

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Кафедра вычислительных методов

На правах рукописи

Никольский Илья Михайлович

**РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ,
РАЗВИВАЮЩИЕСЯ В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ.**

05.13.18 – "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ"

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Москва-2009

Работа выполнена в лаборатории математического моделирования в физике факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
Куркина Елена Сергеевна

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Малинецкий Георгий Геннадьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент Свирцевский Сергей Ростиславович

Ведущая организация:

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Защита состоится «20» мая 2009 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМиК, ауд.685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан « » _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43,
доктор физико-математических наук,
профессор

Захаров Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В системах разной природы встречаются сверхбыстрые процессы, в которых исследуемая величина за некоторый промежуток времени возрастает на несколько порядков. Другими словами, имеет место взрывной рост исследуемой величины.

В качестве примеров можно привести быстрое сжатие вещества (коллапс) в физике, вспышки инфекционных заболеваний в эпидемиологии, некоторые процессы в химической кинетике и т.д.

Математически такие явления могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений, допускающих решения, *растущие в режиме с обострением*. Это решения, которые в конечный момент времени (*момент обострения*) обращаются в бесконечность на некотором множестве точек пространства. Их также называют *неограниченными* или *взрывными* (blow-up solutions в англоязычной литературе, см. [1]).

Теория режимов с обострением является интенсивно развивающейся областью математики. Об этом свидетельствует увеличивающееся число работ на эту тему.

Многие модели, в которых решения могут расти в режиме с обострением, не учитывают факторы, ограничивающие рост исследуемой функции вблизи момента обострения (конечность ресурсов и т.д.). Однако такие модели позволяют понять и изучить существенные, наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются вплоть до момента обострения.

Интерес к решениям, растущим в режиме с обострением, возник в середине XX века. В нашей стране их начали изучать в связи с исследованиями в области термоядерного горения плазмы. Большой вклад в эту работу внесли сотрудники Института прикладной математики РАН и кафедры вычислительных методов факультета ВМиК МГУ, работавшие под руководством А.А. Самарского и С.П. Курдюмова.

В основе базовой модели, изучавшейся в школе Самарского-Курдюмова, лежит уравнение нелинейной теплопроводности. В общем виде оно выглядит следующим образом:

$$u_t = \operatorname{div}(k(u) \operatorname{grad} u) + Q(u). \quad (1)$$

Здесь $u \geq 0$ – температура, $k(u) \geq 0$ – коэффициент теплопроводности, $Q(u)$ – источник или сток тепла (в зависимости от знака функции).

При определенных условиях это уравнение описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическую фильтрацию газов и жидкостей в пористых средах, диффузию нейтронов и альфа-частиц; оно также возникает при математическом моделировании процессов химической кинетики, различного рода биохимических реакций, процессов роста и миграции популяций и т.д. Для моделирования разных процессов используются различные виды зависимостей $k(u)$ и $Q(u)$.

Весьма много внимания в литературе уделялось изучению уравнения со степенными нелинейностями:

$$u_t = \operatorname{div}(k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u) + q_0 u^\beta, \text{ где } \sigma \geq 0, \beta > 0, k_0 > 0. \quad (2)$$

Здесь $u = u(\bar{x}, t)$, $\bar{x} \in R^N$. Это уравнение имеет широкий спектр приложений. В частности, при $\sigma = 2.5$, $\beta \leq 5.2$ оно описывает термоядерное горение в плазме с электронной теплопроводностью; при $\sigma = 0$, $2 \leq \beta \leq 3$ соответствует моделям автокаталитических процессов с диффузией в химических реакторах; при σ около 6.5 описывает процесс радиационной теплопроводности высокотемпературной плазмы в звездах. Недавно это

уравнение нашло новое применение. Было показано, что оно описывает глобальную эволюцию человеческого общества. В этом случае искомая функция $u(\bar{x}, t)$ интерпретируется как плотность населения [2].

Доказано, что уравнение (2) имеет решения, развивающиеся в режиме с обострением (см.[1]). При определенных условиях наблюдается явление локализации тепла, возникают нестационарные диссипативные структуры – области интенсивного горения, локализованные в пространстве.

В зависимости от соотношения между параметрами σ и β возможны три типа режимов с обострением: так называемые HS , S или LS -режимы. Они отличаются друг от друга тем, на каком множестве решения уравнения (2) обращаются в бесконечность (во всем пространстве, в замкнутой области или в одной точке). Было показано ([1]), что при $\beta \geq \sigma + 1$ имеет место локализация тепла. Выделено два типа локализации: *строгая* - когда решение остается равным нулю вне некоторого замкнутого множества; *эффективная* - когда множество точек пространства, в которых решение обращается в бесконечность, ограничено.

Особенно интересным является случай LS -режима, который реализуется при $\beta > \sigma + 1$. При этом соотношении параметров возможно образование не только простых, но и сложных диссипативных структур, имеющих несколько локальных максимумов. Именно этот случай рассматривается в предлагаемой работе.

В двумерном случае структуры описываются неограниченными автомодельными решениями уравнения со степенными нелинейностями вида.

$$u(r, \varphi, t) = g(t)\Theta(\xi, \varphi),$$

где ξ - автомодельная переменная. Важная роль автомодельных решений была выявлена в одномерном случае в работе [3]. Было показано, что они играют роль аттракторов, к которым по некоторой норме приближаются другие неограниченные решения уравнения (2), отвечающие произвольным начальным данным.

Функция $\Theta(\xi, \varphi)$ является решением краевой задачи на собственные функции (СФ) и собственные значения для нелинейного уравнения эллиптического типа. Известно, что эта задача (которую также называют автомодельной задачей) имеет множество решений, состоящее более чем из одного элемента (т.е. решение неединственно). Функции, входящие в это множество, описывают простые и сложные диссипативные структуры, которые могут возникать в данной нелинейной среде.

Более того, в работе [4] обнаружена тесная связь рассматриваемой автомодельной задачи с уравнением Шредингера, описывающим состояния атома водорода. Нахождение всех СФ нелинейного оператора является важной проблемой современной математики.

Исследования автомодельной задачи проводились в работах [1], [5]-[11]. Хорошо изучен одномерный случай. В частности, было доказано, что существует конечное число решений автомодельной задачи на прямой. Была получена формула, по которой можно вычислить количество СФ через значения параметров σ и β .

Двумерная задача изучена меньше. При ее исследовании обычно используют численные методы, и здесь возникают определенные трудности. Дифференциальная задача ставится на всей плоскости и необходимо так выбрать область численного интегрирования, чтобы построенное решение было достаточно мало на ее границе. Кроме того, при использовании чисто неявных разностных схем обычно применяется метод Ньютона для итераций по нелинейности. Поэтому необходимо научиться строить хорошие начальные приближения, то есть требуется заранее представлять себе форму искомого решения.

Впервые двумерные автомодельные решения были получены в работах С.П.Курдюмова, Е.С. Куркиной, А.Б. Потапова [5],[6]. Это удалось сделать благодаря

предложенному А.Б. Потаповым методу сшивания решений линеаризованного уравнения и асимптотики на бесконечности. На основе этого метода были построены начальные приближения для итерационного метода, достаточно близкие к искомому решению. В этом алгоритме использовалось предположение о симметрии решения, которое оказалось весьма важным для дальнейших исследований.

Было построено два класса структур, названных $E_j M_m$ и E_{ixj} , отличающихся принципом расположения локальных максимумов. У структур из класса $E_j M_m$ максимумы лежат на концентрических окружностях, поэтому приближения для них удобнее строить в цилиндрической системе координат. Максимумы СФ из класса E_{ixj} располагаются параллельными рядами; линии, соединяющие эти максимумы, образуют прямоугольную сетку. При построении приближений для СФ из этого класса естественно использовать декартову систему координат.

В работе [7] для автомодельной задачи был впервые применен метод продолжения по параметру и проведен бифуркационный анализ автомодельных решений. В результате было построено большое количество новых СФ.

