Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

АРТЮХОВ Сергей Владимирович

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА С НЕНУЛЕВЫМ СРЕДНИМ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. Ю. Королев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Хохлов
	кандидат физико-математических наук, доцент Е. В. Коссова
Ведущая организация:	Институт проблем информатики РАН

Защита диссертации состоится 29 мая 2009 г. в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ http://cs.msu.ru в разделе "Наука" – "Работа диссертационных советов" – "Д 501.001.44"

Автореферат разослан 21 апреля 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н. П. Трифонов.

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Данная работа посвящена изучению некоторых асимптотических свойств специальных случайных сумм – сумм независимых случайных слагаемых, в которых число слагаемых само является случайной величиной и неограниченно увеличивается в соответствии с некоторым дважды стохастическим пуассоновским процессом, также называемым процессом Кокса. Такие суммы описывают поведение координаты частицы при неоднородном или нестационарном случайном блуждании. От однородного случайного блуждания оно отличается тем, что распределения случайных интервалов времени между последовательными скачками являются, вообще говоря, различными. Предположение неоднородности (различия распределений времен между последовательными скачками) случайного блуждания хорошо согласуется с представлением о том, что интенсивность изменений координаты частицы, испытывающей броуновское движение в изменяющейся (например, турбулентной) среде, существенно непостоянна. Это непостоянство может быть вызвано многими причинами, проявляющимися, например, как непериодические или периодические компоненты (тренды), связанные с изменениями локальных (во времени) тенденций, например, панического характера на биржах при моделировании динамики финансовых или экономических показателей или внешних параметров тороидальных магнитных ловушек (токамаков и стеллараторов) при моделировании плазменной турбулентности [1]. Кроме того, участки нестационарности могут быть вызваны некоторыми случайно возникающими (не поддающимися абсолютно надежному прогнозированию) причинами.

Пусть $N(t)$ – число скачков случайно блуждающей частицы за период времени $[0,t]$, $t \geq 0$. При решении многих практических задач естественно считать, что моменты скачков образуют хаотический точечный случайный процесс на оси времени. Однако этот хаотический случайный процесс может не быть однородным в силу указанных выше представлений. Как известно, наиболее разумными стохастическими моделями неоднородных хаотических точечных процессов являются *дважды стохастические пуассоновские процессы*, иначе называемые *процессами Кокса* (см., например,[2]).

Рассмотрим предложенное Д. Коксом [3] понятие *дважды стохастического пуассоновского процесса*, являющееся естественным обобщением неоднородного пуассоновского процесса.

Пусть $N_1(t)$, $t \geq 0$, – однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, – независимый от $N_1(t)$ случайный процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $\mathsf{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый теперь также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)),\ t \geq 0.$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. В

[1] *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. – М.: ИПИ РАН, 2007

[2] *Bening V. E., Korolev V. Yu.* Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. — Utrecht: VSP, 2002.

[3] *Cox D. R.* Some statistical methods connected with series of events. // J. Roy. Statist. Soc., Ser. B. 1955. Vol. 17. P. 129-164.

частности, если процесс $\Lambda(t)$ допускает представление

$$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

в котором $\lambda(t)$ – положительный случайный процесс с интегрируемыми траекториями, то $\lambda(t)$ можно интерпретировать как мгновенную стохастическую интенсивность процесса $N(t)$. Поэтому иногда процесс $\Lambda(t)$, управляющий процессом Кокса $N(t)$, будет называться *накопленной интенсивностью* процесса $N(t)$.

При каждом фиксированном t распределение случайной величины $N(t) = N_1\big(\Lambda(t)\big)$ является смешанным пуассоновским. Класс смешанных пуассоновских распределений весьма широк и содержит, в частности,

- само пуассоновское распределение (ему соответствует вырожденное смешивающее распределение),
- отрицательное биномиальное распределение (ему соответствует смешивающее гамма-распределение),
- распределение Зихеля, которому соответствует обобщенное обратное нормальное смешивающее распределение,
- бета-пуассоновское распределение при смешивающем бета-распределении,
- распределение Делапорте со сдвинутым гамма-распределением в качестве смешивающего,
- обобщенное распределение Варинга,
- инфекционное распределение Неймана типа A (иначе называемое пуассон-пуассоновским).

Эти и другие примеры смешанных пуассоновских распределений подробно рассмотрены в книгах [[4], [5]]. В этих книгах, а также в [[6]] и [[2]] можно найти детальное описание аналитических и асимптотических свойств процессов Кокса.

В данной диссертации рассматривается частный вариант неоднородного случайного блуждания, в котором число слагаемых в суммах формируется в соответствии с процессом Кокса. Такие блуждания обычно называют обобщенными дважды стохастическими пуассоновскими процессами или обобщенными процессами Кокса. Этот случай имеет чрезвычайно важное практическое значение.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины, а $N(t)$ – дважды стохастический пуассоновский процесс (процесс Кокса), управляемый процессом $\Lambda(t)$, то есть

$$N(t) = N_1\big(\Lambda(t)\big), \quad t \geq 0,$$

где $\Lambda(t)$ – случайный процесс с неубывающими непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля, $N_1(t)$ – стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский

[4] *Grandell J.* Mixed Poisson Processes. – London: Chapman and Hall, 1997

[5] *Королев В. Ю. Бенинг В. Е., Шоргин С. Я* Математические основы теории риска. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007

[6] *Grandell J.* Doubly Stochastic Poisson Process. // Lecture Notes in Mathematics, 1976. Vol. 529. P. 229-234

процесс с единичной интенсивностью), причем процессы $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$ стохастически независимы.

Предположим, что при каждом $t \geq 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ независимы. Процесс

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

называется обобщенным процессом Кокса (при этом для определенности считаем, что $\sum_{j=1}^{0} = 0$). Процессы вида (1) играют очень важную роль во многих прикладных задачах. Достаточно сказать, что при $\Lambda(t) \equiv \lambda t$ с $\lambda > 0$ процесс $S(t)$ превращается в классический обобщенный пуассоновский процесс, широко используемый при моделировании многих явлений в физике, теории надежности, финансовой и актуарной деятельности, биологии и т. д. Большое число разнообразных прикладных задач, приводящих к обобщенным пуассоновским процессам, описано в книгах [[2], [7]].

Примеры некоторых задач, сводящихся к обобщенным процессам Кокса, приведены, например, в книгах [[2], [7]].

Всюду в дальнейшем предполагается, что у случайных величин $\{X_j\}_{j\geq 1}$ имеется, по крайней мере, два первых момента. Обозначим $\mathsf{E}X_1 = a \neq 0$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Как показано, например, в [[2], [5]], даже в таких предположениях предельные распределения обобщенных процессов Кокса могут иметь произвольно тяжелые хвосты. При этом асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса с нулевым средним принципиально отличается от асимптотического поведения обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним. Если в первом случае в качестве предельных законов в оговоренных выше моментных условиях выступают масштабные, то во втором – сдвиговые смеси нормальных законов.

Цель работы

Целью данной диссертации является

- изучение точности асимптотических аппроксимаций распределений обобщенных процессов Кокса, их экстремумов и обобщенных процессов риска с ненулевыми средними сдвиговыми смесями нормальных законов;

- решение задачи оптимизации параметров страховой деятельности, деятельности склада и пункта обмена валют при случайном характере интенсивностей потоков страховых премий и страховых выплат;

- построение гарантированных двусторонних оценок для значения надежности модифицируемых технических или информационных систем при случайной интенсивности потока модификаций.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

[7] *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random Summation: Limit Theorems and Applications. — Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

1. Получены оценки скорости сходимости распределений обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним, распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса и распределений обобщенных процессов риска к сдвиговыми смесями нормальных законов в традиционных терминах.

