mu(\theta), \nu(\theta) \rangle(\cdot)$ является взаимной квадратической вариацией квадратично интегрируемых сильных мартингалов $\mu(\theta, \cdot)$ и $\nu(\theta, \cdot)$.

§ 1.3. Измеримость по параметру стохастических интегралов по сильным мартингалам

В § 1.3 основными результатами являются: теорема 1.5, содержащая доказательство плотности пространства измеримых по параметру ступенчатых случайных полей в пространстве измеримо зависящих от параметра предсказуемых случайных полей, и теорема 1.6 об измеримости по параметру стохастического интеграла, управляемого двупараметрическим сильным мартингалом.

Пусть $\mathbb{B}_0$ обозначает пространство всех случайных полей вида

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}(\gamma, \delta; \theta, z, \omega) &= \gamma(\theta, (0, 0), \omega) \mathbf{I}_{\{(0,0)\}}^{(z)} + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(\theta, (u'_i(\theta), 0), \omega) \mathbf{I}_{[u'_i(\theta), u'_{i+1}(\theta)] \times \{0\}}^{(z)} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(\theta, (0, u''_j(\theta)), \omega) \mathbf{I}_{\{0\} \times [u''_j(\theta), u''_{j+1}(\theta)]}^{(z)} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \gamma(\theta, u_{i,j}(\theta), \omega) \mathbf{I}_{[u_{i,j}(\theta), u_{i+1,j+1}(\theta)]}^{(z)}, \end{aligned}$$

где $(\theta, (z, \omega)) \mapsto \gamma(\theta, z, \omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{P}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ и $\delta(\theta)$ — $\mathcal{U}$ -измеримое разбиение $\mathbb{R}_+^2$, т.е. такое семейство прямоугольников

$$\delta(\theta) = \left\{ \delta_{i,j}(\theta) =]u_{i,j}(\theta), u_{i+1,j+1}(\theta)], i, j \in \{0, 1, \dots\} \right\},$$

что $u_{0,0} = (0, 0)$, $u_{i,j}(\theta) < u_{i+1,j+1}(\theta)$, $u_{i,j}(\theta) = (u'_i(\theta), u''_j(\theta))$, $\lim_{i \rightarrow \infty} u'_i(\theta) = +\infty$, $\lim_{j \rightarrow \infty} u''_j(\theta) = +\infty$, $u_{i,j}(\cdot) \in \mathcal{U}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)}$.

Если $\mu \in \mathcal{M}_{S,1}^2(\mathbb{F}, \mathbf{P})$, то $\mathbb{B}_2(\mu)$ обозначает класс всех таких случайных полей $(z, \omega) \mapsto \beta(z, \omega) \in \mathcal{P}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, что $\|\beta\|_z \triangleq \left(\mathbf{E} \int_0^z \beta^2(x) \bar{\mu}(dx) \right)^{1/2} < \infty$ для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$. Для $\beta', \beta'' \in \mathbb{B}_2(\mu)$ пусть $\varrho_\mu(\beta', \beta'') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left[1 \wedge \|\beta' - \beta''\|_{(k,k)} \right]$.

Теорема 1.5. Предположим, что $(\theta, (x, \omega)) \mapsto \beta(\theta, x, \omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbf{R})$; $(\theta, x, \omega) \mapsto \mu(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}} | \mathcal{B}(\mathbf{R})$; $\mu(\theta, \cdot) \in \mathcal{M}_{S,1}^2$ и $\beta(\theta, \cdot) \in \mathbb{B}_2(\mu(\theta, \cdot))$ для каждого $\theta \in \Theta$.

Тогда существует такая последовательность случайных полей $(\widehat{\beta}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\mu(\theta, \cdot)}(\widehat{\beta}_n(\theta, \cdot), \beta(\theta, \cdot)) = 0$ для каждого $\theta \in \Theta$.

Теорема 1.6. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &(\theta, (x, \omega)) \mapsto \beta(\theta, x, \omega) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbf{R}), \\ &(\theta, x, \omega) \mapsto \mu(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}} | \mathcal{B}(\mathbf{R}), \\ &\mu(\theta, \cdot) \in \mathcal{M}_{S,1}^2 \quad \text{для каждого } \theta \in \Theta, \\ &\mathbb{E} \int_{]0,x]} \beta^2(\theta, u) \bar{\mu}(\theta, du) < \infty \quad \text{для любых } \theta \in \Theta, x \in \mathbf{R}_+^2. \end{aligned}$$

Тогда существует такая функция $J(\theta, x, \omega) : \Theta \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega \mapsto \mathbf{R}$, что:

- 1) $(\theta, x, \omega) \mapsto J(\theta, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}} | \mathcal{B}(\mathbf{R})$;
- 2) $J(\theta, x)$ является модификацией стохастического интеграла на прямоугольнике $]0, x]$ от предсказуемого поля $\beta(\theta, \cdot)$ по квадратично интегрируемому сильному мартингалу $\mu(\theta, \cdot)$:

$$J(\theta, x) = \int_{]0,x]} \beta(\theta, u) \mu(\theta, du) \quad \text{п.н. для любых } x \in \mathbf{R}_+^2, \theta \in \Theta;$$

- 3) для каждого фиксированного $\theta \in \Theta$ случайное поле $J(\theta, \cdot)$ является элементом пространства $\mathcal{M}_{S,1}^2$, квадратическая вариация $J(\theta, \cdot)$ на прямоугольнике $]0, x]$ равна $\int_{]0,x]} \beta^2(\theta, u) \bar{\mu}(\theta, du)$;

- 4) если для каждого $\theta \in \Theta$ траектории $\mu(\theta, \cdot)$ п.н. непрерывны, то $J(\theta, \cdot)$ также п.н. непрерывен.