Однако структура множества двумерных СФ остается до сих пор недостаточно изученной. Весьма важным представляется нахождение всевозможных типов структур и проведение их классификации. С этой целью в настоящей работе продолжено исследование и сравнительный анализ двумерных автомодельных решений в широком диапазоне параметров. Кроме того, актуальным является проведение бифуркационного анализа и выявление различных сценариев эволюции по параметру для разных типов структур, что может лечь в основу их классификации.

Важными для приложений являются вопросы устойчивости двумерных автомодельных решений. Подробные исследования в этом направлении были выполнены только в одномерном и цилиндрически-симметричном случае [8],[9]. Изучение эволюции некоторых начальных распределений температуры на плоскости в LS -режиме проводилось в 80-х годах прошлого в работах [10], [11]. Был получен важный результат: показано, что локализация тепла и возникновение нестационарных структур имеет место и в многомерном случае. Однако тогда еще не были построены двумерные автомодельные решения, и исследование их устойчивости не могло быть проведено.

Известно, что все сложные структуры являются *метастабильно устойчивыми*. Это означает, что если в численном эксперименте задать одну из них в качестве начальной функции (*резонансное начальное распределение*), то решение может следовать автомодельному закону развития достаточно долго – почти все время существования, но распадется вблизи момента обострения. Небольшая неточность в задании СФ в качестве начального распределения температуры значительно уменьшает время ее существования и приводит к быстрому распаду структуры. В связи с этим остро стоял вопрос о возможности приложения сложных СФ для моделирования реальных процессов. Было важно показать, что сложные СФ сами *могут сформироваться на начальной стадии эволюции из достаточно произвольных начальных возмущений*. Другими словами, что существуют неограниченные решения уравнения (2), которые в процессе своего развития выходят на автомодельный режим, соответствующий сложной структуре.

Процесс выхода на автомодельный режим, отвечающий простой структуре с одним максимумом, также представляет интерес. Здесь возникает вопрос об изменении формы различных финитных (т.е. отличных от нуля в некоторой ограниченной области) решений при выходе на этот автомодельный режим. До сих пор было неизвестно, становятся ли они радиально-симметричными, если в начальный момент времени не обладали этим свойством.

Эволюция решений, развивающихся в режиме с обострением, включает несколько этапов. В частности, обязательно присутствуют квазистационарная стадия (медленный рост решения) и стадия взрывного роста. На примере финитных решений можно изучить редко рассматриваемые этапы, когда решение сначала уменьшается по амплитуде, его носитель увеличивается ("растекание решения"), потом происходит локализация, (носитель перестает меняться) и лишь затем решение начинает расти. Мы ставили своей целью выяснить зависимость между формой начального возмущения и длительностью этих стадий.

Отметим, что рассматриваемые режимы с обострением в уравнении (2) являются возмущениями нулевого фона. То есть среда, где протекает процесс, является "холодной", ее температура равна нулю. С другой стороны, во многих реальных задачах среда прогрета до некоторой положительной температуры. Поэтому исследование возникновения режимов с обострением и образования локализованных структур в результате сверхкритических возмущений положительного фона является интересной и важной задачей.

В связи с этим в третьей главе предлагаемой работы рассматривается уравнение типа (1) с устойчивым положительным однородным по пространству стационарным решением (играет роль фона). Это уравнение имеет как неограниченные, так и затухающие (то есть релаксирующие к фону) решения. Такие свойства достигаются за счет знакопеременности источника - он имеет вид квадратного трехчлена. Рассматриваемое уравнение может быть использовано при исследовании процесса возникновения вспышек в короне Солнца (см. [12]).

Цель работы.

1. Исследование множества двумерных автомодельных решений уравнения теплопроводности со степенными нелинейностями $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$. Изучение зависимости этих решений от параметров среды β и σ .
2. Исследование устойчивости двумерных автомодельных решений. Изучение особенностей выхода на автомодельный режим с произвольных начальных возмущений в двумерном случае. Изучение стадии растекания и локализации финитных решений.
3. Исследование возможности формирования сложных структур из простых.
4. Изучение условий развития возмущений ненулевого фона в режиме с обострением в задаче Коши для уравнения $u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1)$. Численное исследование локализации решений.

Научная новизна работы.

- Численно исследовано множество двумерных автомодельных решений уравнения $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$. Предложен новый способ построения начальных приближений для метода Ньютона. Построено большое число новых двумерных структур с различным числом максимумов и порядком симметрии.
- С помощью метода продолжения по параметру исследована эволюция автомодельных решений при изменении параметра β . Изучены различные типы бифуркаций. В частности, подробно исследована "бифуркация поворота", при которой структура, имеющая локальный минимум в центре симметрии, переходит в структуру с максимумом в центре. Результаты этих исследований наглядно отражены на бифуркационных диаграммах. Проведено сравнение множеств автомодельных решений при $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$.

- Впервые удалось систематизировать все известные автомодельные решения. В основу классификации положена архитектура решений и особенности зависимости от параметра β для каждого типа структур.
- Исследована устойчивость двумерных автомодельных решений. Показано, что радиально-симметричная структура в виде цилиндрического слоя, содержащая нулевую область в центре симметрии, структурно устойчива.
- Впервые показана возможность формирования двумерных сложных структур из простых.
- Исследована эволюция финитных решений на плоскости. Показано, что форма и размеры области локализации зависят не только от параметров среды, но и от формы начального возмущения. Установлено, что наблюдается симметризация решения и выход на автомодельный режим в центральной области решения, в то время как область локализации может оставаться несимметричной.
- Впервые найдены условия взрыва и затухания возмущений ненулевого фона u_0 (пространственно-однородного стационара) в уравнении $u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1)$.
- С помощью метода Галактионова впервые построено семейство точных решений этого уравнения. Найдены условия, при которых решения из данного семейства развиваются в режиме с обострением. Было установлено, что неограниченные решения семейства приближаются к аналитическому решению уравнения $u_t = (u u_x)_x + u^2$.

Теоретическая и практическая значимость.

- Проведенные исследования двумерных автомодельных решений уравнения $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$ позволили существенно расширить знания об их свойствах. Все известные на сегодняшний момент решения были разбиты на классы. Продолжение решений по параметру, отображенное на бифуркационных диаграммах, может послужить основой для построения *дерева ветвлений* - полной классификации автомодельных решений. Используемый в диссертации подход к исследованию множества автомодельных решений позволяет легко включать в классификацию новые структуры.
- Проведенные исследования метастабильной устойчивости сложных структур показали, что они могут существовать достаточно долго при резонансном возбуждении. Кроме того, они могут формироваться из произвольных возмущений. Все это открывает новые возможности их приложений в задачах физики, химии, социологии и других для описания метастабильных состояний.
- Доказательство того, что режимы с обострением и локализованные структуры могут возникать, как сверхкритические возмущения ненулевого фона, дает возможность их приложения в реальных задачах. В частности, с их помощью могут быть описаны тепловые вспышки в короне Солнца, сопровождающиеся формированием метастабильных структур, возникающих поперек магнитного поля.
- Построенное семейство точных решений может быть полезно для аналитического доказательства локализации неограниченных решений уравнения $u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1)$.

Апробация работы.

Результаты исследований доложены на

1. Научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительных методов ВМиК МГУ (2008)
2. Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005" (Москва, 2005)
3. XIII конференции серии "Математика. Компьютер. Образование" (Дубна, 2006)
4. Конференции им. А.Н. Тихонова (Москва, 2006)
5. XIV конференции серии "Математика. Компьютер. Образование" (Пушино, 2007)
6. Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" им. И.Г. Петровского (Москва, 2007)
7. Международной конференции "Nonlinear Partial Differential Equations" (Ялта, 2007)
8. XV конференции серии "Математика. Компьютер. Образование" (Дубна, 2008)
9. Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2008" (Москва, 2008)
10. Второй международной конференции для молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям им. Я.Б. Лопатинского (Донецк, Украина, 2008)

Публикации.

По теме диссертационной работы опубликованы четыре статьи и девять тезисов докладов.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, перечня основных результатов и списка литературы. Работа изложена на 108 страницах, включает 63 рисунка. В список литературы входит 52 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во **введении** раскрываются актуальность темы диссертации, ее цели и задачи, научная и практическая значимость работы, приводятся защищаемые положения, кратко излагается содержание диссертации.