2. Решена задача оптимизации параметров страховой деятельности при случайном характере интенсивностей потоков страховых премий и страховых выплат.

3. Предложена интерпретация функциональной зависимости спроса и предложения через зависимость интенсивности потока клиентов от параметров спекулятивной деятельности(в частности, от маржи).

4. Найдены гарантированные доверительные интервалы для нестационарного аналога коэффициента готовности модифицируемых систем с непрерывным временем в рамках экспоненциальной, логистической и гиперболической моделей изменения надежности

Методы исследования

В работе используются классические методы теории вероятностей. Базовым теоретическим результатом является теорема 1.1.2. При ее доказательстве используется метод, основанный на представлении конечномерных распределений обобщенных процессов Кокса в виде смесей обобщенных пуассоновских распределений, в которых смешивание производится по соответствующему конечномерному распределению управляющего процесса. Такой подход позволяет использовать известные результаты о точности нормальной аппроксимации для пуассоновских случайных сумм. Используемый метод оказывается достаточно универсальным и может быть успешно применен к построению оценок скорости сходимости распределений некоторых других процессов с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов. В частности, в диссертации с помощью этого же метода указанные оценки построены для распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса и обобщенных процессов риска. Затем теорема 1.1.2 сама становится базой для решения оптимизационных задач, рассматриваемых в главах 2 – 4. Для решения этих задач также используются аналитические и асимптотические свойства пуассоновских случайных сумм.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Особенностью представленных в диссертации результатов, отличающей их от предыдущих, является получение универсальной оценки скорости сходимости обобщенных процессов Кокса с ненулевыми средними к сдвиговым смесям нормальных законов. Найденная оценка оказывается применимой и к таким обобщенным процессам Кокса, в которых у управляющего процесса отсутствует дисперсия. Аналогичные универсальные оценки, существенно улучшающие известные ранее, получены для экстремумов обобщенных процессов Кокса и обобщенных процессов риска. Кроме того, впервые получены двусторонние оценки оптимального количества товара в задаче управления запасами при случайном характере интенсивности потока заявок и аналогичные двусторонние оценки начального капитала страховой компании в задаче минимизации издержек при случайном характере интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат. Более того, впервые найдены гарантированные доверительные интервалы для нестационарного аналога коэффициента готовности модифицируемых технических и информационных систем (ТИС) с непрерывным временем в рамках экспоненциальной, логистической и гиперболической моделей изменения надежности ТИС с непрерывным временем.

Апробация работы и публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре «Теория риска и смежные вопросы» на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, на международном научном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей в Майори-Салерно (Италия) в сентябре 2005 г., на научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2005» и «Ломоносов - 2006», а также на научных семинарах кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ и Института проблем информатики РАН.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 78 наименований. Общий объем работы составляет 114 страниц. Работа включает 2 таблицы и 15 графиков.

2 Краткое содержание диссертации

Введение содержит общую характеристику работы, описание объектов исследования и основных результатов.

Первая глава посвящена оценкам точности аппроксимации распределений обобщенных процессов Кокса с ненулевыми средними сдвиговыми смесями нормальных законов. Здесь также решаются задачи построения оценок скорости сходимости как распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса, так и распределений обобщенных процессов риска. Эти оценки являются существенным уточнением и обобщением известных оценок (см., например, [[2], [8]]).

Случай управляющих процессов с конечной дисперсией. Рассмотрим обобщенный процесс Кокса (1). Предположим, что существуют такие числа $\ell \in (0,\infty)$ и $s \in (0,\infty)$, что

$$\mathsf{E}\Lambda(t) \equiv \ell t, \qquad \mathsf{D}\Lambda(t) \equiv s^2 t, \quad t > 0.$$

Стандартную нормальную функцию распределения будем обозначать $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Символ $\Longrightarrow$ будет обозначать сходимость по распределению.

В книге [[2]] доказана общая теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости одномерных распределений обобщенных процессов Кокса, частным случаем которой является следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $a \neq 0$. В дополнение к приведенным выше условиям на моменты управляющего процесса $\Lambda(t)$ предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \to \infty$. Тогда одномерные распределения неслучайно центрированных и нормированных обобщенных процессов Кокса слабо сходятся к распределению некоторой случайной величины Z при $t \to \infty$, то есть*

$$\frac{S(t) - a\ell t}{\sqrt{[\ell(a^2+\sigma^2) + a^2 s^2]t}} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty),$$

[8] *Королев В. Ю., Соколов И. А.* Основы математической теории надежности модифицируемых систем. — М.: ИПИ РАН, 2006.

тогда и только тогда, когда существует случайная величина V такая, что

$$\frac{\Lambda(t) - \ell t}{s\sqrt{t}} \Longrightarrow V \quad (t \to \infty).$$

При этом

$$\mathsf{P}(Z < x) = \mathsf{E}\Phi\left(x\sqrt{1 + \frac{a^2 s^2}{(a^2+\sigma^2)\ell}} - \frac{asV}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)\ell}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Несложно видеть, что предельная случайная величина Z допускает представление

$$Z \stackrel{d}{=} \left[1 + \frac{a^2 s^2}{(a^2+\sigma^2)\ell}\right]^{-1/2} \cdot X + \frac{as}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)\ell + a^2 s^2}} \cdot V,$$

где X – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от случайной величины V.

В приводимой ниже теореме изучается вопрос о скорости сходимости в теореме 1. В книге [2] приведены некоторые оценки скорости сходимости в теореме 1, но они справедливы для довольно узкого класса распределений предельной случайной величины V, довольно громоздки, содержат трудно вычисляемые характеристики и неудобны для анализа и применения. Здесь будет приведена оценка скорости сходимости в теореме 1 в традиционных терминах.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем дополнительные обозначения:

$$\beta^3 = \mathsf{E}|X_1|^3, \quad L_3 = \frac{\beta^3}{(a^2+\sigma^2)^{3/2}}, \quad F_t(x) = \mathsf{P}\left(\frac{S(t) - a\ell t}{\sqrt{[\ell(a^2+\sigma^2) + a^2 s^2]t}} < x\right)$$

$$\rho_t = \sup_x \left| F_t(x) - \mathsf{E}\Phi\left(x\sqrt{1 + \frac{a^2 s^2}{(a^2+\sigma^2)\ell}} - \frac{asV}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)\ell}}\right)\right|,$$

$$\Delta_t = \sup_v \left| \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t) - \ell t}{s\sqrt{t}} < v\right) - \mathsf{P}\left(V < v\right)\right|.$$

Теорема 2. *Пусть $\beta^3 < \infty$, $\mathsf{E}|V| < \infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\rho_t \le \Delta_t + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \inf_{\epsilon \in (0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{(1-\epsilon)\ell}} + \frac{s}{\ell}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\Bigg|\right\},$$

где $C_0 \le 0.7005$,

$$Q(\epsilon) = \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{(1+\sqrt{1-\epsilon})\sqrt{2\pi e(1-\epsilon)}}\right\}.$$

Следствие 1. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 2 семейство случайных величин*

$$\left\{\left|\frac{\Lambda(t) - \ell t}{s\sqrt{t}}\right|\right\}_{t>0}$$

равномерно интегрируемо.

