МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Аббаси Насер

Спектральные вопросы задачи Франкля для уравнения смешанного типа

Специальность 01.01.02-дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва—2009

Работа выполнена на научных семинарах кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМиК МГУ.

Научный руководитель:

академик РАН
Е.И.Моисеев

Официальные оппоненты:доктор физико-математических наук,

профессор Зарубин Александр Николаевич;

доктор физико-математических наук,

профессор Макин Александр Сергеевич.

Ведущая организация: Научно-исследовательскии институт

прикладной математики и автоматизации

Кабардино- Балкарского научного центра РАН.

Защита диссертации состоится 3 июня 2009г.в 15 часов 30 минут.На заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991,ГСП-1,Москва,Ленинские горы,МГУ,Факультет вычислительной математики и кибернетики,аудитория 685.
С диссертацей можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМиК МГУ.
Автореферат разослан.....апреля 2009г.
Ученый секретарь:диссертационного совета

профессор Е.В.Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы.Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важных разделов .Первым исследователем в этой области был Ф.Трикоми [42].Началом нового этапа в развитии теории уравнений смешанного типа явилась работа Ф.И.Франкля[43]. Задача Франкля без спектрального параметра рассматривалась в работах А.В Бицадзе ,М.М Смирнова,К.И Бабенко [1],[39].Большой вклад в изучение разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа внесли работы И.М.Гельфанда,Геллерстедта (Gellersntdt-S).А.М.Нахушева,М.С.Салахитдинова,Т.Д.Джураева,А.П. Солдатова,В.Н.Врагова,Т.Ш.Кальменова,К.Б.Сабитова,А.Н.Зарубина, С.П.Пулькина,В.Ф.Волкодавова,В.П.Михаилова,А.А.Полосина,Н.Ю. Капустина,А.В.Псху. Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались, начиная с 80-х годов. Т.Ш.Кальменов[14]первый доказал,что задача Трикоми имеет по крайней мере одно собственное значенние для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. С.М.Пономарев выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области,являющейся круговым. Е.И.Моисеев[20-31]нашел сектора на комплексной плоскости,в которых отсутствует спектр задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта с переменными коэффициентами (в частности,для уравнения Трикоми).Е.И.Моисеев доказал базисность этой системы в эллиптической части области и,используя свойство базисности, построил спектральный метод решения краевых задач для уравнений смешанного типа.

Я.Н.Мамедов [18] распространил результаты о полноте собственных функций для вырождающихся уравнений смешанного типа,в частности,для уравнения Трикоми,но в случае,когда эллиптическая часть области-это половина круга в соответствующей геометрии. Задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и для уравнения Геллерстедта[6]исследовалась в работах К.Б.Сабитова и его учеников[38]. В этой работе изучены полнота и базисность собственных функций для задачи Франкля для уравнения смешанного типа в эллиптической части области.

Основные результаты.В работе получены следующие результаты:

1.Нахождение в явном виде(через функции Бесселя) общих решений вырождающихся эллиптико-гиперболических уравнений со спектральным параметром;

2. Для задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе нахождение собственных значений и собственных функций;

3.Доказана базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности;

4.Доказана базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом градиента решения;

5.Доказана полнота собственных функций задачи Франкля с условием четности;

6.Доказана полнота собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом градиента решения.

Цель работы.Целью работы являются доказательства базисности или полноты собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности или нечетности и с разрывом градиента решения или без разрыва градиента решения на линии изменения типа уравнения.

Методы исследования.Построение частного решения уравнения смешанного типа в эллиптической части области и в гиперболической части области выписывается с помощью метода разделения переменных,используется функция Бесселя. Базисность собственных функций задачи Франкля и полнота собственных функций задачи Франкля исследуются с помощью теорем о полноте и базисности систем синусов и косинусов в пространстве L_p. Кроме того,используется ортонормированная система функций Бесселя.