Глава 2. Стохастические интегралы по сильным мартингальным ядрам

Пусть

$$\widetilde{\mathcal{T}}_k = \left\{ C \mid C \subset \mathbf{R}_+^k \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega, C \cap (\mathbf{R}_+^k \times [0, z] \times \Omega) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^k) \otimes \mathcal{B}_z \otimes \mathcal{F}_z \quad \forall z \in \mathbf{R}_+^2 \right\}.$$

Главной целью этой главы работы является исследование случайного поля

$$\eta(z) = \int_{]0,z]} \beta(z, x) \mu(z, dx), \quad z \in \mathbf{R}_+^2, \quad (2.1)$$

где $(z, x, \omega) \mapsto \mu(z, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_2 | \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, $\mu(z, \cdot) \in \mathcal{M}_{S,d}^2$ для каждого $z \in \mathbf{R}_+^2$, $(z, (x, \omega)) \mapsto \beta(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\ell \times d})$, $\mathbb{E} \int_{]0,z]} |\beta(z, u)|^2 \bar{\mu}(z, du) < \infty$ для

каждого $z \in \mathbf{R}_+^2$, $\bar{\mu}(z, u) = \text{tr} \langle \mu(z, \cdot) \rangle_u$.

Отметим, что согласно теореме 1.6 стохастический интеграл (2.1) имеет $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримую модификацию. Так как в интеграле (2.1) подынтегральная функция и мартингальное ядро зависят от пределов интегрирования, то, в общем случае, поле η не обладает мартингальными свойствами. В дальнейшем, с целью поиска условий существования модификации поля η с траекториями в $\mathbb{D}^\ell$ и доказательства неравенств для моментов равномерной нормы η , рассматривается представление η в виде суммы случайных полей

$$\vartheta(z) = \int_{[0,z]} \beta(x, x) \mu(x, dx), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \xi(z) = & \int_{[0,z]} \beta(z, x) \mu(z, dx) + \int_{[0,z]} \beta(x, x) \mu(x, dx) - \\ & - \int_{[0,z]} \beta((z_1, x_2), x) \mu((z_1, x_2), dx) - \int_{[0,z]} \beta((x_1, z_2), x) \mu((x_1, z_2), dx), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\zeta_1(z) = \int_{[0,z]} \beta((z_1, x_2), x) \mu((z_1, x_2), dx) - \int_{[0,z]} \beta(x, x) \mu(x, dx), \quad (2.4)$$

$$\zeta_2(z) = \int_{[0,z]} \beta((x_1, z_2), x) \mu((x_1, z_2), dx) - \int_{[0,z]} \beta(x, x) \mu(x, dx). \quad (2.5)$$

Очевидно, что необходимо пояснить смысл стохастических интегралов в правых частях равенств, определяющих поля (2.2) — (2.5). Этому посвящен параграф 2.1 диссертации.

§2.1. Интегрирование по сильным мартингальным ядрам

Пусть $(z, x, \omega) \mapsto \mu(z, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_2 | \mathcal{B}(\mathbb{R})$; $\mu(z, \cdot) \in \mathcal{M}_{S,1}^2$ для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$; $\mu'(z, y, x) = \mu(z, x) - \mu(y, x)$.

Согласно теореме 1.3 существуют такие функции

$$(z, x, \omega) \mapsto \bar{\mu}(z, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_2 | \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad (z, y, x, \omega) \mapsto \hat{\mu}(z, y, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_4 | \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

что $\bar{\mu}(z, x)$ и $\hat{\mu}(z, y, x)$ — квадратичные вариации $\mu(z, \cdot)$ и $\mu'(z, y, \cdot)$ на $[0, x]$ для любых фиксированных $z, y \in \mathbb{R}_+^2$.

В данном разделе определяются стохастические интегралы вида

$$\begin{aligned} & \int_{[0,y]} \alpha(x) \mu(x, dx), \quad \int_{[0,y]} \alpha(x) \mu((x_1, t), dx), \quad \int_{[0,y]} \alpha(x) \mu'((x_1, t), x, dx), \\ & \int_{[0,y]} \alpha(x) \mu'(z, (x_1, z_2), dx), \quad \int_{[0,y]} \alpha(x) \mu'((x_1, t), (x_1, s), dx) \end{aligned}$$

от предсказуемых случайных полей $(\alpha(x), x \in \mathbb{R}_+^2)$. Стохастические интегралы в правых частях равенств, определяющих поля (2.2) — (2.5), и стохастиче-

ские интегралы в доказательстве теоремы 2.4 сводятся к этим типам интегралов. Рассмотрим условие:

(М) существует такая возрастающая функция $(\varrho(t))_{t \geq 0}$ и такая функция $\Lambda(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, что: $\lim_{t \rightarrow 0} \varrho(t) = 0$;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Lambda(y,]u, v]) \leq \Lambda(z,]u, v]) \quad \text{для любых } u < v, y \leq z; \\ E\Lambda(z,]0, z]) &< \infty \quad \text{для любого } z \in \mathbb{R}_+^2; \\ \bar{\mu}(z,]u, v]) &\leq \Lambda(z,]u, v]); \\ \hat{\mu}(z, y,]u, v]) &\leq \Lambda(z \vee y,]u, v])\varrho(|z - y|) \quad \text{для любых } u < v. \end{aligned}$$