Тогда справедлива оценка

$$\rho_t \le \Delta_t + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \inf_{\epsilon \in (0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{(1-\epsilon)\ell}} + \frac{s}{\ell}\left(\frac{1}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\right\},$$

Замечание 1. Пусть, к примеру, процесс $\Lambda(t)$ является пуассоновским с интенсивностью $\ell = s^2$. В таком случае распределение случайной величины $N(t)$ при каждом $t > 0$ является так называемым *пуассон-пуассоновским* или (*инфекционным*) *распределением Неймана типа* A. Класс таких распределений введен Ю. Нейманом в работе [9] в связи с некоторыми задачами из области бактериологии и энтомологии. В этом случае величина Δ_t также имеет порядок $O\big(t^{-1/2}\big)$, поскольку в таком случае справедлива оценка

$$\Delta_t \leq \frac{C_0}{\sqrt{t}},$$

причем случайная величина V имеет стандартное нормальное распределение, см., например, [5] и, следовательно, распределение случайной величины Z также является стандартным нормальным. В таком случае имеет место оценка

$$\rho_t \leq \frac{1}{\sqrt{\ell t}} \cdot \inf_{\epsilon\in(0,1)} \left\{ C_0\left(1 + \frac{L_3}{\sqrt{1-\epsilon}}\right) + \frac{1}{\epsilon} + Q(\epsilon) \right\}.$$

Замечание 2. Другим примером управляющего процесса $\Lambda(t)$, при котором величина Δ_t также имеет порядок $O\big(t^{-1/2}\big)$ является случай, когда $\Lambda(t)$ является гамма-процессом Леви, приращение которого на единичном интервале имеет гамма-распределение с параметром масштаба $\lambda = \ell/s^2$ и параметром формы $\alpha = \ell^2/s^2$. В таком случае распределение случайной величины $N(t)$ при каждом $t > 0$ является отрицательным биномиальным (см., например, [5]). При этом случайная величина V имеет стандартное нормальное распределение, и, следовательно, распределение случайной величины Z является стандартным нормальным.

Замечание 3. Если случайный процесс $N(t)$ является однородным пуассоновским (с интенсивностью ℓ), то, очевидно, $s = 0$. При этом логично считать, что распределение случайной величины V является вырожденным в нуле и $\Delta_t = 0$. Поэтому в таком случае оценка, приведенная в теореме 2, естественно переходит в оценку скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону, приведенную, например, в работе [10] с константой C_0, уточненной в работе [11].

Замечание 4. При известных значениях основных параметров можно легко найти численные оценки величины

$$\inf_{\epsilon\in(0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{(1-\epsilon)\ell}} + \frac{s}{\ell}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\Bigg|\right\}.$$

Найдем, например, значение данного выражения при условии, что $C_0 = 0.7005$, $a = 5$, $\sigma = 10$, $\ell = 4$, $s = 2$, $\mathsf{E}|V| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (что характерно для случая стандартно нормально распределенной случайной величины V), $L_3 = 1,5108$. Тогда с помощью численной оптимизации по ϵ получаем

$$\inf_{\epsilon\in(0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{(1-\epsilon)\ell}} + \frac{s}{\ell}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\Bigg|\right\} \approx 2,3882.$$

[9] *Neyman J.* On a new class of "contagious" distribution, applicable in entomology and bacteriology. // Annals of Mathematical Statistics, 1939. Vol. 10. P. 35-57.

[10] *Шевцова И. Г.* Уточнение структуры оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайных величин. // Дис. канд. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 2006.

[11] *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. //Труды молодых ученых факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. – М.: изд-во факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. 2008. С. 101-110.

Следовательно, для данных значений параметров оценка скорости сходимости имеет вид

$$\rho_t \le \Delta_t + \frac{2,3882}{\sqrt{t}}.$$

Случай управляющих процессов с бесконечной дисперсией. Предположение о существовании дисперсии управляющего процесса $\Lambda(t)$ в теореме 1 и теореме 2 не является критическим. Можно доказать аналоги этих результатов для того случая, когда предполагается лишь существование математического ожидания процесса $\Lambda(t)$.

По аналогии с обозначениями, введенными выше, положим

$$\widetilde{\rho}_t = \sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{S(t)-at}{\sqrt{t}} < x\right) - \mathsf{E}\Phi\left(\frac{x-aV}{\sqrt{(a^2+\sigma^2)}}\right)\right|, \;\; \widetilde{\Delta}_t = \sup_v \left| \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}} < v\right) - \mathsf{P}\left(V < v\right)\right|.$$

Теорема 3. *Пусть $\beta^3 < \infty$, $\mathsf{E}\Lambda(t) < \infty$ при каждом $t > 0$, $\mathsf{E}|V| < \infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\widetilde{\rho}_t \le \widetilde{\Delta}_t + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \inf_{\epsilon\in(0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{1-\epsilon}} + \frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\mathsf{E}\left|\frac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}}\right| \right\},$$

Замечание 5. В качестве примера ситуации, на которую распространяется действие теоремы 3, но к которой не применимы теоремы 1 и 2, можно привести такую, в которой

$$\Lambda(t) = \max\{0, \sqrt{t}V + t\} + \frac{1}{2t^{\alpha/2}}\Big(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\sqrt{t} - 1\Big),$$

где $2 < \alpha < 3$, а V – случайная величина с плотностью

$$p(x) = \frac{\alpha+1}{2(|x|+1)^{\alpha}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Несложно проверить, что $\mathsf{E}\Lambda(t) = t$ при любом $t > 0$, но второй момент случайной величины $\Lambda(t)$ бесконечен вследствие бесконечности второго момента случайной величины V (и, следовательно, бесконечен и второй момент обобщенного процесса Кокса $S(t)$, управляемого таким процессом $\Lambda(t)$). При этом, однако, как легко видеть,

$$\frac{\Lambda(t)-t}{\sqrt{t}} = \max\{-\sqrt{t},\, V\} + \frac{1}{2t^{(\alpha+1)/2}}\Big(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\sqrt{t} - 1\Big) \Longrightarrow V$$

при $t \to \infty$. Этот случай является наглядной иллюстрацией очень интересного и нетривиального факта: в отличие от классической теории суммирования, для сумм со случайным числом слагаемых (в частности, для обобщенных процессов Кокса) с бесконечной дисперсией существование нетривиальных слабых пределов возможно и при нормировке порядка $t^{1/2}$, являющейся «стандартной» в классической теории лишь для сумм с конечной дисперсией.

Метод, использованный при доказательстве теоремы 2, оказывается достаточно универсальным и позволяет получить оценки, аналогичные приведенным в теореме 2, как для экстремумов обобщенных процессов Кокса ($\overline{S}(t) = \max_{0\le\tau\le t} S(t),$), так и для обобщенных процессов риска ($R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$). Этим оценкам посвящены заключительные разделы главы 1.

Вторая глава. Во второй главе решается задача об оптимизации прибыли спекулятивной деятельности. Предложена интерпретация функциональной зависимости спроса и предложения через зависимость интенсивности потока клиентов от параметров спекулятивной деятельности. Оптимум понимается как в смысле максимума ожидаемой прибыли, так в смысле максимума гарантированной прибыли с некоторой доверительной вероятностью.

Процесс извлечения спекулятивной прибыли рассматривается на примере пункта обмена валют. Пусть в начальный момент времени пункт обмена валют обладает некоторой суммой денег. Предположим, что у данной организации существует возможность как купить, так и продать любое количество валюты по некоторой цене. Назовем эту цену *ценой обмена* и пусть она равна $c(t)$ в некоторый момент времени t. Тогда часть денег в начальный момент времени $t_0 = 0$ обменивается на валюту по цене $c(t_0) = c^*$ на валютном рынке. Затем обменный пункт выставляет свои цены на покупку и продажу, которые, соответственно, меньше и больше, чем c^*. При этом цены покупки и продажи пункта обмена валют должны быть определены таким образом, чтобы к концу отчетного периода получить максимально возможную прибыль от проведенных операций.