Научная новизна.В первой главе изучается построение частного решения уравнения смешанного типа в эллиптической части области и в гиперболической части области,ранее во второй главе доказана базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности,в третьей главе доказана базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом градиента решения,в четвёртой главе доказана полнота собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом градиента решения.В пятой главе доказана полнота собственных функций задачи Франкля с условием нечетности.

Практическая и теоретическая ценность работы. Полученные результаты и предложенные методы исследования представляют теоретический интерес и могут быть использованы в спектральной теории краевых задач для уравнения смешанного типа и в газовой динамике.

Апробация работы.Результаты, приведенные в диссертации,докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедр общей математики и функционального анализа и их применения факультета ВМК МГУ,имени.М.В.Ломоносова,а также докладывались на Тихоновских чтениях в октябре 2008г.

Публикации.Основные результаты работы подготовлены,
оформлены в пяти статьях и опубликованы[44-48].

Структура и объём диссертации.Диссертация состоит из оглавления,введения,пяти глав и списка литературы.В введении указана актуальность задачи и краткая история основных результатов по уравнениям смешанного типа и основные результаты диссертации. Объём диссертации составляет 100 страниц.

Основное содержание работы

Первая глава.

Построение частного решения уравнения смешанного типа в эллиптической части области и в гиперболической части области

Первая глава состоит из пяти пунктов.
В пункте 1.1 дана постановка задачи Франкля для уравнения Лаврентьева - Бицадзе в эллиптической части области и в гиперболической части области .
Постановка задачи.В области

$$D = (D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2}),$$

требуется определить решение следующей видоизмененной задачи Франкля

$$u_{xx} + (sgn(y))u_{yy} + \mu^2 sgn(x+y)u = 0, \tag{1}$$

в $(D_+ \cup D_-)$ с краевыми условиями

$$u(1,\theta) = 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0, y\in(-1,1), \tag{3}$$

$$u(0,y)=-u(0,-y), y\in[0,1], \tag{4}$$

функция $u(x,y)-$ регулярное решение из класса

$$u\in C^0(\overline{D_+\bigcup D_-})\bigcap C^2(D_+)\bigcap C^2(D_-)$$

и $u(x,+0)=-u(x,-0)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), 0<x<1, \tag{5}$$

$$D_+=\{(r,\theta)\; 0<r<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\},$$

область D_+ ограничена сегментом [-1,1]оси ОХ и кривой

$$\gamma=\{(x,y): x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\}$$

и сегментом [0,1]оси ОУ.

$$D_-=\{(x,y): -y<x<y+1, \frac{-1}{2}<y<0\}$$

$$\bigcup\{(x,y): x-1<y<-x, 0<x<\frac{1}{2}\}.$$

Найти общие решения следующей задачи Франкля в области $D=(D_+\cup D_-)$.

В пункте 1.2 изучается общее решение видоизмененной задачи Франкля для уравнения смешанного типа в эллиптической части области .

Общее решение видоизмененной задачи Франкля в эллиптической части области

$$u(r,\theta) = (AJ_\lambda(\mu r))(\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\theta + \sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\theta) \tag{6}$$

$$= (AJ_\lambda(\mu r))(\cos\lambda(\frac{\pi}{2}-\theta))y > 0.$$

В пункте 1.3 изучается общее решение видоизмененной задачи Франкля для уравнения смешанного типа в гиперболической части области.

Общее решение видоизмененной задачи Франкля в гиперболической части области

$$u = A(J_\lambda(\mu r))\cos\lambda(\frac{\pi}{2}-\theta), D^+, \tag{7}$$

$$u = \frac{A}{2}(J_\lambda(\mu\rho))((\cos\lambda\frac{\pi}{2} - \sin\lambda\frac{\pi}{2})e^{\lambda\psi})$$
$$+(\cos\lambda\frac{\pi}{2} + \sin\lambda\frac{\pi}{2})e^{-\lambda\psi}, D_{-1}, \tag{8}$$

$$u = B(J_\lambda(\mu R))(ae^{\lambda\varphi} + be^{-\lambda\varphi}), D_{-2}. \tag{9}$$

В пункте 1.4 изучается сшивание решения уравнения смешанного типа в эллиптической части области и в гиперболической части области.