Глава 1. Исследование автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности на плоскости.

В **первой главе** исследуется множество двумерных автомодельных решений уравнения (2) при $k_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\sigma > 0$, $\beta > \sigma + 1$.

В разделе **1.1** поставлена следующая начально-краевая задача на плоскости:

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta, \quad (3)$$

$$u \rightarrow 0, \quad u^\sigma \operatorname{grad} u \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$u(0, \bar{x}) = u_0(\bar{x}) \geq 0, \quad u_0(\bar{x}) \leq M, \quad u_0(\bar{x}) \in C(R^2), \quad (5)$$

Дополнительные условия (4),(5) накладываются из физических соображений. На бесконечности решение и поток должны стремиться к нулю, а начальное распределение температуры должно быть непрерывной, неотрицательной (поскольку речь идет о температуре) и ограниченной функцией.

В разделе **1.2** вводятся автомодельные решения задачи (3)-(5), которые в полярной системе координат имеют вид

$$u(r, \varphi, t) = g(t)\Theta(\xi, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}. \quad (6)$$

Эти решения являются основным объектом наших исследований. Здесь ξ - автомодельная переменная, $g(t)$ и $\psi(t)$ - известные функции.

Функция $U(\xi, \varphi) = \Theta^{\sigma+1}(\xi, \varphi)$ удовлетворяет краевой задаче для нелинейного эллиптического уравнения:

$$\Delta U = (\sigma + 1) \left\{ \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U^{1/(\sigma+1)} \right) - U^{\beta/(\sigma+1)} + U^{1/(\sigma+1)} \right\}, \quad (7)$$

где $\Delta U = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$,

$$\xi \operatorname{grad} U \Big|_{\xi=0} = 0, \quad U \Big|_{\xi=0} < \infty, \quad (8)$$

$$\xi \operatorname{grad} U \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad U \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (9)$$

В первой главе численно изучается именно задача (7)-(9). Расчеты проводятся в декартовой и полярной системах координат. Решения ищутся с помощью итерационного метода Ньютона на сетке. Используются чисто неявные разностные схемы.

В разделе **1.3** изложены известные свойства одномерных и цилиндрически-симметричных решений задачи (7)-(9), изученные в работах [8],[9].

В рамках данной работы одномерные решения $U^1(\xi)$ интересны тем, что некоторые двумерные СФ вырождаются в *плоские волны* – решения вида

$$U(\xi_1, \xi_2) = U^1(\xi_1) \quad \forall \xi_2 \in R,$$

либо

$$U(\xi_1, \xi_2) = U^1(\xi_2) \quad \forall \xi_1 \in R,$$

где $\xi_1 = \xi \cos \varphi$, $\xi_2 = \xi \sin \varphi$.

От цилиндрически-симметричных решений ответвляются многие двумерные решения, существенно зависящие от угла.

В разделе 1.4 изложены численные методы, которые использовались в данной работе для построения радиально-несимметричных двумерных решений задачи (7)-(9).

В пункте 1.4.1 приведены чисто неявные разностные схемы для расчетов в декартовой и полярной системах координат. Уравнение (7) аппроксимировано со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по t . Итерации по нелинейностям проводятся с помощью метода Ньютона. Хорошо известно, что этот метод требует наличия начального приближения, весьма близкого к искомому решению. Это составляет основную трудность численного интегрирования задачи (7)-(9).

В остальных пунктах раздела изложены методы построения двумерных начальных приближений. Каждый из них имеет свою область применимости и эффективен для построения некоторого конкретного типа структур. Автором были написаны программные реализации всех этих методов, они использовались при исследовании множества двумерных СФ.

Пункт 1.4.2 посвящен методу сшивания, предложенному А.Б. Потаповым. Это был первый метод, который позволял строить “хорошие” начальные приближения для метода Ньютона. Из его обоснования естественным образом вытекает предположение о некотором порядке симметрии m искомого решения. Это означает, что решение переходит само в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{m}$ вокруг оси z . Таким образом, возникает

возможность проводить расчеты в некотором секторе с раствором угла $\frac{2\pi}{m}$, а не в полном круге. Радиус сектора выбирается в соответствии с положением точек сшивания.

В пункте 1.4.3 изложены метод мультипликации, предложенный Е.С. Куркиной и метод растяжений, разработанный автором данной работы. В *методе мультипликации* начальное приближение строится в виде $\tilde{U}(x, y) = u_1(x) u_2(y)$, где $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ - решения одномерной задачи (7)-(9). Этот метод эффективен при расчетах в декартовой системе координат при значениях β , не слишком близких к $\sigma + 1$.

Идея *метода растяжений* возникла, когда было замечено, что множество СФ содержит структуры с похожими радиальными сечениями, имеющие разный порядок симметрии. Оказалось, что, отыскав структуру с порядком симметрии m , можно построить приближение для похожей структуры с другим порядком симметрии n . Мы строим такое приближение следующим образом: $\tilde{y}(\xi, \varphi) = 0.5(S_1 + S_2) + 0.5(S_2 - S_1) \cos n\varphi$, где $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$ - сечения ранее построенной СФ.

В пункте 1.4.4 рассказывается о методе продолжения по параметру. Для исследования решений автомодельной задачи он применяется сравнительно недавно (см. [7]). В данной работе проводится продолжение по β .

Вкратце суть метода заключается в том, что СФ $\Theta(\xi, \varphi)$, построенная для некоторого значения параметра $\beta = \beta_1$, используется как начальное приближение при расчетах для $\beta = \beta_1 + \delta$, где δ - некоторое малое число (в данной работе обычно $\delta \leq 0.1$). Так мы продолжаем данную СФ по параметру (в сторону увеличения или уменьшения β), пока она не прекратит свое существование (т.е. не выродится в более простую СФ или

распадется на простые). Для отслеживания эволюции структуры строится график зависимости ее значения в центре от параметра, который называется *бифуркационной диаграммой*.

Этот метод применяется для построения СФ при таких значениях параметров β и σ , когда линейное приближение плохо описывает ее в области немонотонности. Кроме того, он является важным инструментом исследования зависимости СФ от параметра и изучения различных типов бифуркаций (ветвление, поворот бифуркационной диаграммы, возникновение структур с “дыркой”).

В разделе 1.5 изложены основные результаты главы - численное исследование множества СФ (т.е. решений автомодельной задачи (7)-(9)). Использовался разработанный автором программный комплекс, в котором реализованы разностные схемы и методы построения начальных приближений, описанные в разделе 1.4.

В ходе исследования было построено большое количество новых структур. Произведено разбиение всех известных на сегодняшний день СФ на классы. Основным признаком, по которому проводилась классификация, была *архитектура* – взаимное расположение максимумов собственной функции.

С помощью продолжения по β была исследована зависимость от параметра структур из различных классов. Было установлено, что каждая структура существует на некотором интервале $(\sigma + 1, \beta_*)$, где константа β_* своя для каждой СФ. Оказалось, что внутри одного класса могут находиться структуры с различными сценариями эволюции.

Были найдены бифуркации *поворот* (когда направление движения по параметру β меняется на противоположное) и *ветвление* (когда бифуркационные диаграммы двух структур сливаются в некоторой точке при росте или уменьшении β).

Таким образом, была исследована структура множества СФ при различных значениях параметров, установлена взаимосвязь между СФ различных классов и внутри классов.

Итак, собственная функция может относиться к одному из следующих классов:

1) **Первая радиально-симметричная структура** (простая структура) (рис. 1a)

Эта СФ имеет один максимум в центре симметрии. Существует при всех $\beta > \sigma + 1$. Выделена в отдельный класс, поскольку является структурно устойчивой.

2) **Другие цилиндрически-симметричные структуры** (рис. 1b)

СФ из этого класса представляют собой сходящиеся к центру кольцевые волны. Множество решений автомодельной задачи включает конечное число цилиндрически-симметричных структур, зависящее только от значений параметров σ и β (см. [7]).

3) **Структуры в виде плоских волн** (рис. 1c)

В декартовой системе координат по одной оси они описываются решением одномерной автомодельной задачи, по другой не зависят от координаты.