Разницу между ценой покупки и ценой продажи будем называть маржей (*margin*). Отклонение цены покупки от цены обмена будем называть спрэдом покупки (*buy spread*), а отклонение цены обмена от цены продажи – спрэдом продажи (*sell spread*).

Опишем формально рассматриваемую модель. Определим при $\tau \geq 0$ случайные процессы

$$M(\tau) = u + c^+ \sum_{j=1}^{N^+(\tau)} X_j^+ - c^- \sum_{j=1}^{N^-(\tau)} X_j^-$$

и

$$G(\tau) = v - \sum_{j=1}^{N^+(\tau)} X_j^+ + \sum_{j=1}^{N^-(\tau)} X_j^-,$$

причем $\sum_{j=1}^{0}(\cdot) = 0$. Здесь $u \geq 0$ имеет смысл начального капитала пункта обмена валют, величина $v \geq 0$ определяет начальный объем имеющейся валюты, положительные числа c^+ и c^- имеют смысл цены продажи и цены покупки валюты обменным пунктом, соответственно, неотрицательные случайные величины X_k^+ и X_l^- – это количество валюты, проданной k-тому клиенту и купленной у l-того клиента, соответственно, а целочисленные случайные процессы $N^+(\tau)$ и $N^-(\tau)$ определяют количество клиентов, пришедших в пункт обмена валют для того, чтобы купить или продать валюту. Везде далее предполагается, что все перечисленные случайные величины и процессы являются независимыми, а последовательности $\{X_n^+\}_{n\geq 1}$ и $\{X_n^-\}_{n\geq 1}$ состоят из одинаково распределенных случайных величин. Таким образом, процессы $M(\tau)$ и $G(\tau)$ характеризуют капитал компании и объем имеющейся валюты в некоторый момент времени.

Везде далее будем представлять числа c^+ и c^- в виде

$$c^+ = c^* + \delta^+, \qquad c^- = c^* - \delta^-,$$

где $\delta^+ \geq 0$ и $\delta^- \geq 0$ – это спрэд продажи и спрэд покупки соответственно.

Заметим, что при увеличении цены продажи c^+ количество клиентов, желающих купить у обменного пункта валюту, в среднем за единицу времени должно уменьшиться или, другими словами, должна уменьшиться интенсивность потока клиентов-покупателей. С другой стороны, очевидно, при приближении цены продажи к цене c^*, интенсивность потока клиентов должна увеличиться. Таким образом, вполне разумным предположением является обратная зависимость интенсивности потока клиентов, покупающих валюту, от разницы δ^+ между ценой продажи и ценой обмена. Аналогичные рассуждения относятся и к зависимости среднего за единицу времени числа клиентов, продающих валюту обменному пункту, от δ^-.

Выше мы предположили, что обменный пункт имеет возможность в любой момент времени обменять валюту на рубли по цене $c(\tau)$. В этом случае суммарные активы компании к некоторому моменту времени можно представить в рублевом эквиваленте в следующем виде:

$$M(\tau)+c(\tau)G(\tau)=u+c(\tau)v+\delta^+\sum_{j=1}^{N^+(\tau)}X_j^+ +\delta^-\sum_{j=1}^{N^-(\tau)}X_j^- +\Delta\left(\sum_{j=1}^{N^-(\tau)}X_j^- - \sum_{j=1}^{N^+(\tau)}X_j^+\right),$$

где $\Delta(\tau)=c(\tau)-c^*$

Объектом дальнейшего изучения является распределение случайной величины

$$R(\tau)=\delta^+\sum_{j=1}^{N^+(\tau)}X_j^+ +\delta^-\sum_{j=1}^{N^-(\tau)}X_j^- +\Delta(\tau)\left(v+\sum_{j=1}^{N^-(\tau)}X_j^- - \sum_{j=1}^{N^+(\tau)}X_j^+\right),$$

которая выражает прибыль обменного пункта от его деятельности. Причем, первые два слагаемых характеризуют прибыль, которую получает обменный пункт от своей непосредственной деятельности, а третье слагаемое показывает прибыль связанную с изменчивостью во времени курса валюты.

Целью обменного пункта является определение δ^+ и δ^- таким образом, чтобы прибыль от совершенных операций была в некотором смысле максимальной. Для поиска оптимальных спрэдов покупки/продажи были сформулированы следующие задачи:

Задача 1. Определить δ^+ и δ^- таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль:

$$\mathsf{E}R\to\max_{\delta^+,\delta^-}; \tag{2}$$

Задача 2. Найти значения δ^+ и δ^-, обеспечивающие для некоторого $r\ge 0$ и близкой к единице величины γ соотношение

$$\mathsf{P}(R\ge r)\ge\gamma, \tag{3}$$

то есть требуется найти курсы покупки и продажи валюты, которые дают возможность получить заданную прибыль с достаточно большой вероятностью. Кроме того, соотношение (3) дает возможность оценить величину гарантированной прибыли при заданных значениях δ^+ и δ^-.

В данной главе рассматриваются несколько частных случаев описанной выше общей постановки задачи.

Случай неоднородных потоков клиентов. Предположим, во-первых, что *цена обмена* не изменяется во времени, то есть $c(\tau)=c^*,\forall\tau\ge 0$. Во-вторых, мы будем предполагать, что $N^+(\tau)$ и $N^-(\tau)$ являются дважды стохастическими пуассоновскими процессы (процессы Кокса), управляемые процессами $\Lambda^+(\tau)$ и $\Lambda^-(\tau)$ соответственно. Данное предположение дает возможность построения более реалистичных моделей, так как существуют сезонные колебания спроса как на покупку, так и на продажу валюты (например, в будние дни сделок совершается меньше, нежели в выходные), а также существуют различные случайные всплески интенсивности (например, связанные с выходом новостей, изменяющих стоимость валюты относительно рубля).

Величина прибыли компании в некоторый момент времени t будет выражаться формулой

$$R(t)=\delta^+\sum_{j=1}^{N^+(t)}X_j^+ +\delta^-\sum_{j=1}^{N^-(t)}X_j^-.$$

Введем новые обозначения

$$Y^+=\delta^+\sum_{j=1}^{N^+(t)}X_j^+,\qquad Y^-=\delta^-\sum_{j=1}^{N^-(t)}X_j^-.$$

Тогда

$$R(t) \stackrel{d}{=} Y^+ + Y^-.$$

Везде далее для этого случая мы будем предполагать, что $\delta^+ = \delta^- = \delta$, то есть ситуация на валютном рынке достаточно стабильна.

Решим поставленные ранее задачи 1 и 2 для данного случая. Для этого дополнительно предположим, что $\mathsf{E}\Lambda^+(t) = \lambda^+ t$ и $\mathsf{E}\Lambda^-(t) = \lambda^- t$. Тогда ожидаемая прибыль компании будет равна

$$\mathsf{E}R(t) = \delta t \cdot \left(\lambda^+ \mu_1^+ + \lambda^- \mu_1^-\right).$$

При решении задачи 2 возникают вполне очевидные затруднения, поскольку даже для простейших видов распределений случайных величин X_1^+ и X_1^- и в предположении, что интенсивности потоков клиентов постоянны, то есть $N^+(\tau)$, $N^-(\tau)$ являются пуассоновскими процессами, вычисление функции распределения $R(t)$ в явном виде представляется крайне затруднительным. Поэтому для оценки функции распределения $R(t)$ используется теорема 2 и свойство регулярности равномерной метрики (см. [[12]]).