Сшивание решения

$u = AJ_\lambda(\mu r)\cos\lambda(\frac{\pi}{2}-\theta)$,в$D^+$,

$u = \frac{A}{2}(J_\lambda(\mu\rho))((\cos\lambda\frac{\pi}{2} - \sin\lambda\frac{\pi}{2})e^{\lambda\psi}+ (\cos\lambda\frac{\pi}{2} + \sin\lambda\frac{\pi}{2})e^{-\lambda\psi})$,в$D_{-1}$,

$$u = \frac{A}{2}(J_\lambda(\mu R))(\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\sin\lambda\frac{\pi}{2})\,(e^{\lambda\varphi}+e^{-\lambda\varphi}),\text{в } D_{-2}. \tag{10}$$

В пункте 1.5 изучается граничное условие задачи Франкля для уравнения смешанного типа .

Граничное условие задачи Франкля

$$u_{nk} = \begin{cases} AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk}r)\cos\lambda_n(\frac{\pi}{2}-\theta) \text{ в } D^+, \\ AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk}\rho)\sinh\lambda_n\psi \text{ в } D_{-1}, \\ -AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk}R)\cosh\lambda_n\varphi \text{ в } D_{-2}. \end{cases} \tag{11}$$

А также

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk}r)\cos\tilde{\lambda}_n(\frac{\pi}{2}-\theta) \text{ в } D^+, \\ -AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk}\rho)\cosh\tilde{\lambda}_n(\psi) \text{ в } D_{-1}, \\ -AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk}R)\cosh\tilde{\lambda}_n(\varphi) \text{ в } D_{-2}. \end{cases} \tag{12}$$

Вторая глава.

Базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности

Во второй главе изучаются четыре пункта задачи Франкля для уравнения Лаврентьева - Бицадзе[3].

В пункте 2.1 дана постановка задачи Франкля с нелокальным условием четности для уравнения Лаврентьева - Бицадзе

Постановка задачи.В области

$$D = (D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2})$$

требуется определить решение следующей видоизмененной задачи Франкля

$$u_{xx} + sgny u_{yy} + \mu^2 sgn(x+y)u = 0, \tag{13}$$

в $(D_+ \cup D_{-1} \cup D_{-2})$,с краевыми условиями

$$u(1,\theta) = 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, y \in (-1,1), \tag{15}$$

$$u(0,y) = u(0,-y), y \in [0,1], \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), 0 < x < 1, \tag{17}$$

Функция $u(x,y)-$ регулярное решение из класса

$$u \in C^0(\overline{D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2}}) \bigcap C^2(D_+) \bigcap C^2(D_-),$$

где

$$D_+ = \{(r,\theta)\, 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

$$D_{-1} = \{(x,y) : -y < x < y+1, \frac{-1}{2} < y < 0\},$$

$$D_{-2} = \{(x,y) : x-1 < y < -x, 0 < x < \frac{1}{2}\}.$$

В пункте 2.2 нахождение собственных значений и собственных функций.

Теорема 2.2.1. Собственные значения и собственные функции задачи (13)-(17) можно представить в виде двух серий :

в первой серии собственные значения $\lambda_{nk}=\mu_{nk}^2$ находятся из уравнения .

$$J_{4n}(\mu_{nk})=0, \tag{18}$$

где $n=0,1,2,...,k=1,2,...,$ $J_\alpha(z)-$ функции Бесселя [2],а собственные функции определяются формулой

$$u_{nk}=\begin{cases} AJ_{4n}(\mu_{nk}r)\cos 4n(\frac{\pi}{2}-\theta) \text{ в } D^+, \\ AJ_{4n}(\mu_{nk}\rho)\cosh 4n\psi \text{ в } D_{-1}, \\ AJ_{4n}(\mu_{nk}R)\cosh 4n\varphi \text{ в } D_{-2}, \end{cases} \tag{19}$$