Для функций $h(z, y, x) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(z, x) : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ и разбиения $\delta \in \mathcal{D}$ определим

$$\begin{aligned} S_1^\delta(g,]v, x]) &= \sum_{i,j} g(u(i, j), \delta_{i,j}^{v,x}), \\ S_2^\delta(g, t,]v, x]) &= \sum_{i,j} g((u'_i, t), \delta_{i,j}^{v,x}), \\ S_3^\delta(h, t,]v, x]) &= \sum_{i,j} h((u'_i, t), u(i, j), \delta_{i,j}^{v,x}), \\ S_4^\delta(h, z,]v, x]) &= \sum_{i,j} h(z, (u'_i, z_2), \delta_{i,j}^{v,x}), \\ S_5^\delta(h, t, s,]v, x]) &= \sum_{i,j} h((u'_i, t), (u'_i, s), \delta_{i,j}^{v,x}). \end{aligned}$$

Теорема 2.1. Если условие **(М)** выполнено, то существуют такие функции $A_1^{\bar{\mu}}(B, \omega)$, $A_2^{\bar{\mu}}(t, B, \omega)$, $A_3^{\hat{\mu}}(t, B, \omega)$, $A_4^{\hat{\mu}}(z, B, \omega)$ и $A_5^{\hat{\mu}}(t, s, B, \omega)$ аргументов $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$, что:

1) функции множеств $A_1^{\bar{\mu}}(\cdot, \omega)$, $A_2^{\bar{\mu}}(t, \cdot, \omega)$, $A_3^{\hat{\mu}}(t, \cdot, \omega)$, $A_4^{\hat{\mu}}(z, \cdot, \omega)$ и $A_5^{\hat{\mu}}(t, s, \cdot, \omega)$ являются σ -конечными мерами для любых фиксированных $t, s \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}_+^2$, $\omega \in \Omega$;

2) с вероятностью 1 для любых $t, s \in \mathbb{R}_+$, $z, v, x \in \mathbb{R}_+^2$

$$\begin{aligned} A_1^{\bar{\mu}}(]v, x]) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_1^\delta(\bar{\mu},]v, x]), & A_2^{\bar{\mu}}(t,]v, x]) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_2^\delta(\bar{\mu}, t,]v, x]), \\ A_3^{\hat{\mu}}(t,]v, x]) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_3^\delta(\hat{\mu}, t,]v, x]), & A_4^{\hat{\mu}}(z,]v, x]) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_4^\delta(\hat{\mu}, z,]v, x]), \\ A_5^{\hat{\mu}}(t, s,]v, x]) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_5^\delta(\hat{\mu}, t, s,]v, x]), \end{aligned}$$

3) случайное поле $(x, \omega) \mapsto A_1^{\bar{\mu}}(]0, x], \omega)$ является $\mathcal{T}$ -измеримым; поля $(t, x, \omega) \mapsto A_2^{\bar{\mu}}(t,]0, x], \omega)$ и $(t, x, \omega) \mapsto A_3^{\hat{\mu}}(t,]0, x], \omega)$ являются $\widetilde{\mathcal{T}}_1$ -измеримыми; поля $(z, x, \omega) \mapsto A_4^{\hat{\mu}}(z,]0, x], \omega)$ и $(t, s, x, \omega) \mapsto A_5^{\hat{\mu}}(t, s,]0, x], \omega)$ являются $\widetilde{\mathcal{T}}_2$ -измеримыми; как функции от x они являются элементами пространства $\mathbb{D}_0^1$.

В дальнейшем применяются следующие естественные обозначения для интегралов от $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F}$ -измеримых случайных полей $(\alpha(x), x \in R_+^2)$ по мерам $A_1^{\bar{\mu}}(\cdot), A_2^{\bar{\mu}}(t, \cdot), A_3^{\hat{\mu}}(t, \cdot), A_4^{\hat{\mu}}(z, \cdot)$ и $A_5^{\hat{\mu}}(t, s, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \int_{]0,y]} \alpha(x) \bar{\mu}(x, dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) A_1^{\bar{\mu}}(dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \bar{\mu}((x_1, t), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) A_2^{\bar{\mu}}(t, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \hat{\mu}((x_1, t), x, dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) A_3^{\hat{\mu}}(t, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \hat{\mu}(z, (x_1, z_2), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) A_4^{\hat{\mu}}(z, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \hat{\mu}((x_1, t), (x_1, s), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) A_5^{\hat{\mu}}(t, s, dx). \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Если выполнено условие **(M)**, то существуют такие функции $M_1^{\mu}(x, \omega) \in \mathcal{T} | \mathcal{B}(R)$, $M_2^{\mu}(t, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_1 | \mathcal{B}(R)$, $M_3^{\mu'}(t, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_1 | \mathcal{B}(R)$, $M_4^{\mu'}(z, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_2 | \mathcal{B}(R)$, $M_5^{\mu'}(t, s, x, \omega) \in \widetilde{\mathcal{T}}_2 | \mathcal{B}(R)$, что для любых фиксированных $t, s \in R_+$, $z \in R_+^2$ случайные поля $M_1^{\mu}(\cdot), M_2^{\mu}(t, \cdot), M_3^{\mu'}(t, \cdot), M_4^{\mu'}(z, \cdot)$ и $M_5^{\mu'}(t, s, \cdot)$ являются элементами $\mathcal{M}_{S,1}^2$ с квадратическими вариациями $A_1^{\bar{\mu}}([0, \cdot]), A_2^{\bar{\mu}}(t, [0, \cdot]), A_3^{\hat{\mu}}(t, [0, \cdot]), A_4^{\hat{\mu}}(z, [0, \cdot])$ и $A_5^{\hat{\mu}}(t, s, [0, \cdot])$ соответственно и

$$\begin{aligned} M_1^{\mu}(\cdot) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_1^{\delta}(\mu, [0, \cdot]), & M_2^{\mu}(t, \cdot) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_2^{\delta}(\mu, t, [0, \cdot]), \\ M_3^{\mu'}(t, \cdot) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_3^{\delta}(\mu', t, [0, \cdot]), & M_4^{\mu'}(z, \cdot) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_4^{\delta}(\mu', z, [0, \cdot]), \\ M_5^{\mu'}(t, s, \cdot) &= \lim_{|\delta| \rightarrow 0} S_5^{\delta}(\mu', t, s, [0, \cdot]) \end{aligned}$$

в пространстве $\mathcal{M}_{S,1}^2$.