Таким образом, получаем верхние и нижние оценки для гарантированной прибыли:

$$r_1 = (a^+\lambda^+ + a^-\lambda^-)\delta t + \sqrt{\left[(D^+)^2 + (D^-)^2\right] t} \cdot u\left(1 - \gamma + \frac{K^+ + K^-}{\sqrt{t}}\right),$$

$$r_2 = (a^+\lambda^+ + a^-\lambda^-)\delta t + \sqrt{\left[(D^+)^2 + (D^-)^2\right] t} \cdot u\left(1 - \gamma - \frac{K^+ + K^-}{\sqrt{t}}\right),$$

где

$$D^+ = \sqrt{\left[\lambda^+\left((a^+)^2 + (\sigma^+)^2\right) + (a^+)^2 (s^+)^2\right]\delta^2}, \quad D^- = \sqrt{\left[\lambda^-\left((a^-)^2 + (\sigma^-)^2\right) + (a^-)^2 (s^-)^2\right]\delta^2}.$$

$$K^+ = \kappa^+ + \inf_{\epsilon \in (0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3^+}{\sqrt{(1-\epsilon)\lambda^+}} + \frac{s^+}{\lambda^+}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\right\},$$

$$K^- = \kappa^- + \inf_{\epsilon \in (0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3^-}{\sqrt{(1-\epsilon)\lambda^-}} + \frac{s^-}{\lambda^-}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\right\},$$

для $\gamma \in (0,1)$ символом $u(\gamma)$ обозначается γ-квантиль стандартного нормального закона.

Случай однородных потоков клиентов. Как и для случая неоднородного потока клиентов получены двусторонние оценки для гарантированной прибыли в смысле задачи 2. Пусть N^+ и N^- – проекции процессов $N^+(\tau)$ и $N^-(\tau)$ в момент времени t. Предположим, что случайные величины N^+ и N^- имеют пуассоновское распределение с параметрами λ^+ и λ^-. Также предположим, что *цена обмена* не изменяется во времени, то есть $c(t) = c^*, \forall t \geq 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} u\left(1 - \gamma - C_0 \frac{\lambda^+\mu_3^+ + \lambda^-\mu_3^-}{\left(\lambda^+\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-\right)^{3/2}}\right)\delta\sqrt{\lambda^+\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-} + \\ + \left(\lambda^+\mu_1^+ + \lambda^-\mu_1^-\right)\delta \leq r \leq \left(\lambda^+\mu_1^+ + \lambda^-\mu_1^-\right)\delta + \\ + u\left(1 - \gamma + C_0 \frac{\lambda^+\mu_3^+ + \lambda^-\mu_3^-}{\left(\lambda^+\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-\right)^{3/2}}\right)\delta\sqrt{\lambda^+ 2\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-}. \end{aligned} \tag{4}$$

[12] *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986., стр. 73-75

при выполнении ограничений:

$$C_0 \frac{\lambda^+\mu_3^+ + \lambda^-\mu_3^-}{\left(\lambda^+\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-\right)^{3/2}} - \gamma < 0\ , \quad 1 - \gamma - C_0 \frac{\lambda^+\mu_3^+ + \lambda^-\mu_3^-}{\left(\lambda^+\mu_2^+ + \lambda^-\mu_2^-\right)^{3/2}} > 0.$$

Этот результат дает возможность определить пределы будущей прибыли при установленной δ и известных моментах μ_k^+ и μ_k^- $(1 \le k \le 3)$, которые могут быть оценены статистически. Заметим также, что неравенство (4) можно уточнить, имея дополнительную информацию о моментах μ_k^+ и μ_k^- $(k \ge 4)$, применив, например, теорему 1.5.1 из [13].

При поиске оптимального значения δ в задачах 1 и 2, необходимы дополнительные предположения о виде зависимости среднего количества клиентов, которые хотят купить/продать валюту, от δ. Поскольку в различных условиях функция спроса на товар имеет разный вид, в работе рассматриваются несколько модельных примеров зависимостей интенсивностей потоков клиентов λ^+ и λ^- от величины δ: случай линейной, обратно-пропорциональной, экспоненциальной и гауссовской зависимости. Для каждого из случаев при конкретных значениях параметров найдены оптимальные значения δ в смысле задачи 1 и 2 или показано, что оптимумов несколько.

Третья глава. В третьей главе выводится уравнение для значения начального капитала, минимизирующего средние издержки страховой компании, склада, пункта обмена валют. В предположении, что поток заявок (клиентов, страховых требований) является процессом Кокса, на основании оценок, полученных в первой главе, строятся двусторонние оценки для решения упомянутого уравнения. Рассматривается критерий оптимальности, связанный как с возможностью инвестирования собственного капитала в прибыльные проекты, так и с возможностью, в необходимых случаях, пользоваться кредитами.

Предположим, что в некоторой организации в начальный момент времени $t = 0$ имеется u единиц некоторого ресурса. На протяжении интервала времени $[0, T]$ в данную организацию поступают требования двух видов: во-первых, требования на выдачу данного ресурса, во-вторых, требования о принятии на хранение этого же ресурса. Предположим, что $S(t)$ – величина чистых списаний ресурса из организации к моменту времен t. Тогда, $u - S(t)$ – величина текущего остатка ресурса в организации. Требуется найти оптимальное в некотором смысле значение начального остатка в организации.

Для решения поставленной выше задачи введем следующие функций издержек, связанные с величиной u. Пусть $c_1(t)$ – издержки, связанные с хранением избыточного резерва. Избыточность понимается в смысле положительности величины $\mathsf{E}(u - S(t))^+$ (здесь мы используем стандартное обозначение $x^+ = \max\{0, x\}$). Пусть $c_2(t)$ – издержки, выраженные в недостатке ресурса. Недостаток понимается в смысле положительности величины $\mathsf{E}(S(t) - u)^+$.

Тогда функция суммарных издержек организации имеет следующий вид:

$$D(u) = \int\limits_0^T c_1(t) \cdot \mathsf{E}(u - S(t))^+ \, dt + \int\limits_0^T c_2(t) \cdot \mathsf{E}(S(t) - u)^+ \, dt.$$

Необходимо найти такое u_0, что

$$D(u_0) = \min_{u \ge 0} D(u). \tag{5}$$

[13] *Бенинг В. Е., Королев В. Ю.* Введение в математическую теорию риска. — М.: МАКС-Пресс, 2000.

В работе показано, что поиск минимума в (5) эквивалентен отысканию решения уравнения

$$\int\limits_0^T [c_1(t) + c_2(t)]\, \mathsf{P}(S(t) < u)\, dt = \int\limits_0^T c_2(t)\, dt.$$

При предположении, что функции издержек первого и второго рода не зависят от времени (данное предположение справедливо только для относительно коротких временных интервалов), то есть $c_1(t) = c_1$, $c_2(t) = c_2$, где c_1 и c_2 – константы и пусть $\delta = \frac{c_2}{(c_1+c_2)}$. получаем, что для нахождения оптимального u_0 нужно решить уравнение

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathsf{P}(S(t) < u)\, dt = \delta. \tag{6}$$

Далее, это довольно общая постановка задачи применяется сперва для решения задачи об оптимизации резерва склада, потом для оптимизации параметров процесса риска и, наконец, для оптимизации начального капитала пункта обмена валют.

Оптимизации резерва на складе. Пусть X_i – количество единиц товара, которое должно быть поставлено (изъято со склада) в соответствии с i-ой заявкой, а $N(t)$ – количество заявок, поступивших в течение интервала времени $[0, t]$ $(0 \le t \le T)$. Тогда суммарное количество товара, которое должно быть поставлено со склада за время $[0, t]$, очевидно, имеет вид (1).