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$$

при $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, r^2=x^2+y^2$ в D_+,

$$x=\rho\cosh\psi, y=\rho\sinh\psi,$$

при $0<\rho<1, -\infty<\psi<0, \rho^2=x^2-y^2$ в D_{-1},

$$x=R\sinh\varphi, y=-R\cosh\varphi,$$

при $0<\varphi<+\infty, R^2=y^2-x^2$ в D_{-2},
во второй серии собственные значения $\tilde{\lambda}_{nk}=\tilde{\mu}_{nk}^2$ находятся из уравнения

$$J_{4n-1}(\tilde{\mu}_{nk})=0, \tag{20}$$

где $n=1,2,...,k=1,2,...,$ а собственные функции определяются формулой

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} AJ_{4n-1}(\tilde{\mu}_{nk}r)\cos(4n-1)(\frac{\pi}{2}-\theta)\text{в}D^{+}, \\ -AJ_{4n-1}(\tilde{\mu}_{nk}\rho)\sinh(4n-1)\psi \text{ в}D_{-1}, \\ AJ_{4n-1}(\tilde{\mu}_{nk}R)\cosh(4n-1)\varphi \text{ в}D_{-2}. \end{cases} \tag{21}$$

В пункте 2.3 доказана полнота собственных функций.

Теорема 2.3.1. Система функций

$$\{\cos 4n(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{\cos(4n-1)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=1}^{\infty},$$

полна в пространстве

$L_P(0,\frac{\pi}{2}), P>1$,т.е.если

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n)(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$
$$n = 0,1,2,...,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n-1)(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$
$$n = 1,2,...,$$

$f\in L_P(0,\frac{\pi}{2}), P>1$, то $f(\theta)=0$ в $L_P(0,\frac{\pi}{2})$.

Лемма 2.3.1. Если $f(\theta)\in L_p(0,\frac{\pi}{2}), p>1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos 4n(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$

$n=0,1,2,...,$ то$f(\theta) = -f(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$$\forall f(\theta)\in L_p(0,\frac{\pi}{2}).$$

Теорема 2.3.2. Система собственных функций(19)-(21)задачи (13)-

(17) полна в пространстве $L_2(D_+)$ и образует в нём базис.

В пункте 2.4 доказана базисность собственных функций в эллиптической части области в пространстве L_2.

Теорема 2.4.1. Система функций

$$\{\cos(4n)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{22}$$

$$\{\cos(4n-1)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{23}$$

образует базис Рисса в $L_2(0, \frac{\pi}{2})$.

Замечание 2.4.2. Отметим,что система косинусов (22)и (23) является решением следующей задачи на собственные функции и собственные значения:

$$u'' + (4n)^2 u = 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$u'(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Система функций (23)ортогональна и является решением другой краевой задачи на собственные функции и собственные значения :

$$u'' + (4n-1)^2 u = 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),$$
$$u'(\frac{\pi}{2}) = u(0) = 0.$$

Третья глава.

Базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом градиента решения

В третьей главе рассматриваются собственные функции задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом нормального решения на линии изменения типа уравнения.
Доказано,что эти собственные функции образуют базис Рисса в эллиптической части области, и доказана базисность Рисса системы косинусов на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$,которые входят в выражения для собственных функций.
Базисность Рисса была доказана для собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и непрерывным градиентом решения.
В пункте 3.1 дана постановка задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом нормального решения на линии изменения типа уравнения.
Постановка задачи.В области

$$D = (D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2})$$

требуется найти собственные значения и собственные функции задачи Франкля

$$u_{xx} + sgny u_{yy} + \mu^2 sgn(x+y)u = 0, \tag{24}$$

в $(D_+ \cup D_{-1} \cup D_{-2})$, с краевыми условиями

$$u(1,\theta)=0, \theta\in[0,\frac{\pi}{2}], \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0, y\in(-1,1), \tag{26}$$