В дальнейшем применяются следующие обозначения для интегралов от предсказуемых случайных полей $(\alpha(x), x \in R_+^2)$ по сильным мартингалам $M_1^{\mu}(\cdot), M_2^{\mu}(t, \cdot), M_3^{\mu'}(t, \cdot), M_4^{\mu'}(z, \cdot)$ и $M_5^{\mu'}(t, s, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \int_{]0,y]} \alpha(x) \mu(x, dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) M_1^{\mu}(dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \mu((x_1, t), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) M_2^{\mu}(t, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \mu'((x_1, t), x, dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) M_3^{\mu'}(t, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \mu'(z, (x_1, z_2), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) M_4^{\mu'}(z, dx), \\ \int_{]0,y]} \alpha(x) \mu'((x_1, t), (x_1, s), dx) &= \int_{]0,y]} \alpha(x) M_5^{\mu'}(t, s, dx). \end{aligned}$$

§2.2. Неравенства для моментов равномерных норм и модулей непрерывности стохастических интегралов

Рассмотрим случайные поля η , ϑ , ξ , ζ_1 , ζ_2 , определенные равенствами (2.1) — (2.5). Для произвольной функции $g(\cdot) : \mathbb{R}_+^k \mapsto \mathbb{R}$ и для $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}_+^k$ определим: $\Delta(a, g, \varepsilon) = \sup\{|g(a') - g(a'')| : a', a'' \in [0, a]; |a' - a''| \leq \varepsilon\}$.

Теорема 2.4. *Предположим, что существует такое число $p > 1$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t \geq 0}$ и измеримые случайные поля $\Lambda(z, x)$ и $\bar{\beta}(z, x)$ со значениями в $\mathbb{R}_+$, что:*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(s) ds}{s^{1+2/p}} &< \infty; \quad 0 \leq \bar{\beta}(z, x) \leq \bar{\beta}(z', x) \quad \text{для } z \leq z'; \\ 0 \leq \Lambda(y,]u, v]) &\leq \Lambda(z,]u, v]) \quad \text{для } y \leq z; \quad \mathbb{E}\Lambda(z,]0, z]) < \infty; \\ \bar{\mu}(z,]u, v]) &\leq \Lambda(z,]u, v]); \quad \hat{\mu}(z, z',]x, y]) \leq \Lambda(z \vee z',]x, y])\varphi^2(|z - z'|); \\ |\beta(z, x)| &\leq \bar{\beta}(z, x); \quad |\beta(z, x) - \beta(y, x)| \leq \bar{\beta}(z \vee y, x)\varphi(|z - y|); \\ \mathbb{E}\left(\int_{]0, z]} \bar{\beta}^2(z, x)\Lambda(z, dx)\right)^{p/2} &< \infty. \end{aligned}$$

Тогда:

1) случайное поле ϑ является элементом пространства $\mathcal{M}_{S, \ell}^2$ и

$$\mathbb{E}\|\vartheta\|_z^p \leq C_p \mathbb{E}\left(\int_{]0, z]} \bar{\beta}^2(z, x)\Lambda(z, dx)\right)^{p/2};$$

2) случайное поле ξ имеет непрерывную модификацию, поля η , ζ_1 и ζ_2 имеют модификации (далее обозначаемые теми же буквами) с траекториями в $\mathbb{D}_{0;0}^\ell$;

3) для любого фиксированного $z_2 \geq 0$ процесс $(\zeta_1(z_1, z_2))_{z_1 \geq 0}$ имеет непрерывные траектории; для любого фиксированного $z_1 \geq 0$ процесс $(\zeta_1(z_1, z_2))_{z_2 \geq 0}$ является однопараметрическим квадратично интегрируемым $(\mathcal{F}_{(z_1, z_2)})_{z_2 \geq 0}$ -мартингалом;

4) для любого фиксированного $z_1 \geq 0$ процесс $(\zeta_2(z_1, z_2))_{z_2 \geq 0}$ имеет непрерывные траектории; для любого фиксированного $z_2 \geq 0$ процесс $(\zeta_2(z_1, z_2))_{z_1 \geq 0}$ является однопараметрическим квадратично интегрируемым $(\mathcal{F}_{(z_1, z_2)})_{z_1 \geq 0}$ -мартингалом;

5) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\eta\|_z^p &\leq C_{p, \varphi, z} \mathbb{E}\left(\int_{]0, z]} \bar{\beta}^2(z, x)\Lambda(z, dx)\right)^{p/2}, \\ \mathbb{E}\Delta^p(z, \xi, \varepsilon) + \mathbb{E}\Delta^p(z_1, \zeta_1(\cdot, z_2), \varepsilon) + \mathbb{E}\Delta^p(z_2, \zeta_2(z_1, \cdot), \varepsilon) &\leq \\ &\leq C_{p, \varphi, z, \varepsilon} \mathbb{E}\left(\int_{]0, z]} \bar{\beta}^2(z, x)\Lambda(z, dx)\right)^{p/2}, \end{aligned}$$

где $C_{p,\varphi,z,\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§2.3. Интегрирование по полям ограниченной вариации

§2.3 содержит теорему 2.5 о свойствах траекторий интеграла по интегрирующему ядру локально ограниченной вариации.