В плоские волны вырождаются некоторые СФ из класса $E_{i \times j}$ при $\beta \rightarrow \beta_*$.

4) **Класс $E_{i \times j}$** (рис. 1d)

Локальные максимумы этих структур располагаются рядами. Архитектуру СФ из данного класса можно охарактеризовать всего двумя числами: i и j . Число j задает количество рядов, в которых располагаются максимумы, а число i - количество максимумов в ряду.

Бифуркационный анализ показал, что при $\beta \rightarrow \beta_*$ собственные функции из класса $E_{i \times j}$ вырождаются в гомотермическое решение в случае $i = j$ и в плоские волны при $i \neq j$. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ наблюдается распад на $i \times j$ простых структур. Возможен сложный

сценарий, когда структура перед распадом проходит через цепочку метаморфоз, при этом бифуркационная диаграмма дважды поворачивает (см. рис.2a).

5) Класс $E_j M_m$ (рис. 1e)

Локальные максимумы располагаются на concentрических окружностях в углах правильных многоугольников. Параметр m характеризует порядок симметрии структуры. На биссектрисе сектора с раствором угла $\frac{2\pi}{m}$ лежит j локальных экстремумов.

Собственные функции из этого класса при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ распадаются на отдельные простые структуры. При $\beta \rightarrow \beta_*$ большинство СФ вырождается в радиально-симметричные структуры. Был также обнаружен сценарий, когда бифуркационная диаграмма поворачивает, при этом структура с минимумом в центре превращается в структуру с максимумом (см. рис.2b).

6) Структуры со сдвоенными максимумами (рис. 1f)

По своей архитектуре близки к классу $E_j M_m$, но максимумы располагаются парами, симметрично относительно биссектрис секторов с раствором угла $\frac{2\pi}{m}$ (где m - порядок симметрии структуры).

Для этого класса получен только один сценарий эволюции. При увеличении β происходит поворот бифуркационной диаграммы. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ структура с максимумом в центре вырождается в радиально-симметричную структуру, структура с минимумом – в структуру с “дыркой”.

7) Цилиндрически-симметричные структуры с “дыркой” (рис. 1g)

Имеют области нулевых значений в центре в виде круга (“дырку”, см. структуры на рис. 3).

Появляются в результате эволюции радиально-симметричных структур с минимумом в центре при $\beta \rightarrow \sigma + 1$;

8) Структур с “дыркой”, существенно зависящих от угла (рис. 1h)

Эти структуры по своему строению очень похожи на структуры из класса $E_j M_m$, но имеют нулевую область в центре.

Ответвляются от цилиндрически-симметричной структуры с “дыркой” при β , близких к $\sigma + 1$.

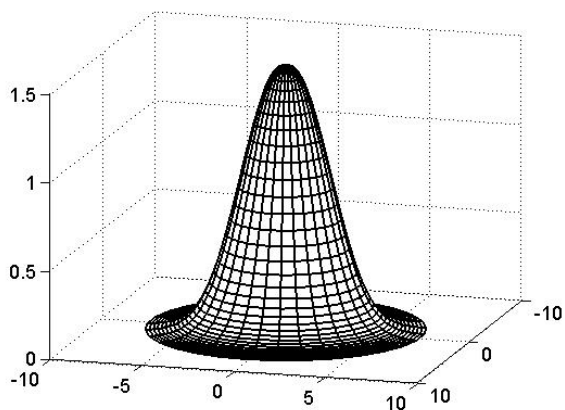
9) Многосвязные структуры (рис. 1i)

Максимумы располагаются на плоскости изогнутыми цепочками (“узоры” из максимумов). Между ними имеются области с нулевым значением.

Появляются в результате эволюции структур из класса $E_{i \times j}$ с большими i и j при $\beta \rightarrow \sigma + 1$.

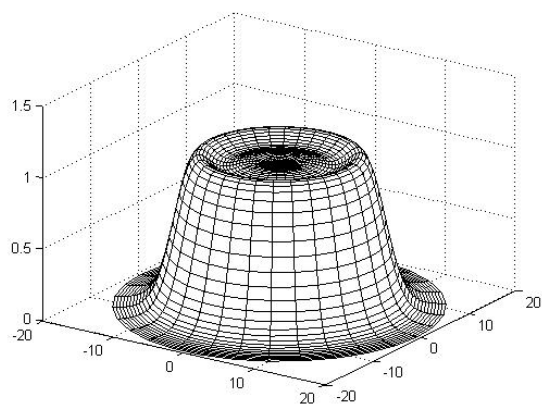
10) Структуры с седловой точкой в центре (рис. 1j)

В данной работе впервые была найдена и исследована структура с порядком симметрии $m = 4$, имеющая в центре симметрии седловую точку. Она существует наряду со структурами с минимумом и максимумом в центре с тем же значением m . Бифуркационная диаграмма этой структуры представляет собой монотонно возрастающую линию.



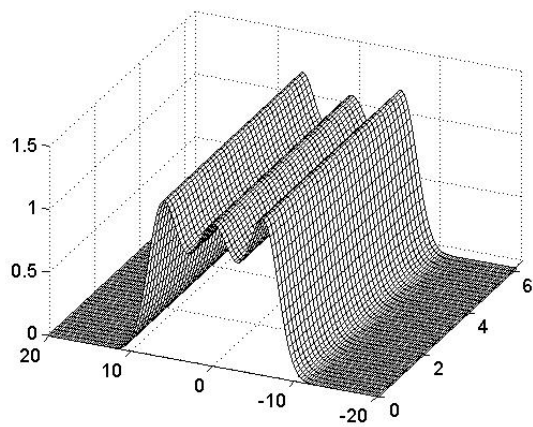
СФ $\Theta_1(\xi)$
 $(\sigma = 1.0, \beta = 2.25)$

a



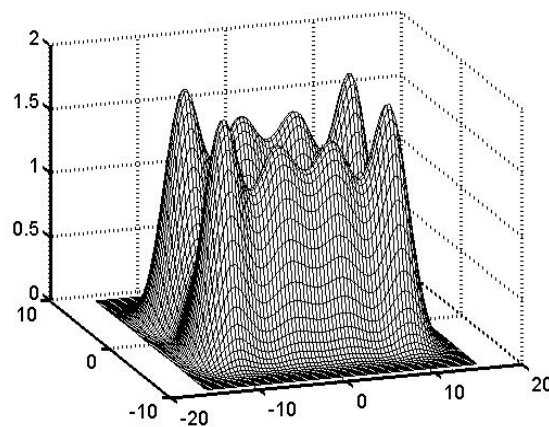
СФ $\Theta_4(\xi)$
 $(\sigma = 1.0, \beta = 2.25)$

b



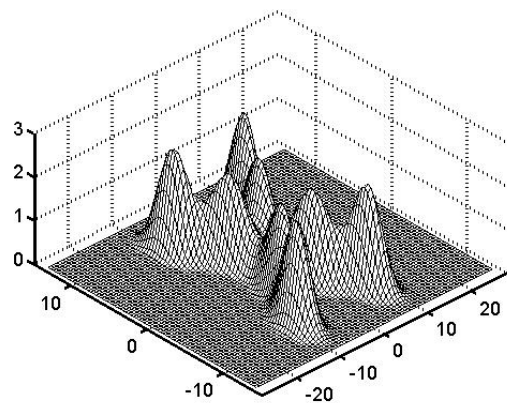
плоская волна $\Theta_3^{\Pi}(\xi_1, \xi_2)$
 $(\sigma = 1.0, \beta = 2.25)$

c



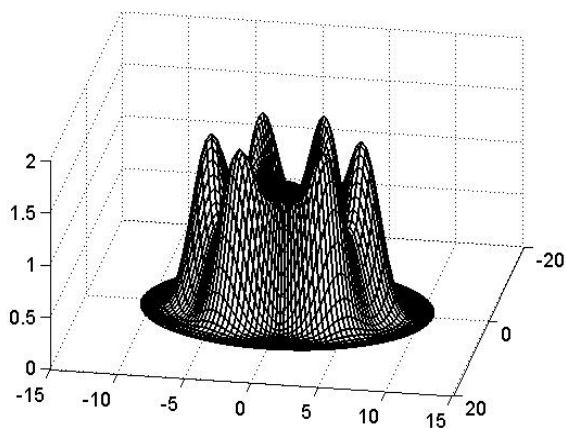
СФ $\Theta_{2 \times 3}(\xi, \varphi)$
 $(\sigma = 1.0, \beta = 2.2)$