$$u(0,y)=-u(0,-y), y\in[0,1], \tag{27}$$

В классе функций

$$u\in C(\overline{D})\bigcap C^2(D_{-1})\bigcap C^2(D_{-2}),$$

где

$$D_+=\{(r,\theta)\ 0<r<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\},$$

$$D_{-1}=\{(x,y):-y<x<y+1, \frac{-1}{2}<y<0\},$$

$$D_{-2}=\{(x,y):x-1<y<-x, 0<x<\frac{1}{2}\}.$$

С условием сопряжения на линии изменения типа уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), 0<x<1, \tag{28}$$

В пункте 3.2 нахождение собственных значений и собственных функций.

Теорема 3.2.1. Собственные значения и собственные функции задачи (23)-(28) можно представить в виде двух серий:

в первой серии собственные значения $\lambda_{nk}=\mu_{nk}^2$ находятся из уравнения :

$$J_{4n+2}(\mu_{nk})=0, \tag{29}$$

где $n=0,1,2,...,k=1,2,...,\mu_{nk}$–корень уравнения(29),

$J_\alpha(z)-$ функции Бесселя [2],а собственные функции определяются формулой :

$$u_{nk} = \begin{cases} AJ_{4n+2}(\mu_{nk} r)\cos(4n+2)(\frac{\pi}{2}-\theta) \text{ в} D^+, \\ -AJ_{4n+2}(\mu_{nk}\rho)\cosh(4n+2)\psi \text{ в} D_{-1}, \\ -AJ_{4n+2}(\mu_{nk} R)\cosh(4n+2)\varphi \text{ в} D_{-2}, \end{cases} \tag{30}$$

во второй серии собственные значения $\tilde{\lambda}_{nk} = \tilde{\mu}_{nk}^2$ находятся из уравнения

$$J_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}) = 0, \tag{31}$$

где $n = 0, 1, 2, ..., k = 1, 2, ..., (\tilde{\mu}_{nk})-$корень уравнения(31),а собственные функции определяются формулой :

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk} r)\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2}-\theta) \text{ в } D^+, \\ AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}\rho)\sinh(4n+1)\psi \text{ в } D_{-1}, \\ -AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk} R)\cosh(4n+1)\varphi \text{ в } D_{-2}. \end{cases} \tag{32}$$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r^2 = x^2 + y^2$ в D_+,

$$x = \rho\cosh\psi, y = \rho\sinh\psi,$$

при $0 < \rho < 1, -\infty < \psi < 0, \rho^2 = x^2 - y^2$ в D_{-1},

$$x = R\sinh\varphi, y = -R\cosh\varphi,$$

при $0 < \varphi < +\infty, R^2 = y^2 - x^2$ в D_{-2}.

Доказательство теоремы(3.2.1)проводится проверкой выполнения условий(24)-(28).

В пункте 3.3 доказана полнота собственных функций.

Теорема 3.3.1. Система функций

$$\{\cos(4n+2)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

полна в пространстве $L_P(0,\frac{\pi}{2}), P>1$,т.е. если

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n+2)(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, ...,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$
$$n = 1, 2, ...,$$

$f \in L_P(0,\frac{\pi}{2}), P>1$, то $f(\theta) = 0$в$L_P(0,\frac{\pi}{2})$.

Лемма 3.3.1. Если

$$f(\theta) \in L_p(0,\frac{\pi}{2}), p>1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n+2)(\frac{\pi}{2}-\theta)d\theta = 0,$$

$n = 0, 1, 2, ...,$ то$f(\theta) = f(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$$\forall f(\theta) \in L_p(0,\frac{\pi}{2}), \theta \in [0,\frac{\pi}{2}].$$

Теорема 3.3.2 Система собственных функций (30)-(32)задачи (24)-(28) полна в пространстве $L_2(D_+)$.