Глава 3. Стохастические уравнения Вольтерра на плоскости

§3.1. Существование и единственность решений с локально интегрируемыми траекториями

Пусть λ — локально конечная мера на $(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$; $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^2)$ — пополнение $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ по мере λ ; X_λ — пространство таких функций $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^2) | \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$, что $\|g\|_z = \left(\int_{[0,z]} |g|^2 d\lambda \right)^{1/2} < \infty$ для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$. Для $g \in X_\lambda$ и $x \in \mathbb{R}_+^2$ определим элемент $g^x \in X_\lambda$ равенством $g^x(y) = g(y)I_{[0,x]}^{(y)}$. Отметим, что отображение $x \mapsto g^x : \mathbb{R}_+^2 \mapsto X_\lambda$ непрерывно слева для каждого $g \in X_\lambda$.

Пусть Ξ_λ — пространство таких $\mathcal{T}$ -измеримых полей $\xi = (\xi(z), z \in \mathbb{R}_+^2)$, что $\xi(\cdot, \omega) \in X_\lambda$ для каждого $\omega \in \Omega$.

В данном параграфе работы рассматривается стохастическое интегральное уравнение

$$\xi(z) = \eta(z) + \int_{[0,z]} a(z, x, \xi^z) \gamma(z, dx) + \int_{[0,z]} b(z, x, \xi^x) \mu(z, dx), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3.1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\eta \in \Xi_\lambda$;
- 2) $((z, \omega), x, g) \mapsto a(z, \omega, x, g) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell \times m})$;
- 3) $(z, (x, \omega)) \mapsto \gamma(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$;
- 4) $(\gamma(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{A}_m$ для каждого фиксированного z ;
- 5) $(z, (x, \omega), g) \mapsto b(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell \times d})$;
- 6) $(z, (x, \omega)) \mapsto \mu(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- 7) $(\mu(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{M}_{S,d}^2$ для каждого фиксированного z .

Решением уравнения (3.1) будем называть такой элемент ξ пространства Ξ_λ , что для каждого $z \in \mathbb{R}_+^2$ с вероятностью 1 выполнено равенство (3.1). Решение ξ уравнения (3.1) будем называть единственным, если любое другое решение уравнения (3.1) является модификацией ξ .

Пусть $\bar{\mu}(z, x) = \text{tr} \langle \mu(z, \cdot) \rangle_x$, $\bar{\gamma}(z, x) = \sum_{j=1}^m \int_{[0,x]} |\gamma_j(z, dy)|$.

Лемма 3.2. 1. *Предположим, что $\omega \mapsto \eta(\omega) \in \mathcal{F}_y | \mathcal{B}(X_\lambda)$, $y \leq z$. Тогда $(x, \omega) \mapsto \eta(\omega) I_{[y,z]}^{(x)} \in \mathcal{P} | \mathcal{B}(X_\lambda)$.*

2. Если $\xi \in \Xi_\lambda$, то

$$\begin{aligned}(x, \omega) &\mapsto \xi^x(\cdot, \omega) \in \mathcal{P}|\mathcal{B}(X_\lambda), \\(z, (x, \omega)) &\mapsto b(z, x, \omega, \xi^x(\cdot, \omega)) \in \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{P}|\mathcal{B}(R^{\ell \times d}), \\((z, \omega), x) &\mapsto a(z, \omega, x, \xi^z(\cdot, \omega)) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(R_+^2)|\mathcal{B}(R^{\ell \times m}).\end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Предположим, что существует такое случайное поле $B(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F}|\mathcal{B}(R_+)$, что $0 \leq B(z, x) \leq B(z', x)$ для $z \leq z'$ и*

$$|a(z, x, g)| \leq B(z, x)(1 + \|g\|_z), \quad |b(z, x, g)| \leq B(z, x)(1 + \|g\|_x), \quad (3.2)$$

$$|a(z, x, g) - a(z, x, g')| \leq B(z, x)\|g - g'\|_z,$$

$$|b(z, x, g) - b(z, x, g')| \leq B(z, x)\|g - g'\|_x,$$

$$\int_{[0, z]} B(z, x) \bar{\gamma}(z, dx) + \int_{[0, z]} B^2(z, x) \bar{\mu}(z, dx) \leq \Gamma(z),$$

где $(\Gamma(z), z \in R_+^2)$ — неслучайная функция, $0 \leq \Gamma(z) \leq \Gamma(z')$ для $z \leq z'$.

Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (3.1).

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнено условие (3.2) и существуют такие $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F}|\mathcal{B}(R_+)$ -измеримые случайные поля $B_n(z, x, \omega)$, $n \in \mathbb{N}$, что*

$$1) \quad \text{если } \|g\|_z \vee \|g'\|_z \leq n, \text{ то } |a(z, x, g) - a(z, x, g')| \leq B_n(z, x)\|g - g'\|_z,$$

$$2) \quad \text{если } \|g\|_x \vee \|g'\|_x \leq n, \text{ то } |b(z, x, g) - b(z, x, g')| \leq B_n(z, x)\|g - g'\|_x,$$

$$3) \quad \int_{[0, z]} B_n(z, x) \bar{\gamma}(z, dx) + \int_{[0, z]} B_n^2(z, x) \bar{\mu}(z, dx) \leq \Gamma_n(z),$$

где $(\Gamma_n(z), z \in R_+^2)$ — неслучайные функции, $0 \leq \Gamma_n(z) \leq \Gamma_n(z')$ для $z \leq z'$.

Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (3.1).