Предположим, что стандартизованная накопленная интенсивность асимптотически нормальна в том смысле, что

$$\frac{\Lambda(t) - \ell t}{s\sqrt{t}} \Longrightarrow V(t \to \infty), \text{ где } V \sim N(0, 1). \tag{7}$$

Далее предположим, что

$$\Delta_t = \sup_v \left| \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t) - \ell t}{s\sqrt{t}} < v\right) - \mathsf{P}(V < v) \right| \le \frac{\kappa}{\sqrt{t}} \tag{8}$$

Тогда двусторонние оценки для оптимального в смысле (5) начального резерва на складе имеют следующий вид

$$a\ell\left(T\delta - \frac{2}{\sqrt{2\pi}L^2} - 2K\sqrt{T}\right) \le u_0 \le a\ell\left(T\delta + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}L} + 2K\sqrt{T}\right). \tag{9}$$

где

$$K = \kappa + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \inf_{\epsilon\in(0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{(1-\epsilon)\ell}} + \frac{s}{\ell}\left(\frac{\mathsf{E}|V|}{\epsilon} + Q(\epsilon)\right)\right| \right\}.$$

$$L = \frac{a\ell}{D}, \quad D = \sqrt{\mathsf{D}S(t)} = \sqrt{a^2 s^2 + (a^2 + \sigma^2)\ell}.$$

Оптимизации параметров процесса риска. Пусть $N(t)$, $0 \le t \le T$, – число страховых выплат до момента t, а X_i – страховая выплата по $i-$му страховому случаю такие. Тогда

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j - c\Lambda(t), \quad t \ge 0, \tag{10}$$

где c имеет смысл интенсивности поступления страховых взносов (премий). Тогда величина

$$R(t) = u - S(t) = u + c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$$

имеет смысл резерва страховой компании в момент времени t.

Гарантированные оценки для начального капитала страховой компании. Предположим, что верны (7) и (8). Тогда двусторонние оценки для оптимального в смысле (5) начального капитала страховой компании представимы в виде

$$a'\left(T - T\delta + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}|L|} + 2K\sqrt{T}\right) \leq u_0 \leq a'\left(T - T\delta - \frac{2}{\sqrt{2\pi}L^2} - 2K\sqrt{T}\right). \tag{11}$$

где

$$a' = (a-c)\,\ell, \quad D' = \sqrt{\mathsf{D}R(t)}, \quad L = \frac{a'}{D'}.$$

Стратегию функционирования страховой компании разумно выбирать исходя из требования о том, чтобы в конце рассматриваемого периода резерв, имеющийся в распоряжении страховой компании $R(t)$, был достаточно велик. Это требование можно понимать по-разному. Можно, например, задать некоторое число R_0 и потребовать, чтобы

$$\mathsf{E}R(t) \geq R_0 \tag{12}$$

Можно также задать некоторое число $\gamma \in (0,1)$ (по возможности значение γ должно быть близким к единице) и $R_0 > 0$ и потребовать, чтобы

$$\mathsf{P}(R(t) \geq R_0) \geq \gamma \tag{13}$$

Гарантированные оценки для оптимальной ставки страховой премии. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 3. Определить значение величин стартового капитала u и ставки страховой премии c, гарантирующие выполнение требования (12) при условии, что средние издержки минимальны.

Решение этой задачи дается неравенством

$$c \geq a + \left(\frac{R_0}{\ell T} + \frac{D'}{\sqrt{2\pi T}}\right)\left(\delta + \frac{2K}{\sqrt{T}}\right)^{-1}. \tag{14}$$

Задача 4. Определить значение величин стартового капитала u и ставки страховой премии c, гарантирующие выполнение требования (13) при условии, что средние издержки минимальны.

Решение этой задачи дается неравенством

$$c \geq a + \left[\frac{R_0}{\ell T} + \frac{D'}{\ell\sqrt{T}}\left(n_{\gamma_T} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]\left(\delta - \frac{2K}{\sqrt{T}}\right)^{-1}, \tag{15}$$

Гарантированные оценки для времени достижения желаемого значения резерва. Неравенство (11) позволяет поставить еще две задачи и получить оценки для их решений.

Задача 5. При заданной ставке страховых премий c найти такое T_0, чтобы для $T \geq T_0$ было выполнение условие (12) при условии, что средние издержки минимальны.

Решение этой задачи дается неравенством

$$T \geq \frac{1}{4\delta^2}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}(c-a)\ell}+2K\right)^2+\frac{4\delta R_0}{(c-a)\ell}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}(c-a)\ell}+2K\right)\right]^2.$$

Задача 6. При заданной ставке страховых премий c найти такое T_0, чтобы для $T \geq T_0$ было выполнено условие 13) при условии, что средние издержки минимальны.

Решение этой задачи дается неравенством

$$T \geq \tfrac{1}{4(\delta(c-a)\ell)^2}\left[\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}(c-a)\ell}+2K+n_{\gamma_T}D'\sqrt{T}\right)^2((c-a)\ell)^2+4\delta R_0(c-a)\ell}+\right.$$
$$\left.+(c-a)\ell\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}(c-a)\ell}+2K+n_{\gamma_T}D'\sqrt{T}\right)\right]^2.$$

Четвертая глава. В четвертой главе оценки скорости сходимости распределений обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов, полученные в первой главе, применяются к построению гарантированных двусторонних оценок надежности модифицируемых технических и информационных систем. Также находятся ожидаемые значения надежности и оценки для среднего времени жизни системы в рамках экспоненциальных, логистических и гиперболических моделей изменения надежности модифицируемых систем с непрерывным временем.

Пусть в каждый момент времени t надежность системы можно характеризовать параметром $P(t)$ – вероятностью того, что на сигнал, поданный на вход системы в момент t, система отреагирует правильно. По смыслу такая характеристика надежности ближе всего к традиционно используемому *коэффициенту готовности*. В случайные моменты времени $Y_0 = 0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots$ в систему вносятся (мгновенные) модификации, в результате чего изменяется параметр $P(t)$. Предположим, что траектории процесса $P(t)$ непрерывны справа и кусочно-постоянны, так что $P(t) = P(Y_j)$ при $t \in [Y_j, Y_{j+1})$, $j \geq 1$.

Задача прогнозирования поведения процесса $P(t)$ чрезвычайно важна. Описанная выше очень общая схема может быть переформулировала в терминах, традиционных для столь разных областей знания, как медицина, программирование или менеджмент. Более подробно об этом см. в книгах [[14], [7], [8]]

Предположим, что точки $\{Y_0 = 0, Y_1, Y_2, \ldots\}$, в которые осуществляются модификации системы, образуют дважды стохастический пуассоновский точечный процесс , управляемый некоторым процессом $\Lambda(t)$. Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что $\mathsf{E}\Lambda(t) \equiv t$. Это предположение можно интерпретировать и как то, что управляющий процесс в среднем пропорционален времени, и (что существенно важно для построения предельных аппроксимаций) как то, что задача параметризована математическим ожиданием управляющего процесса.

Неоднородные экспоненциальные модели с непрерывным временем. Пусть $\{(\theta_j, \eta_j)\}_{j\geq 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов таких, что

$$0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad 0 \leq \eta_1 \leq 1 \ \text{ почти наверное.}$$

[14] *Королев В. Ю.* Вероятностные модели. Введение в асимптотическую теорию случайного суммирования. — М.: МАКС Пресс, Москва, 1997.