d



СФ $\Theta_{n4m4}(\xi, \varphi)$
 $(\sigma = 1.0, \beta = 2.05)$

e



СФ $\Theta_{n3m3 \times 2}(\xi, \varphi)$
 $(\sigma = 2.0, \beta = 3.25)$

f

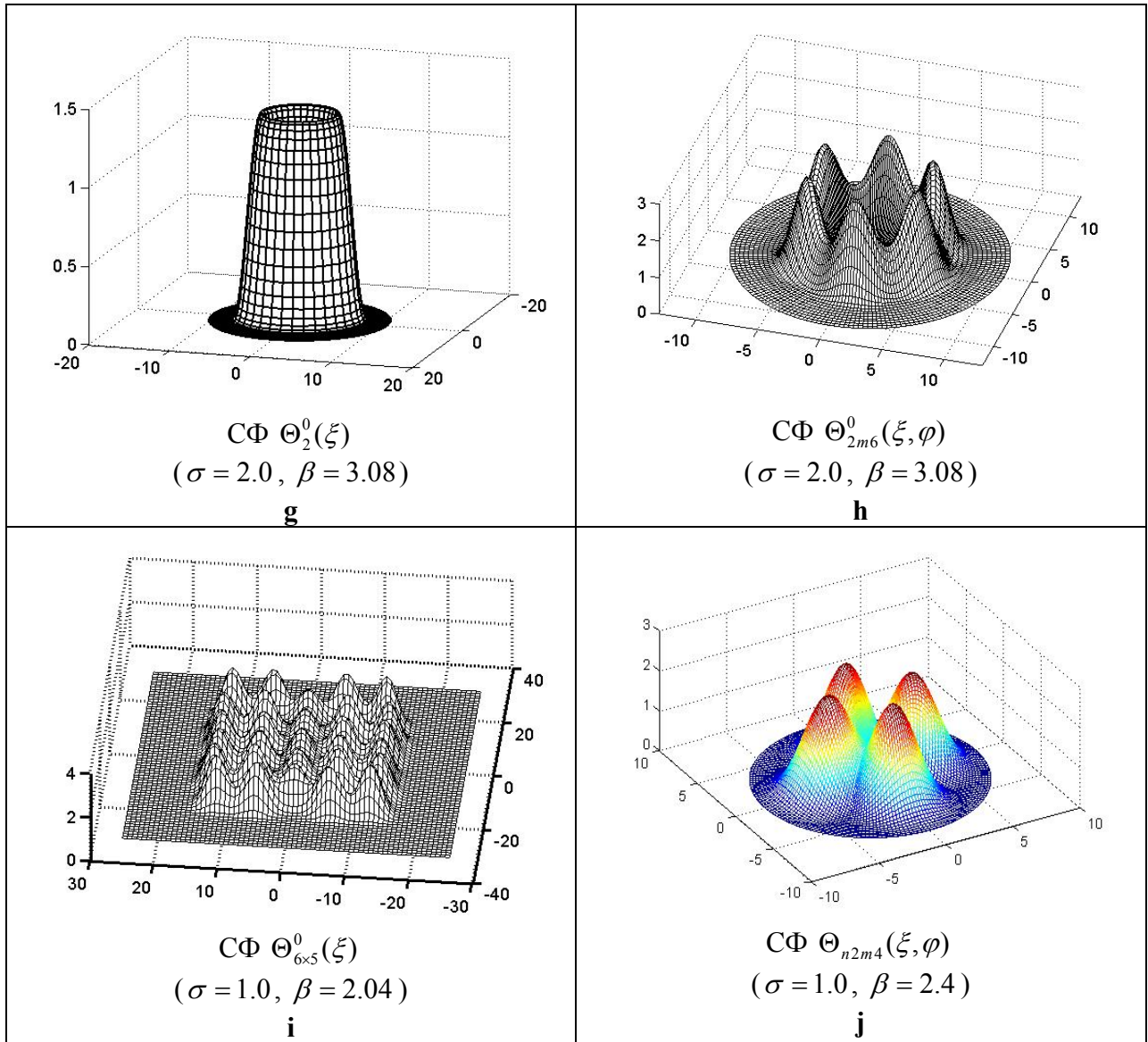


рис.1 Представители различных классов CΦ

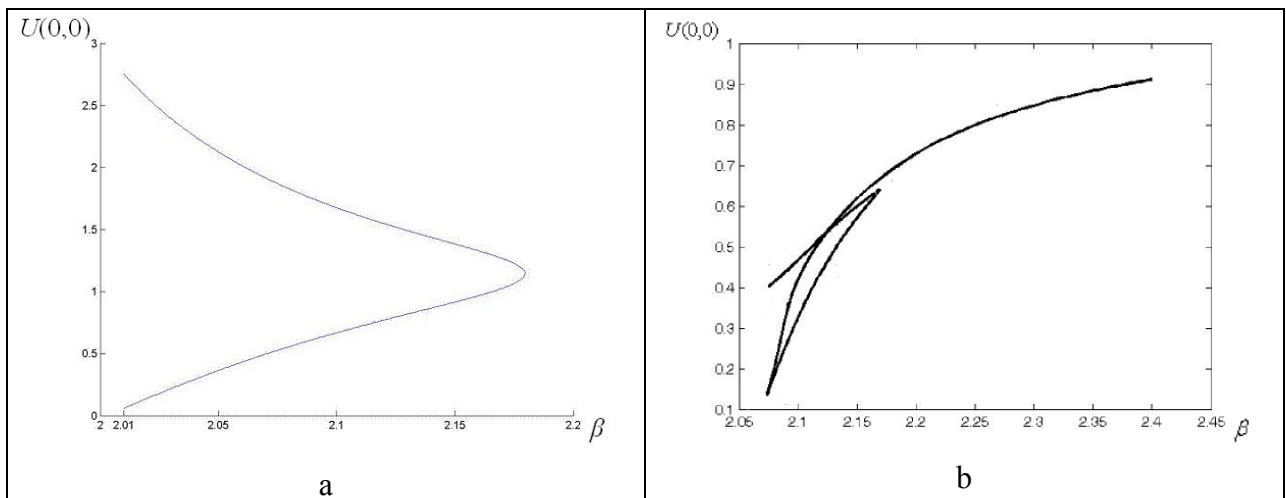


рис. 2 Различные сценарии эволюции CΦ ($\sigma = 1.0$)

В разделе 1.6 проведено сравнение множеств СФ при $\sigma = 2$ (этот случай исследовался ранее, см. например [7]) и $\sigma = 1$ (этот случай менее изучен, хотя коэффициенты теплопроводности вида $k_0 u(\bar{x}, t)$ встречаются во многих приложениях). Оказалось, что при обоих значениях параметра множество автомодельных решений включает структуры с одинаковой архитектурой и одинаковой эволюцией. Следовательно, проводимая нами классификация имеет смысл при различных значениях σ .

Глава 2. Устойчивость автомодельных решений.

Во второй главе изучается эволюция неограниченных решений начально-краевой задачи (3)-(5). Численно исследуется структурная устойчивость автомодельных решений вида (6), то есть устойчивость пространственной структуры этих решений. Также численно исследуется выход различных неограниченных решений задачи (3)-(5) на автомодельный режим.

Раздел 2.1 посвящен численным методам нахождения решения задачи (3)-(5). Приведены разностные схемы для расчетов в декартовой и полярной системах координат. Уравнение (3) аппроксимировано со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по времени. Переход на следующий временной слой осуществляется с помощью метода простых итераций.

Схемы были реализованы автором в виде программ, которые стали основным инструментом исследований. Шаг по времени уменьшался автоматически (в зависимости от величины максимального значения профиля), что очень важно при расчетах решений, растущих в режиме с обострением.