Пусть

$$\hat{\mu}(z, y, x) = \text{tr} \langle \mu(z, \cdot) - \mu(y, \cdot) \rangle_x, \quad \hat{\gamma}(z, y, x) = \sum_{j=1}^m \int_{[0, x]} |\gamma_j(z, du) - \gamma_j(y, du)|.$$

Теорема 3.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2, траектории поля η лежат в $\mathbb{D}^\ell$ и существуют такие возрастающие функции $\varphi(\cdot) : R_+ \mapsto R_+$ и $\varrho(\cdot) : R_+ \mapsto R_+$, число $p > 1$ и положительные измеримые случайные поля $B(z, x, \omega)$ и $\Lambda(z, x, \omega)$, что*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(s) s^{-1-2/p} ds < \infty; \quad \lim_{t \downarrow 0} \varrho(t) = 0, \\ \mathbb{E} \Lambda(z,]0, z]) < \infty; \quad 0 \leq \Lambda(y,]u, v]) \leq \Lambda(z,]u, v]) \quad \text{для } u \leq v, y \leq z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(z,]u, v]) &\leq \Lambda(z,]u, v]); & \widehat{\gamma}(z, y,]u, v]) &\leq \Lambda(z \vee y,]u, v])\varrho(|z - y|), \\
\bar{\mu}(z,]u, v]) &\leq \Lambda(z,]u, v]); & \widehat{\mu}(z, y,]u, v]) &\leq \Lambda(z \vee y,]u, v])\varphi^2(|z - y|), \\
0 \leq B(y, x) &\leq B(z, x) \quad \text{для } y \leq z; & \mathbb{E} \left(\int_{[0, z]} B^2(z, x) \Lambda(z, dx) \right)^{p/2} &< \infty, \\
|a(z, x, g) - a(y, x, g)| &\leq B(z \vee y, x) \varrho(|z - y|)(1 + \|g\|_z), \\
|b(z, x, g) - b(y, x, g)| &\leq B(z \vee y, x) \varphi(|z - y|)(1 + \|g\|_x).
\end{aligned}$$

Тогда существует единственное в смысле неотличимости решение ξ уравнения (3.1) с траекториями в $\mathbb{D}^\ell$.

§3.2. Предельная теорема для уравнений Вольтерра на плоскости

Рассмотрим семейство стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости:

$$\xi_s(z) = \eta_s(z) + \int_{[0, z]} a_s(z, x, \xi_s^z) \gamma_s(z, dx) + \int_{[0, z]} b_s(z, x, \xi_s^x) \mu_s(z, dx), \quad (3.3)$$

$s \geq 0$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

- 1) $\eta_s \in \Xi_\lambda$;
- 2) $((z, \omega), x, g) \mapsto a_s(z, \omega, x, g) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell \times m})$;
- 3) $(z, (x, \omega)) \mapsto \gamma_s(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$;
- 4) $(\gamma_s(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{A}_m$ для каждого фиксированного z ;
- 5) $(z, (x, \omega), g) \mapsto b_s(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(X_\lambda) | \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell \times d})$;
- 6) $(z, (x, \omega)) \mapsto \mu_s(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- 7) $(\mu_s(z, x), x \in \mathbb{R}_+^2) \in \mathcal{M}_{S, d}^2$ для каждого фиксированного z .

Введем следующие обозначения: $\gamma_{s,0} = \gamma_s - \gamma_0$, $\mu_{s,0} = \mu_s - \mu_0$. Пусть

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_s(z, x) &= \sum_{j=1}^m \int_{[0, x]} |\gamma_s^{(j)}(z, dy)|, & \bar{\gamma}_{s,0}(z, x) &= \sum_{j=1}^m \int_{[0, x]} |\gamma_{s,0}^{(j)}(z, dy)|, \\
\bar{\mu}_s(z, x) &= \text{tr} \langle \mu_s(z, \cdot) \rangle_x, & \bar{\mu}_{s,0}(z, x) &= \text{tr} \langle \mu_{s,0}(z, \cdot) \rangle_x.
\end{aligned}$$

Теорема 3.4. *Предположим, что для каждого $s \geq 0$ уравнения (3.3) имеют единственные решения ξ_s с траекториями в X_λ и пусть:*

- 1) $\mathbf{P}\text{-}\lim_{s \rightarrow 0} \|\eta_s - \eta_0\|_x = 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}_+^2$;
- 2) *существуют такие $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathcal{P} | \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -измеримые случайные поля $B_s(z, x)$, что $0 \leq B_s(z, x) \leq B_s(z', x)$ для $z \leq z'$,*

$$\begin{aligned}
|a_s(z, x, g)| &\leq B_s(z, x)(1 + \|g\|_z), \\
|b_s(z, x, g)| &\leq B_s(z, x)(1 + \|g\|_x), \\
|a_0(z, x, g) - a_0(z, x, g')| &\leq B_0(z, x) \|g - g'\|_z, \\
|b_0(z, x, g) - b_0(z, x, g')| &\leq B_0(z, x) \|g - g'\|_x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[0,z]} B_s(z, x) \bar{\gamma}_s(z, dx) + \int_{[0,z]} B_s^2(z, x) \bar{\mu}_s(z, dx) &\leq \Gamma_s(z), \\ \int_{[0,z]} B_s(z, x) \bar{\gamma}_{s,0}(z, dx) + \int_{[0,z]} B_s^2(z, x) \bar{\mu}_{s,0}(z, dx) &\leq \Gamma_{s,0}(z), \end{aligned}$$

где $\Gamma_s(z)$ и $\Gamma_{s,0}(z)$ — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям: $0 \leq \Gamma_s(z) \leq \Gamma_s(z')$ и $0 \leq \Gamma_{s,0}(z) \leq \Gamma_{s,0}(z')$ для $z \leq z'$, $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma_{s,0}(z) = 0$ для любого z .