В пункте 3.4 доказана базисность собственных функций.

Теорема 3.3.3. Система функций

$$\{\cos(4n+2)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2}-\theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

образует базис Рисса в $L_2(0, \frac{\pi}{2})$.

Теорема 3.3.4. Система собственных функций $A_{nk}^{-1}u_{nk}, \tilde{A}_{nk}^{-1}\tilde{u}_{nk}$ задачи Франкля(24)-(28)образует базис Рисса в $L_2(D_+)$,где

$$A_{nk}^2 = (\int_0^1 J_{4n+2}^2(\mu_{nk}r)rdr)^{-1},$$

$$\tilde{A}_{nk}^2 = (\int_0^1 J_{4n+1}^2(\tilde{\mu}_{nk}r)rdr)^{-1}.$$

Четвёртая глава.

Полнота собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом градиента решения

В четвёртой главе рассматриваются собственные функции задачи Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом производной решения на линии изменения типа уравнения.

Доказано,что эти собственные функции образуют полную систему в $L_P(D_+)$,где $P \geq 2$,а D_+- эллиптической части области.

В пункте 4.1 дана постановка задача Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом производной решения на линии изменения типа уравнения.

Постановка задачи.В области

$$D = (D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2})$$

требуется найти собственные значения и собственные функции задачи

Франкля

$$u_{xx}+sgnyu_{yy}+\mu^2 sgn(x+y)u=0 \tag{33}$$

в $(D_+\cup D_{-1}\cup D_{-2})$,с краевыми условиями

$$u(1,\theta)=0,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}], \tag{34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0,y\in(-1,0)\bigcup(0,1), \tag{35}$$

$$u(0,y)=u(0,-y),y\in[0,1], \tag{36}$$

В классе функций

$$u\in C^0(\overline{D_+\bigcup D_{-1}\bigcup D_{-2}})\bigcap C^2(D_{-1})\bigcap C^2(D_{-2}),$$

где

$$D_+=\{(r,\theta)\ 0<r<1,0<\theta<\frac{\pi}{2}\},$$
$$D_{-1}=\{(x,y):-y<x<y+1,\frac{-1}{2}<y<0\},$$
$$D_{-2}=\{(x,y):x-1<y<-x,0<x<\frac{1}{2}\}.$$

С условием сопряжения на линии изменения типа уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),0<x<1, \tag{37}$$

В пункте 4.2 нахождение собственных значений и собственных функций.

Теорема 4.2.1. Собственные значения и собственные функции задачи (33)-(37) можно представить в виде двух серий :

в первой серии собственные значения $\lambda_{nk} = \mu_{nk}^2$ находятся из уравнения :

$$J_{4n}(\mu_{nk}) = 0, \tag{38}$$

где $n = 0, 1, 2, ..., k = 1, 2, ..., \mu_{nk}-$корень уравнения(38), $J_\alpha(z)-$ функции Бесселя [2],а собственные функции определяются формулой :

$$u_{nk} = \begin{cases} AJ_{4n}(\mu_{nk}r)\cos(4n)(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ в} D^+, \\ AJ_{4n}(\mu_{nk}\rho)\cosh(4n)\psi \text{ в} D_{-1}, \\ AJ_{4n}(\mu_{nk}R)\cosh(4n)\varphi \text{ в} D_{-2}, \end{cases} \tag{39}$$

во второй серии собственные значения $\tilde{\lambda}_{nk} = \tilde{\mu}_{nk}^2$ находятся из уравнения

$$J_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}) = 0, \tag{40}$$

где $n = 0, 1, 2, ..., k = 1, 2, ..., (\tilde{\mu}_{nk})-$корень уравнения(40), а собственные функции определяются формулой :

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}r)\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ в} D^+, \\ -AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}\rho)\sinh(4n+1)\psi \text{ в} D_{-1}, \\ AJ_{4n+1}(\tilde{\mu}_{nk}R)\cosh(4n+1)\varphi \text{ в} D_{-2}. \end{cases} \tag{41}$$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

при $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, r^2 = x^2 + y^2$ в D_+,

$$x = \rho\cosh\psi, y = \rho\sinh\psi,$$

при $0 < \rho < 1, -\infty < \psi < 0, \rho^2 = x^2 - y^2$в D_{-1},

$$x = R\sinh\varphi, y = -R\cosh\varphi,$$

при $0 < \varphi < +\infty, R^2 = y^2 - x^2$в$D_{-2}$.