В разделе 2.2 изложены результаты исследований по структурной устойчивости двумерных автомодельных решений. Установлено, что существует два структурно устойчивых решения - простая радиально-симметричная структура с одним максимумом в центре и структура в виде цилиндрического слоя (структура с "дыркой", см. рис. 3). Показано, что область притяжения (т.е. множество решений, выходящих на соответствующий автомодельный режим) у последней очень мала. Все остальные автомодельные решения являются метастабильно устойчивыми.

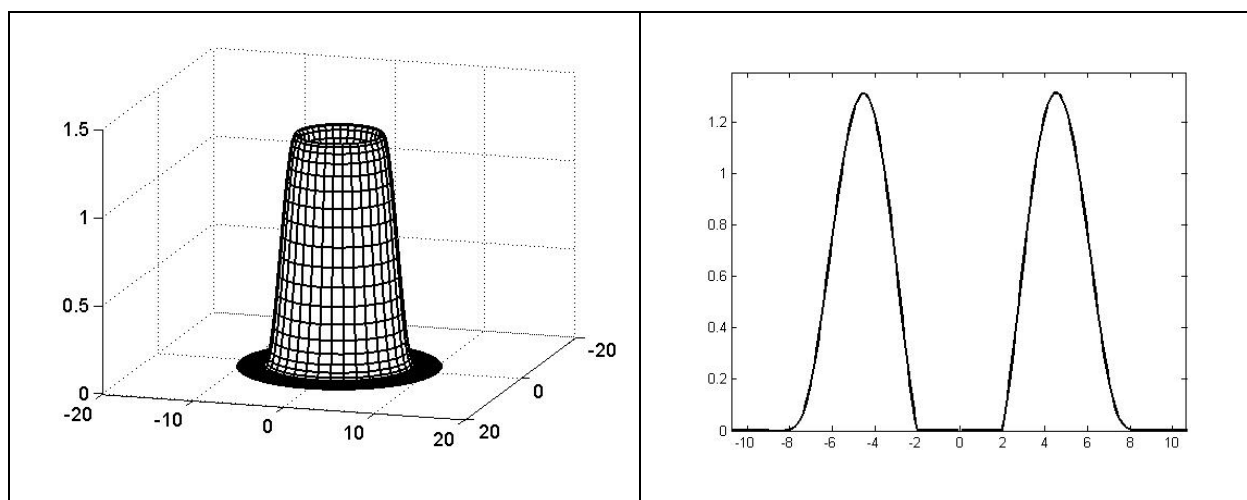


рис. 3 Структура с "дыркой"
($\sigma = 2.0$, $\beta = 3.08$)

В разделе 2.3 рассматривается эволюция возмущенных автомодельных решений. На примере структуры с двумя максимумами $\Theta_{1 \times 2}$ показано, как эти решения реагируют на различные виды возмущений начальной функции. В частности, при сжатии (сближении максимумов) происходит вырождение в простую структуру с одним максимумом. При растяжении сложная структура распадается на несколько простых. Если возмущение представляет собой срез (уменьшение) одного из максимумов, то происходит отставание в росте срезанного максимума.

Раздел 2.4 посвящен исследованию эволюции финитных решений.

В пункте 2.4.1 рассматриваются решения, отвечающие начальным функциям специального вида. Внутри некоторой окрестности начала координат они совпадают с простой структурой (рис. 1а), а всюду, где высота структуры меньше заданного ε (ε полагалось равным 0.01, 0.1, 0.2), равны нулю. Результаты расчетов, приведенные в данном пункте, показывают, что рассматриваемые решения весьма быстро (при росте максимума всего в 10 раз) выходят на автомодельный режим. Можно заключить, что основная информация об эволюции автомодельного решения сосредоточена в области быстрого роста, которая быстро сжимается (это одно из свойств *LS*-режима). Кроме того, это говорит о том, что область притяжения простой структуры весьма велика.

В пункте 2.4.2 исследуется поведение радиально-симметричных финитных решений, отвечающих начальным функциям вида

$$u_0(r) = \begin{cases} A_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases}$$

Показано, что эволюция решения, развивающегося в режиме с обострением, может начинаться со стадии затухания, которая сопровождается увеличением носителя (растеканием тепла). По ее завершении начинается стадия роста. Это происходит если амплитуда A_0 меньше некоторого предельного значения A_* . В противном случае стадия роста начинается при $t = 0$. Установлено, что величина A_* растет обратно пропорционально r_0 (при фиксированных β и σ).

Все финитные решения локализуются в некоторой области. Ее размеры также зависят от начальной функции. Радиус области локализации R_L тем больше, чем меньше A_0 (если r_0 и параметры уравнения фиксированы).

В пункте 2.4.3 изучается эволюция не радиально-симметричных финитных возмущений, отвечающих начальным функциям вида

$$u_0(r, \varphi) = \begin{cases} A_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{2l(\varphi)}\right), & r \leq l(\varphi), \\ 0, & r > l(\varphi). \end{cases}$$

Здесь $l(\varphi)$ - замкнутая кривая, описывающая границу носителя. Исследовались функции с носителями, отличными от круга (эллипс и другие).

Согласно нашей гипотезе все они принадлежат к области притяжения простой структуры. Показано, что все эти решения становятся радиально-симметричными лишь в некоторой окрестности начала координат. Таким образом, первая СФ описывает рассматриваемые решения только внутри этой окрестности. Ранее предполагалось, что за счет процессов диффузии решение станет радиально-симметричным на всей плоскости.

В разделе 2.5 приведен один из самых интересных результатов данной работы. Впервые была подтверждена гипотеза С.П. Курдюмова и Е.С. Куркиной о возможности

формирования двумерных сложных структур из простых. В численном эксперименте два независимых возмущения с одним максимумом объединились в структуру с двумя максимумами.

Результаты расчетов показаны на рис. 4. На крайнем левом графике изображена начальная функция – два слабо перекрывающихся горба. С течением времени перемычка между ними растет, догоняя по скорости роста максимумы (график посередине). На правом графике показана уже сформировавшаяся структура $\Theta_{1 \times 2}$. Она просуществовала некоторое время, развиваясь по автомодельному закону. После того, как структура увеличилась на 3 порядка, центральная точка стала отставать от максимумов. Произошло разрушение сложной структуры.

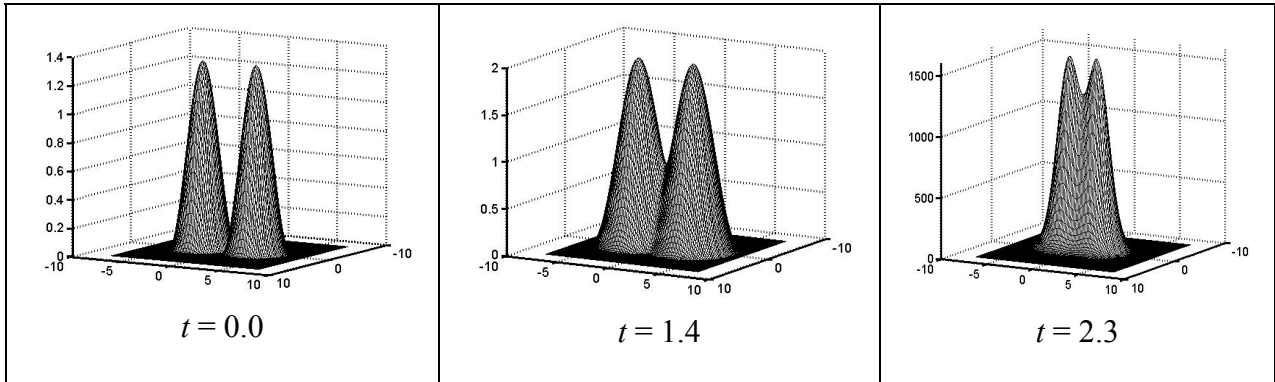


рис. 4 Формирование сложной структуры
($\sigma = 0.5$, $\beta = 1.78$)

Глава 3. Уравнение с квадратичным источником.

В разделе 3.1 приведены формулировки теорем сравнения для уравнений вида (1) из [11]. Этими теоремами мы пользуемся при проведении доказательств в разделе 3.2.