3) существуют такие $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ -измеримые случайные поля $B_{s,n}(z, x)$, $n \in \mathbf{N}$, что $0 \leq B_{s,n}(z, x) \leq B_{s,n}(z', x)$ для $z \leq z'$,

$$\begin{aligned} \sup_{g: \|g\|_z \leq n} |a_s(z, x, g) - a_0(z, x, g)| &\leq B_{s,n}(z, x), \\ \sup_{g: \|g\|_x \leq n} |b_s(z, x, g) - b_0(z, x, g)| &\leq B_{s,n}(z, x), \\ \int_{[0,z]} B_{s,n}(z, x) \bar{\gamma}_0(z, dx) + \int_{[0,z]} B_{s,n}^2(z, x) \bar{\mu}_0(z, dx) &\leq \Gamma_{s,n}(z), \end{aligned}$$

где $\Gamma_{s,n}(z)$ — неслучайные функции, $0 \leq \Gamma_{s,n}(z) \leq \Gamma_{s,n}(z')$ для $z \leq z'$, $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma_{s,n}(z) = 0$ для любых z и n .

Тогда $\mathbf{P}\text{-}\lim_{s \rightarrow 0} \|\xi_s - \xi_0\|_x = 0$ для каждого $x \in \mathbf{R}_+^2$.

§3.3. Существование и единственность решений с непрерывными траекториями

Пусть $\mathbb{C}^\ell$ обозначает пространство непрерывных функций $g : \mathbf{R}_+^2 \mapsto \mathbf{R}^\ell$, $\|g\|_z = \sup_{x \in [0,z]} |g(x)|$, $\mathcal{C}_z = \mathcal{C}_z(\mathbb{C}^\ell)$ обозначает минимальную σ -алгебру, содержащую цилиндрические подмножества пространства $\mathbb{C}^\ell$ с координатами из $[0, z]$, т.е. $\mathcal{C}_z(\mathbb{C}^\ell) = \sigma \left\{ \{g | g \in \mathbb{C}^\ell, g(v) \in B\} \mid v \in [0, z], B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\ell) \right\}$.

Если поле $(\xi(x), x \in \mathbf{R}_+^2)$ — $(\mathcal{F}_x, x \in \mathbf{R}_+^2)$ -согласовано и траектории поля ξ п.н. принадлежат $\mathbb{C}^\ell$, то будем писать: $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}^\ell$. Через Ξ_p , $p \geq 2$, обозначим пространство таких полей $(\xi(x), x \in \mathbf{R}_+^2) \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}^\ell$, что $\mathbf{I}\xi\mathbf{I}_z = (\mathbf{E}\|\xi\|_z^p)^{1/p} < \infty$ для каждого z . Для ξ и $\eta \in \Xi_p$ пусть $\varrho_\Xi(\xi, \eta) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (1 \wedge \mathbf{I}\xi - \eta\mathbf{I}_{(k,k)})$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}$ обозначает минимальную σ -алгебру подмножеств пространства $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega \times \mathbb{C}^\ell$, порожденную классом

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{J}} = & \{[x, z] \times A \times C \mid x, z \in \mathbf{R}_+^2, x < z, A \in \mathcal{F}_x, C \in \mathcal{C}_x\} \cup \\ & \cup \{\{0\} \times]s, t] \times A \times C \mid s, t \in \mathbf{R}_+, s < t, A \in \mathcal{F}_{(0,s)}, C \in \mathcal{C}_{(0,s)}\} \cup \\ & \cup \{]s, t] \times \{0\} \times A \times C \mid s, t \in \mathbf{R}_+, s < t, A \in \mathcal{F}_{(s,0)}, C \in \mathcal{C}_{(s,0)}\} \cup \\ & \cup \{\{0\} \times A \times C \mid A \in \mathcal{F}_{(0,0)}, C \in \mathcal{C}_{(0,0)}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим стохастическое уравнение Вольтерра на плоскости:

$$\xi(z) = \eta(z) + \int_{]0,z]} a(z, x, \xi) dx + \int_{]0,z]} b(z, x, \xi) dW(x), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3.4)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\eta \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}^\ell$;
- 2) $(z, (x, \omega, g)) \mapsto a(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \widetilde{\mathcal{P}} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$;
 $(z, (x, \omega, g)) \mapsto b(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \widetilde{\mathcal{P}} | \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\ell \times m})$;
- 3) $(W(x), x \in \mathbb{R}_+^2)$ — m -мерный стандартный двупараметрический $\mathbb{F}$ -винеровский процесс.

Решением уравнения (3.4) будем называть такое случайное поле $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}^\ell$, что с вероятностью 1 равенство (3.4) выполнено для всех $z \in \mathbb{R}_+^2$. Если уравнение (3.4) имеет решение, то будем называть его единственным, если оно неотлично от любого другого решения уравнения (3.4).

Теорема 3.7. *Предположим, что $\eta \in \Xi_p$ и существует такое число $p > 1$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t \geq 0}$ и такие константы $C \geq 0$ и $K \geq 0$ что:* $\int_0^1 \varphi(s) s^{-1-2/p} ds < \infty$;

$$|a(z, x, g)| + |b(z, x, g)| \leq C(1 + \|g\|_x); \quad (3.5)$$

$$|b(z, x, g) - b(z', x, g)| \leq C\varphi(|z - z'|)(1 + \|g\|_x); \quad (3.6)$$

$$|a(z, x, g) - a(z, x, g')| + |b(z, x, g) - b(z, x, g')| \leq K\|g - g'\|_x;$$

$$|b(z, x, g) - b(z', x, g) - b(z, x, g') + b(z', x, g')| \leq K\varphi(|z - z'|)\|g - g'\|_x.$$

Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_p$ уравнения (3.4).