В пункте 4.3 доказана полнота собственных функций.

Теорема 4.3.1. Система функций

$$\{\cos(4n)(\frac{\pi}{2} - \theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2} - \theta)\}_{n=0}^{\infty},$$

полна в пространстве $L_P(0, \frac{\pi}{2}), P > 1$,т.е. если

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n)(\frac{\pi}{2} - \theta)d\theta = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, ...,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n+1)(\frac{\pi}{2} - \theta)d\theta = 0,$$
$$n = 1, 2, ...,$$

$f \in L_P(0, \frac{\pi}{2}), P > 1$, то $f(\theta) = 0$ в $L_P(0, \frac{\pi}{2})$.

Лемма 4.3.1. Если $f(\theta) \in L_1(0, \frac{\pi}{2})$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\cos(4n)(\frac{\pi}{2} - \theta)d\theta = 0,$$

$n = 0, 1, 2, ...,$ то$f(\theta) = -f(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$$\forall f(\theta) \in L_1(0, \frac{\pi}{2}), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Теорема 4.3.2. Система собственных функций (39)-(41)задачи(33-37) полна в пространстве $L_2(D_+)$, т.е. если

$$\int_{D_+} f(r,\theta)u_{nk}(r,\theta)rd\theta dr = 0,$$
$$n = 1,2,..k = 1,2,..$$

$$\int_{D_+} f(r,\theta)\tilde{u}_{nk}(r,\theta)rd\theta dr = 0,$$
$$n = 0,1,2,...k = 1,2,...$$

а $f \in L_P(D_+), p > 2$, то $f = 0$ в D_+.

Пятая глава.

Полнота собственных функций задачи Франкля с условием нечетности

В пятой главе рассматриваются видоизмененные задачи Франкля с условием нечетности для уравнения Лаврентьева-Бицадзе .
В этой главе найдены собственные значения и собственные функции задачи Франкля с условием нечетности .
Доказана полнота собственных функций.
В пункте 5.1 дана постановка задачи Франкля с нелокальным условием нечетности для уравнения Лаврентьева -Бицадзе .

Постановка задачи. В области

$$D = (D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2})$$

требуется определить решение следующей видоизмененной задачи Франкля

$$u_{xx} + (sgn(y))u_{yy} + \mu^2 sgn(x+y)u = 0, \tag{42}$$

в $(D_+ \cup D_{-1} \cup D_{-2})$ с краевыми условиями

$$u(1,\theta) = 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \tag{43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, y \in (-1,1) \tag{44}$$

$$u(0,y) = -u(0,-y), y \in [0,1], \tag{45}$$

функция $u(x,y)-$ регулярное решение из класса

$$u \in C^0(\overline{D_+ \bigcup D_{-1} \bigcup D_{-2}}) \bigcap C^2(D_+) \bigcap C^2(D_-)$$

и $u(x,+0) = -u(x,-0)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), 0 < x < 1 \tag{46}$$

$$D_+ = \{(r,\theta)\ 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\},$$

$$D_{-1} = \{(x,y) : -y < x < y+1, \frac{-1}{2} < y < 0\},$$

$$D_{-2} = \{(x,y) : x-1 < y < -x, 0 < x < \frac{1}{2}\}.$$

В пункте 5.2 нахождение собственных значений и собственных функций.