В разделе 3.2 поставлена следующая задача Коши:

$$u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1), \quad (10)$$

$$u(x,0) = f(x) \geq u_0, \quad (11)$$

$$u_1 > u_0 > 0. \quad (12)$$

Отметим, что u_0 и u_1 являются стационарными решениями уравнения (10), первое из них устойчиво, второе – нет.

Начальная функция $f(x)$ имеет вид локализованного возмущения фона u_0 :

$$f(x) = u_0 + g(x), \quad \text{mes supp } g(x) < \infty, \quad g(x) \geq 0. \quad (13)$$

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей числовой оси.

Раздел посвящен выводу условий на начальную функцию задачи (10)-(12), достаточных для взрыва или затухания соответствующего решения.

В пункте 3.2.1 получено достаточное условие затухания решения. С помощью упомянутых теорем сравнения доказано, что если начальная функция $f(x)$ всюду меньше константы u_1 , то решение во всех точках прямой стремится к u_0 .

В пункте 3.2.2 приведено доказательство первого достаточного условия для развития решения в режиме с обострением. Вновь используются теоремы сравнения. Доказана следующая

Теорема 1. Если для начальной функции $f(x)$ задачи (10)-(12) найдется константа A из интервала $(0,1)$, такая что $f(x) \geq \frac{u_0 + u_1}{1-A} \theta_s(x) \quad \forall x \in R$, где

$$\theta_s(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cos^2 \frac{x}{2\sqrt{2}}, & |x| \leq \pi\sqrt{2}, \\ 0, & |x| > \pi\sqrt{2}, \end{cases}$$

то соответствующее решение будет неограниченным.

В разделе 3.2.3 с использованием метода пробных функций выведено еще одно условие взрыва решения. Сначала это условие доказывается для краевой задачи.

Поставим задачу отыскания функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (10) и следующим дополнительным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = u_0, \quad (14)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,l], \quad (15)$$

где $f(0) = f(l) = u_0$, $f(x) \in C[0,l]$.

Для функции $v = u - u_0$ эта задача имеет вид:

$$v_t = ((v + u_0)v_x)_x + v(v + u_0 - u_1), \quad (16)$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad (17)$$

$$v(x,0) = f(x) - u_0. \quad (18)$$

Обе части уравнения (16) умножаются на некоторую пробную функцию $\psi_1(x)$ и интегрируются от 0 до l . Затем производится интегрирование по частям. Чтобы нужные подстановки обратились в ноль, необходимо взять в качестве пробной функции $\psi_1(x)$ решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\psi_{xx} + \lambda\psi = 0, \quad (19)$$

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (20)$$

Для последующих выкладок требуется выполнение еще нескольких условий. Во-первых, собственная функция $\psi_1(x)$ должна отвечать наименьшему положительному собственному значению λ_1 . Таким образом, $\psi_1(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}$, $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$, C_1 -произвольная константа. Во-вторых, λ_1 должно быть меньше 2. Это будет выполнено, если взять достаточно большое l .

Далее проводятся эквивалентные преобразования полученного уравнения. Используя интегральное неравенство Йенсена и возвращаясь к исходной функции $u(x,t)$, приходим к следующему условию роста решения начально-краевой задачи для уравнения (10) в режиме с обострением:

Лемма. Для того чтобы решение начально-краевой задачи (10),(14),(15) росло бы в режиме с обострением, достаточно чтобы начальная функция $f(x)$ удовлетворяла бы следующему условию:

$$\int_0^l f(x)\psi_1(x)dx \geq \frac{1}{1-0.5\lambda_1}(u_1 + 0.5\lambda_1 u_0). \quad (21)$$

Данное условие легко обобщается на задачу Коши (10)-(12). В это случае оно выглядит следующим образом:

Теорема 2. Пусть начальная функция задачи Коши (10)-(12) $f_1(x)$ имеет вид (13). Допустим, что 1) носителем соответствующей функции $g(x)$ является отрезок $[0, l]$, $l > \pi / \sqrt{2}$; 2) неравенство (21) выполнено для $f(x) = f_1(x)$. Тогда решение задачи (10)-(12) является неограниченным.

В разделе 3.3 вводится семейство частных решений уравнения (10). Решения ищутся согласно методу Галактионова в виде:

$$u(x, t) = p(t) + q(t) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Эти решения могут быть полезны для теоретического исследования уравнения (10), например, для доказательства локализации неограниченных решений задачи (10)-(12).

Коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют следующей динамической системе:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{1}{2} q^2 + p^2 + u_0 u_1 - (u_0 + u_1) p, \\ \dot{q} = \frac{3}{2} p q - (u_0 + u_1) q. \end{cases} \quad (23)$$

Мы исследуем эту систему при ограничениях на параметры $u_1 > 2u_0$ и на начальные данные $p_0 = p(0) > 0$, $q_0 = q(0) > 0$. Из последнего ограничения вытекает, что траектория $(p(t), q(t))$ целиком лежит в первом квадранте.

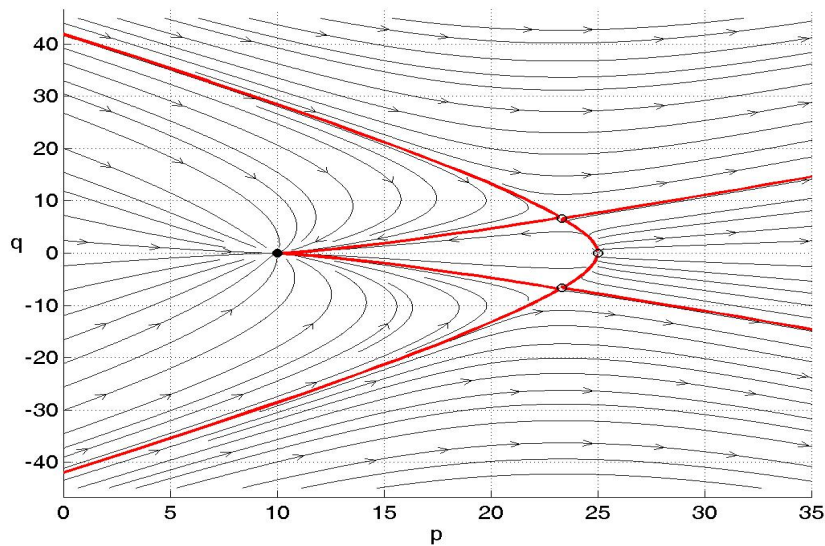


рис. 5

На рис. 5 приведен фазовый портрет системы (23) для $u_0 = 10$, $u_1 = 25$. Жирными линиями показаны сепаратрисы. При $u_1 > 2u_0$ система имеет 4 особые точки (отмечены кружочками): устойчивый узел $(u_0, 0)$, неустойчивый узел $(u_1, 0)$ и два седла.

Раздел 3.4 посвящен аналитическому исследованию системы (23).

Были сделаны некоторые заключения о поведении решения системы в зависимости от положения начальной точки (p_0, q_0) на плоскости (p, q) . Доказано, что при $p_0 > u_1$ коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ (а, следовательно, и само решение семейства) растут в режиме с обострением, причем их моменты обострения совпадают.

Получено следующее условие затухания решения из семейства (22):

Теорема 3. Если решение $\hat{u}(x,t)$ уравнения (10) вида (22) имеет коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ такие, что $u_0 \leq p_0 = p(0) < u_1$, $0 \leq q_0 = q(0) < u_1 - p_0$, то $\hat{u}(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u_0 \quad \forall x \in R$.