Отметим, что независимость θ_j и η_j внутри каждой пары равно как и совпадение распределений θ_j и η_j внутри каждой пары не предполагается. Однако мы будем считать, что последовательность пар $\{(\theta_j, \eta_j)\}_{j\geq 1}$ стохастически независима от точечного случайного процесса $Y_1, Y_2, \ldots$

Задав начальную надежность p_0, рассмотрим модель, определяемую рекуррентным соотношением

$$P(Y_{j+1}) = \theta_{j+1}P(Y_j) + \eta_{j+1}\big(1 - P(Y_j)\big), \quad j \geq 0. \tag{16}$$

Эта модель называется неоднородной *экспоненциальной* моделью с непрерывным временем. В такой модели случайные величины θ_j описывают возможное уменьшение надежности из-за некачественных модификаций, в ходе которых вместо исправления существующих дефектов в систему могут быть внесены новые, в то время как величины η_j описывают повышение надежности за счет исправления дефектов. Частные случаи модели (16) с двухточечными распределениями случайных величин θ_j и η_j и дискретным временем рассматривались в книгах [15, 16]. В свою очередь, эти частные случаи представляют собой переформулировку в терминах теории надежности одной модели обучаемости, рассмотренной в книге [17].

Обозначим $\mathsf{E}\theta_1 = 1 - a$, $\mathsf{E}\eta_1 = b$.

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 4. *Для любого* $t > 0$

$$\mathsf{E}P(t) = \frac{b}{a+b} + \Big(p_0 - \frac{b}{a+b}\Big)\mathsf{E}e^{-(a+b)\Lambda(t)}.$$

Из теоремы 4 вытекает, что, если $\mathsf{E}e^{-(a+b)\Lambda(t)} \to 0$ при $t \to \infty$ (что может иметь место, если, к примеру, $\Lambda(t) \to \infty$ по вероятности при $t \to \infty$), то в зависимости от знака величины $c = (a+b)p_0 - b$ ожидаемая надежность системы либо возрастает (если $c < 0$), либо убывает (если $c > 0$). Однако в любом случае справедливо

Следствие 2. Пусть $\Lambda(t) \to \infty$ по вероятности при $t \to \infty$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}P(t) = \frac{b}{a+b}.$$

В силу неотрицательности и ограниченности случайных величин θ_j из следствия 2 в свою очередь вытекает

Следствие 3. Пусть $\Lambda(t) \to \infty$ по вероятности при $t \to \infty$. Соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}P(t) = 1$$

имеет место в том и только в том случае, когда $\mathsf{P}(\theta_1 = 1) = 1$.

Другими словами, в рамках экспоненциальной модели абсолютная надежность может быть достигнута только за счет идеально правильных модификаций, в ходе которых полностью исключена возможность внесения каких-либо новых дефектов.

---

[15] *Волков Л. И., Шишкевич А. М.* Надежность летательных аппаратов. —- М.:ВШ, 1975.
[16] *Волков Л. И.* Управление эксплуатацией летательных комплексов. — М.: ВШ, 1981.
[17] *Буш Р., Мостеллер Ф.* Стохастические модели обучаемости. — М.: ГИФМЛ, 1962.

Следствие 4. Пусть $\Lambda(t) \equiv t$, то есть $N(t)$ – стандартный пуассоновский процесс. Тогда для любого $t > 0$

$$\mathsf{E}P(t) = \frac{b}{a+b} + \Big(p_0 - \frac{b}{a+b}\Big)e^{-(a+b)t}.$$

Рассмотрим ситуацию, когда $\theta_j = 1$ почти наверное, более подробно. В этом случае соотношение (16) можно переписать в виде

$$1 - P(Y_{j+1}) = (1 - \eta_{j+1})\big(1 - P(Y_j)\big), \quad j \geq 1. \tag{17}$$

Обозначим $\log(1 - \eta_j) = \zeta_j$. Тогда из (17) получаем

$$\log\big(1 - P(t)\big) - \log(1 - p_0) = \sum_{k=1}^{N(t)} \zeta_k. \tag{18}$$

В правой части представления (18) стоит обобщенный дважды стохастический пуассоновский процесс (обобщенный процесс Кокса). Это обстоятельство позволяет воспользоваться предельными теоремами для обобщенных процессов Кокса для уточнения асимптотического поведения надежности системы в рамках неоднородной экспоненциальной модели с непрерывным временем.

Предположим, что $0 < \mathsf{D}\zeta_j = \sigma^2 < \infty$, и обозначим $\mathsf{E}\zeta_j = \alpha$. Заметим, что, так как $0 \leq \eta_j \leq 1$, то $\alpha \leq 0$. В дополнение к условию $\mathsf{E}\Lambda(t) \equiv t$, введенному выше, предположим, что $\mathsf{D}\Lambda(t) \equiv s^2 t$ для некоторого $s \in [0, \infty)$.

Дополнительно предположим, во-первых, что $\mathsf{E}|\zeta_1|^3 < \infty$, и обозначим

$$\beta^3 = \mathsf{E}|\zeta_1|^3, \quad L_3 = \frac{\beta^3}{(\alpha^2 + \sigma^2)^{3/2}}.$$

Во-вторых, предположим, что выполнено соотношение

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t) - t}{s\sqrt{t}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{\kappa}{\sqrt{t}}$$

при некотором $\kappa \in (0, \infty)$.
Обозначим

$$K = K(L_3, s^2, \kappa) = \kappa + \inf_{\epsilon \in (0,1)} \left\{ \frac{C_0 L_3}{\sqrt{1-\epsilon}} + \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\epsilon} + sM(\epsilon) \right\}.$$

Тогда нижняя гарантированная доверительная граница $\underline{z}_\gamma(t)$ для $P(t)$ с коэффициентом доверия γ имеет вид:

$$\underline{z}_\gamma(t) = 1 - \exp\big\{\alpha t + \sqrt{t[\alpha^2(1+s^2) + \sigma^2]} \cdot u\big(\gamma + K/\sqrt{t}\big) + \log(1 - p_0)\big\},$$

где для $\gamma \in (0,1)$ символом $u(\gamma)$ обозначается γ-квантиль стандартного нормального распределения. При этом при каждом $t > 0$

$$\mathsf{P}\big(P(t) > \underline{z}_\gamma(t)\big) \geq \gamma.$$

Найдем гарантированную доверительную полосу $\big\{\big(z_\gamma^{(1)}(t),\, z_\gamma^{(2)}(t)\big) \,:\, t > 0\big\}$ для $P(t)$ с коэффициентом доверия γ, которая понимается в следующем смысле: при каждом $t > 0$

$$\mathsf{P}\big(z_\gamma^{(1)}(t) \leq P(t) \leq z_\gamma^{(2)}(t)\big) \geq \gamma.$$

Она задается выражениями

$$z_\gamma^{(1)}(t) = 1 - \exp\big\{\alpha t + u\big(\tfrac{1}{2}(\gamma + 1 + 2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2) + \sigma^2]} + \log(1 - p_0)\big\},$$

$$z_\gamma^{(2)}(t) = 1 - \exp\left\{\alpha t - u\left(\tfrac{1}{2}(\gamma + 1 + 2K/\sqrt{t})\right)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log(1-p_0)\right\}.$$

Неоднородные логистические модели с непрерывным временем. Обозначим

$$Q(Y_j) = \frac{P(Y_j)}{1 - P(Y_j)}, \quad j \geq 1.$$

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Будем считать, что последовательность $\{(\theta_j\}_{j\geq 1}$ стохастически независима от точечного случайного процесса $Y_1, Y_2, \ldots$