Теорема 3.8. *Предположим, что коэффициенты уравнения (3.4) удовлетворяют условиям (3.5), (3.6) и условию: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая константа $K_n \geq 0$ что*

$$|a(z, x, g) - a(z, x, g')| + |b(z, x, g) - b(z, x, g')| \leq K_n\|g - g'\|_x,$$

$$|b(z, x, g) - b(z', x, g) - b(z, x, g') + b(z', x, g')| \leq K_n\varphi(|z - z'|)\|g - g'\|_x$$

для всех таких $g, g' \in \mathbb{C}^\ell$, что $\|g\|_x \vee \|g'\|_x \leq n$.

Тогда уравнение (3.4) имеет единственное решение $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}^\ell$.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН, профессору Юрию Васильевичу Прохорову за поддержку и внимание к ее научной работе.

3. Список публикаций автора по теме диссертации

1. Н. А. Колодий, «Стохастические интегральные уравнения на плоскости». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 7, вып. 2 (2000), 500–501.
2. Н. А. Колодий, «Теоремы существования решений и предельные теоремы для двупараметрических стохастических уравнений Вольтерра». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 8, вып. 2 (2001), 775.
3. Н. А. Колодий, «Непрерывные модификации и неравенства для стохастических интегралов типа Вольтерра на плоскости». — *Современные исслед. в мат. и мех., Материалы 23 Конф. молодых ученых мех.-мат. фак. МГУ*, Вып. 2, с. 172–174. Изд-во МГУ, Москва, 2001.
4. Н. А. Колодий, «О свойствах стохастических интегралов по непрерывному двупараметрическому сильному мартингалу». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 9, вып. 2 (2002), 399–400.
5. Н. А. Колодий, «О сходимости дискретных аппроксимаций стохастических уравнений Вольтерра на плоскости». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 10, вып. 3 (2003), 671–672.
6. Н. А. Колодий, «Интегралы по двупараметрическим сильным мартингальным интегрирующим ядрам и их применения». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 11, вып. 1 (2004), 120–121.
7. Н. А. Колодий, «Об условиях существования непрерывных справа модификаций стохастических интегралов на плоскости». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 11, вып. 4 (2004), 840–841.
8. Н. А. Колодий, «Неравенства для стохастических интегралов по непрерывному сильному мартингалу». — *Вестник ВолГУ. Сер. Мат. Физ.* Вып. 8 (2003–2004), 35–47.
9. Н. А. Колодий, «Некоторые свойства случайных полей, связанных со стохастическими интегралами по сильным мартингалам». — *Зап. Науч. Сем. ПОМИ*, Вып. 320 (2004), 80–96.
10. Н. А. Колодий, «Уравнения Вольтерра на плоскости со стохастическими интегралами по сильным мартингалам». — *Обозрение прикл. и пром. матем.* 10, вып. 3 (2005), 659–661.
11. Н. А. Колодий, «Непрерывность по параметру решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* 14, вып. 4 (2007), 659–660.

12. Н. А. Колодий, «Измеримость по параметру двупараметрического стохастического интеграла по сильному мартингалу». — *Обозрение прикладной и пром. мат.* **15**, вып. 4 (2008), 639–640 .
13. N. A. Kolodii, « Some properties of stochastic integrals on the plane». — *Abstracts of Communic. of Inter. Conf. on Stoch. and Global Analysis*, p. 31. Voronezh, 1996.
14. N. A. Kolodii, «On Volterra type stochastic integral with respect to a continuous strong martingale». — *Theory of Stochastic Processes*, **6(22)**, №1–2 (2000), 58–61.
15. N. A. Kolodii, «Inequalities for moments of Volterra type stochastic integrals on the plain». — *Abstr. of Communication of Intern. Conf. "Stochastic Analysis and its Applications"*, p. 62. Lviv, 2001.
16. N. A. Kolodii, «On Volterra type stochastic integral equations on the plane » *Abstr. of Communication of Intern. Conf. "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statist."* p. 31. Kyiv University, Kyiv, 2001.
17. N. A. Kolodii, «Existence theorems and limit theorems for stochastic Volterra equations on the plane». — *Abstr. of Communication of Conf. "Kolmogorov and Contemporary Mathematics"* pp. 473–474. Moscow, 2003.
18. N. A. Kolodii, «Stochastic integrals with respect to strong martingale integral kernels». — *Тез. докл. международной шк.-конф. "Геометрический анализ и его прил."* с. 85–87. Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2004.
19. N. A. Kolodii, «Inequalities for moments of right continuous modifications of integrals with respect to strong martingale kernels». — *Abstr. of Communication of Intern. Conf. "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statist. 2"* p. 62. Kyiv University, Kyiv, 2004.
20. N. A. Kolodii, «Volterra equations on the plane driven by strong martingale kernels». — *Abstr. of 12 gen. meet. "Europ. women in math."* pp. 52–53. Volgograd, 2005.
21. N. A. Kolodii, «Volterra equations driven by strong martingale kernels». — *Abstr. of the Intern. Conf. Modern Stochastic: Theory and Application*, pp. 165–166. Kyiv University, Kyiv, 2006.

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство ООО "МАКС Пресс"

Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.

Подписано к печати 26.01.2009 г.

Формат 60 × 90 1/16. Усл. печ. л. 1, 0. Тираж 100 экз. Заказ

Тел. 939 — 3890. Тел./Факс 939 — 3891

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к.