Кроме того, проведен асимптотический анализ системы. Показано, что неограниченные решения семейства (22), масштабированные (обработанные) с помощью преобразования

$$\Theta(u(x,t), A) = A \frac{u(x,t)}{\|u(x,t) - \|u(x,t)\|}$$

(здесь $\|u(x,t)\| = \max_{x \in R} u(x,t)$, A - регулирующая константа), приближаются к аналитическому решению одномерного уравнения (3) со степенными нелинейностями при $\sigma = 1$, $\beta = 2$. Результат сформулирован следующим образом:

Теорема 4. Пусть $u(x,t)$ - решение вида (22), причем $p(t) \rightarrow \infty$, $q(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, T_0 - время обострения коэффициентов. Обработка этого решения $\Theta(u(x,t), A)$ с константой $A = \frac{4}{3}$ сходится к функции $\gamma_s(x)$, т.е.

$$\left\| \Theta\left(u(x,t), \frac{4}{3}\right) - \gamma_s(x) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow T_0^-,$$

где

$$\gamma_s(x) = \frac{2}{3} \left(1 + \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Известно, что функция $u_s(t,x) = \frac{1}{(T_0 - t)} \gamma_s(x)$ является решением уравнения $u_t = (uu_x)_x + u^2$. Таким образом, подтверждается гипотеза, что при росте решения в режиме с обострением линейными членами уравнения (10) можно пренебречь по сравнению с квадратичными.

В разделе 3.5 приведены результаты численного исследования начально-краевой задачи для уравнения (10). Функция $f(x)$ на концах отрезка равна u_0 . Константа u_0 была положена равной 10, $u_1 = 25$. Показана строгая локализация финитных возмущений на фоне u_0 .

Благодаря явлению локализации при некоторых начальных данных на фоне могут сформироваться сложные диссипативные структуры, растущие в режиме с обострением. Профили одной из таких структур в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ приведены на рис. 6. Начальное возмущение с тремя максимумами растет в режиме с обострением, причем крайние максимумы растут одинаково быстро, а центральный отстает.

Кроме того, показано, что если сделать старшую степень в источнике уравнения больше (меньше) двух, то новое уравнение допускает решения, развивающиеся в LS - (соответственно, HS -) режиме с обострением.

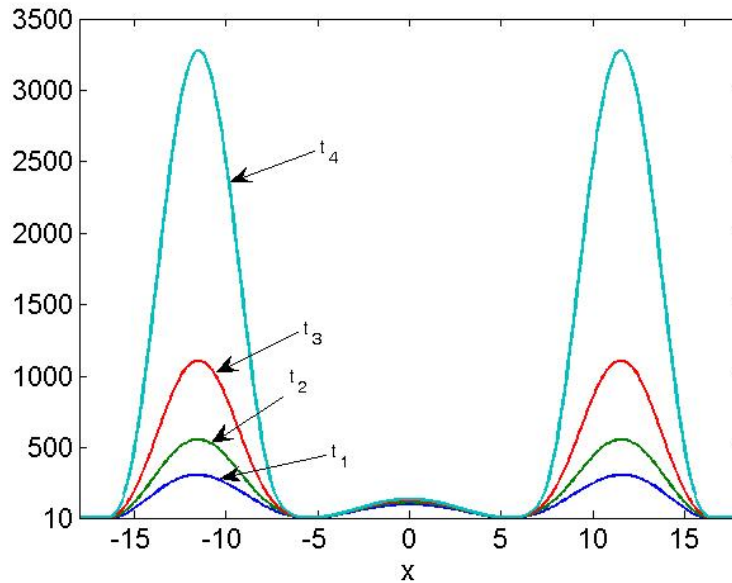


рис. 6 Диссипативная структура, развивающаяся в режиме с обострением.
($u_0 = 10$, $u_1 = 25$)

В заключение сформулированы основные результаты диссертации.

Основные результаты работы.

1. Численно изучено множество двумерных автомодельных решений уравнения $u_t = \text{div}(u^\sigma \text{grad} u) + u^\beta$. Исследована зависимость автомодельных решений от параметра β с помощью численного алгоритма продолжения по параметру и проведения бифуркационного анализа. Разработан новый метод построения начальных приближений к собственным функциям. Построены новые структуры. Предложена классификация двумерных автомодельных решений на основе архитектуры и бифуркационного анализа. Проведено сравнение множеств автомодельных решений при $\sigma = 1.0$ и $\sigma = 2.0$.
2. Численно исследована структурная устойчивость двумерных автомодельных решений уравнения $u_t = \text{div}(u^\sigma \text{grad} u) + u^\beta$. С помощью автомодельной обработки подтверждена структурная устойчивость простой структуры с одним максимумом и метастабильная устойчивость сложных структур. Показана структурная устойчивость радиально-симметричной структуры с нулевой областью в центре, изучена область ее притяжения. Исследовано влияние различных возмущений начальной функции на эволюцию автомодельных решений. Исследована динамика финитных решений, показано отсутствие симметризации носителя. Показана возможность формирования сложных структур из простых.
3. Аналитически исследовано уравнение с квадратичным источником $u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1)$, имеющее устойчивый пространственно-однородный стационар. Получены достаточные условия роста в режиме с обострением и затухания финитных возмущений этого стационара. Численно показана локализация неограниченных решений.

Список цитируемой литературы

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987.
2. Белавин В.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. Математическая модель демографических процессов с учетом пространственного распределения. // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, № 6. С. 885-902.
3. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // ДАН СССР. 1976. Т.227, № 2. С. 321.
4. Куркина Е.С., Курдюмов С.П. Квантовые свойства нелинейной диссипативной среды. // ДАН СССР. 2004. Т. 399, № 6. С. 1-6.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А.Б., Самарский А.А.. Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1071-1075.
6. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, №8. С. 1189-1205
7. Курдюмов С.П., Куркина Е.С. Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44, №9. С. 1619-1637.
8. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, №2. С.380-390.
9. Курдюмов С. П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // ДАН СССР. 1980. Т.251, №3. С. 587-590.
10. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повеценок Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // ДАН СССР. 1980. Т.251, № 4. С. 836-840.
11. Димова С.Н., Касчиев М.С., Колева М. Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов // Матем. моделир. 1992. Т. 4, № 3. С. 74-83.
12. Ковалёв В.А., Чернов Г.П., Ханаока И. Мелкомасштабные высокотемпературные структуры во вспышечной области. // Письма в астрономический журнал. 2001. Т. 27, № 4. С. 310-320.

Публикации автора по теме диссертации

1. Никольский И.М. О режимах с обострением в одном нелинейном параболическом уравнении. //Вестн. Моск. ун-та, сер.15, Вычисл. матем. и киберн., № 4, 2007. с.25-32
2. Kurkina E.S., Nikol'skii I.M. Bifurcation analysis of the spectrum of two-dimensional thermal structures evolving with blow-up // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 17, No. 4, 2006. pp. 320-340
3. Kurkina E.S., Nikol'skii I.M. Investigation of a nonlinear heat equation with a quadratic source // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 18, No. 3, 2007. pp. 217-233
4. Никольский И.М., Куркина Е.С. Асимптотические свойства решений нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником. // Сборник научных трудов конференции МКО-14, Пущино, 2007, Т.2, с. 74-83
5. Никольский И.М. Исследование спектра многомерных диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением.// Сборник тезисов международной конференции Ломоносов-2005, М., 2005, с.45-46
6. Куркина Е.С., Никольский И.М. Исследование спектра многомерных диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением //Сборник тезисов конференции МКО-13, Дубна, 2006, с.20
7. Никольский И.М., Куркина Е.С. Режимы с обострением в нелинейном уравнении теплопроводности с источником специального вида // Сборник тезисов конференции МКО-14, Пущино, 2007, с.85
8. Nikolsky I. Blow-up and extinct solutions of a nonlinear heat equation with special source. // Сборник тезисов конференции NPDE-2007, Ялта, 2007. с.51
9. Никольский И.М. Исследование одного частного случая уравнения нелинейной теплопроводности. // Сборник тезисов конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" им. И.Г. Петровского, М., 2007, с.212-213.
10. Никольский И.М. Динамика решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником. // Сборник тезисов международной конференции Ломоносов-2008, М., 2008, с.68
11. Никольский И.М., Куркина Е.С. Поведение неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности. //Сборник тезисов конференции МКО-15, Дубна, 2008, с.102
12. Куркина Е.С., Никольский И.М. О режимах с обострением в уравнении $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$. // Сборник тезисов конференции им. С.Л. Соболева, Новосибирск, 2008, с.512
13. Никольский И.М. Исследование диссипативных структур горения нелинейной среды. //Сборник тезисов второй международной конференции для молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям им. Я.Б. Лопатинского, Донецк, 2008. с. 89-90