Предположим, что

$$Q(Y_{j+1}) = \theta_{j+1} Q(Y_j), \quad j \geq 0. \tag{19}$$

Эту модель изменения надежности, называемую *логистической*, можно интерпретировать следующим образом. Если $p_j = P(Y_j)$ – вероятность успеха в последовательности испытаний Бернулли, то величина $q_j = p_j/(1-p_j)$ характеризует ожидаемый номер испытания, заканчивающегося первой неудачей в рассматриваемой последовательности испытаний Бернулли. Таким образом, величина $Q(Y_j) = q_j$ характеризует ожидаемое время жизни (безотказной работы) системы после j-ой модификации, как если бы после момента Y_j в нее не вносились бы никакие изменения. Следовательно, соотношение (19) можно интерпретировать как формализацию того, что каждая модификация системы изменяет ожидаемое время безотказной работы после модификации в случайное число раз. Положим

$$Q(t) = Q(Y_{N(t)}), \qquad t > 0.$$

Обозначим $\mathsf{E}\theta_1 = a$. Пусть p_0 – надежность системы в момент $t = 0$. Обозначим

$$q_0 = \frac{p_0}{1 - p_0},$$

Теорема 5. *В рамках неоднородной логистической модели справедливо соотношение*

$$\mathsf{E}Q(t) = q_0 \mathsf{E}e^{(a-1)\Lambda(t)}, \quad t > 0.$$

Следствие 5. В рамках неоднородной логистической модели справедливо соотношение

$$\mathsf{E}P(t) \leq \frac{q_0 \mathsf{E}e^{(a-1)\Lambda(t)}}{1 + q_0 \mathsf{E}e^{(a-1)\Lambda(t)}}, \quad t > 0.$$

Следствие 6. Если $N(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, то в рамках неоднородной логистической модели при любом $t > 0$ справедливы соотношения

$$\mathsf{E}Q(t) = q_0 \mathsf{E}e^{(a-1)t}, \qquad \mathsf{E}P(t) \leq \frac{q_0 e^{(a-1)t}}{1 + q_0 e^{(a-1)t}}.$$

Обозначим $\log\theta_j = \chi_j$. Тогда из (19) получаем соотношение

$$\log Q(Y_j) - \log q_0 = \sum_{k=1}^{j} \chi_k,$$

откуда вытекает, что

$$\log Q(t) - \log q_0 = \sum_{k=1}^{N(t)} \chi_k.$$

Предположим, что $\mathsf{E}\chi_j = \alpha$, $0 < \mathsf{D}\chi_j \equiv \sigma^2 < \infty$ и обозначим $\beta^3 = \mathsf{E}|\chi_1|^3 < \infty$.

Тогда гарантированная нижняя доверительная граница для надежности системы $P(t)$ в рамках модели (19), которая для заданного коэффициента доверия $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1)$ имеет вид

$$\underline{z}_\gamma(t) = \frac{\exp\{\underline{x}_\gamma(t)\}}{1+\exp\{\underline{x}_\gamma(t)\}},$$

где

$$\underline{x}_\gamma(t) = \alpha t + u\big(1-\gamma-K/\sqrt{t}\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log q_0.$$

При этом при каждом $t > 0$

$$\mathsf{P}\big(P(t) > \underline{z}_\gamma(t)\big) \geq \gamma.$$

Гарантированная доверительная полоса в рамках логистической модели (19) задается следующими выражениями

$$z_\gamma^{(1)}(t) = \frac{\exp\big\{\alpha t - u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log q_0\big\}}{1+\exp\big\{\alpha t - u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log q_0\big\}},$$

$$z_\gamma^{(2)}(t) = \frac{\exp\big\{\alpha t + u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log q_0\big\}}{1+\exp\big\{\alpha t + u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + \log q_0\big\}}.$$

Неоднородные гиперболические модели с непрерывным временем. Рассмотрим модель

$$Q(Y_{j+1}) = Q(Y_j) + \theta_{j+1}, \quad j \geq 0. \tag{20}$$

Эту модель изменения надежности, называемую *гиперболической*, можно интерпретировать как формализацию того, что каждая модификация системы изменяет ожидаемое время ее безотказной работы после модификации на случайное время. Как и ранее, полагаем

$$Q(t) = Q(Y_{N(t)}), \qquad t > 0.$$

Обозначим $\mathsf{E}\theta_1 = \alpha$. Пусть, как и ранее, p_0 – надежность системы в момент $t = 0$, $q_0 = p_0/(1-p_0)$.

Из рекуррентного соотношения (20) следует, что

$$Q(t) = q_0 + \sum_{j=0}^{N(t)} \theta_j, \quad t > 0.$$

Предположим, что $\beta^3 = \mathsf{E}|\theta_1|^3 < \infty$

Запишем гарантированную нижнюю доверительную границу для надежности системы $P(t)$ в рамках модели (20), которая для заданного коэффициента доверия $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1)$ имеет вид

$$\underline{z}_\gamma(t) = \frac{\underline{x}_\gamma(t)}{1+\underline{x}_\gamma(t)},$$

где

$$\underline{x}_\gamma(t) = \alpha t + u\big(1-\gamma-K/\sqrt{t}\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + q_0.$$

При этом при каждом $t > 0$

$$\mathsf{P}\big(P(t) > \underline{z}_\gamma(t)\big) \geq \gamma.$$

Гарантированная доверительная полоса в рамках гиперболической модели (20) имеет вид

$$z_\gamma^{(1)}(t) = \frac{\alpha t - u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + q_0}{1+\alpha t - u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + q_0},$$

$$z_\gamma^{(2)}(t) = \frac{\alpha t + u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + q_0}{1+\alpha t + u\big(\frac{1}{2}(\gamma+1+2K/\sqrt{t})\big)\sqrt{t[\alpha^2(1+s^2)+\sigma^2]} + q_0}.$$

Список публикаций автора по теме диссертации

Научные статьи

1. *Артюхов С. В., Базюкина О. А., Королев В. Ю., Кудрявцев А. А.* Модель оптимального ценообразования, основанная на процессах риска со случайными требованиями // Системы и средства информатики, 2005. Специальный выпуск. С. 207-224.

2. *Artyukhov S., Bazyukina O., Korolev V., Kudryavtsev A.* On optimization in a demand and supply problem. // Transactions of the XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Maiori/Salerno, Italy, 20-24 September 2005. University of Salerno, P. 25–31.

3. *Артюхов С. В.* Применение асимптотических свойств пуассоновских случайных сумм в одной задаче оптимизации резерва // Системы и средства информатики, 2006. Специальный выпуск. С. 238-248.

4. *Артюхов С. В., Базюкина О. А., Королев В. Ю., Кудрявцев А. А., Шевцова И. Г.* Об оптимизации спекулятивной прибыли на примере пункта обмена валют // Актуарий, 2008. No 1. С. 50–56.

5. *Артюхов С. В., Жалыбина И. Я., Пузановский А. А.* О методе оптимизации прибыли маркет-мейкера // Управление финансовыми рисками, 2008. Вып. 2. С. 35-48.

6. *Артюхов С. В., Королев В. Ю.* Оценки скорости сходимости распределений обобщенных дважды стохастических пуассоновских процессов с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008. Т. 15, Вып. 6. С. 988–998.

7. *Артюхов С. В. Королев В. Ю.*. Неоднородные рекуррентные модели изменения надежности модифицируемых систем. Непрерывное время. // Информатика и ее применения, 2008. Т. 2. Вып. 4. С. 57-65.

8. *Артюхов С. В.* Оценки скорости сходимости распределений экстремумов обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним к сдвиговым смесям нормальных законов // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 69-74.

Тезисы докладов и конференций

9. *Артюхов С. В., Базюкина О. А., Кудрявцев А. А.* О методе расчета курсов покупки и продажи валюты обменным пунктом. // Материалы международной конференции студентов, аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2005», 2005. Секция ВМиК. С. 6-8.

10. *Артюхов С. В.* Об определении оптимального количества рублевых и валютных средств в обменном пункте. // Материалы международной конференции студентов, аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2006», 2006. Секция ВМиК. С. 6-8.