Теорема 5.2.1. Собственные значения и собственные функции задачи (42-46) можно выписать в виде двух серий :
в первой серии собственные значения μ_{nk}^2 определяются из уравнения (47).

$$J_{\lambda_n}(\mu_{nk}) = 0, \tag{47}$$

где $\lambda_n = -1 + 4n, n = 1, 2, ..., k = 1, 2, ..$ где $J_{\lambda_n}(z)$ функции Бесселя [2],а собственные функции опредляются по формуле

$$u_{nk} = \begin{cases} AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk} r) \cos \lambda_n (\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ в } D^+, \\ AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk} \rho) \sinh \lambda_n \psi \text{ в } D_{-1}, \\ -AJ_{\lambda_n}(\mu_{nk} R) \cosh \lambda_n \varphi \text{ в } D_{-2}, \end{cases} \tag{48}$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r^2 = x^2 + y^2$ в D_+,а

$$x = \rho \cosh \psi, y = \rho \sinh \psi,$$

при $0 < \rho < 1, -\infty < \psi < 0, \rho^2 = x^2 - y^2$ вD_{-1},а

$$x = R \sinh \varphi, y = -R \cosh \varphi, \tag{49}$$

при $0 < \varphi < +\infty, R^2 = y^2 - x^2$ в D_{-2}.

Во второй серии собственные значения $\tilde{\mu}_{nk}^2$ находятся из уравнения(50).

$$J_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk}) = 0, \tag{50}$$

где $\tilde{\lambda}_n = 2 + 4n, n = 0, 1, 2, ...k = 1, 2, ...$,а собственные функции определяются по формуле

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk} r) \cos \tilde{\lambda}_n (\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ в} D^+, \\ -AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk} \rho) \cosh \tilde{\lambda}_n (\psi) \text{ в} D_{-1}, \\ -AJ_{\tilde{\lambda}_n}(\tilde{\mu}_{nk} R) \cosh \tilde{\lambda}_n (\varphi) \text{ в} D_{-2}. \end{cases} \tag{51}$$

В пункте 5.3 доказана полнота собственных функций.

Теорема 5.3.1. Если $f(\theta) \in L_p(0, \frac{\pi}{2}), p > 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \cos(4n+2)(\frac{\pi}{2} - \theta) d\theta = 0, n = 0, 1, 2, ...,$$

то,$f(\theta) = f(\frac{\pi}{2} - \theta)$,

$$\forall f(\theta) \in L_p(0, \frac{\pi}{2}).$$

Теорема 5.3.2. Если

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \cos(4n+2)(\frac{\pi}{2} - \theta) d\theta = 0, n = 0, 1, 2, ...$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \cos(4n-1)(\frac{\pi}{2} - \theta) d\theta = 0, n = 1, 2, ...$$

то, $f(\theta) = 0$, в $L_P(0, \frac{\pi}{2})$,

$$\forall f \in L_P(0, \frac{\pi}{2}), P > 2.$$

Теорема 5.3.3. Система собственных функций (48)-(51) задачи (42-46) полна в $L_P(D_+)$,т.е.,если

$$\int_{D_+} f(r,\theta) u_{nk}(r,\theta) r d\theta dr = 0,$$
$$n = 1, 2, ...k = 1, 2, ...$$

$$\int_{D_+} f(r,\theta) \tilde{u}_{nk}(r,\theta) r d\theta dr = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, ...k = 1, 2, ...$$

а $f \in L_P(D_+), p > 2$, то $f = 0$ в D_+.

Благодарности

Автор рад представившейся возможности выразить благодарность своему научному руководителю академику РАН Е.И.Моисееву за постановку задач,постоянное внимание к работе и полезные советы.Также автор благодарен всем сотрудникам кафедр общей математики и функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени.М.В.Ломоносова. Моя огромная благодарность моей жене Фарахназ за любовь,поддержку,доброту, понимание и терпение,и своему доброму сыну Мохаммаду.

Публикации по теме диссертации. Основные научные результаты,подготовлены , оформлены в пяти статьях и опубликованы.

1. Моисеев Е.И.,Аббаси.Н. О базисности собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности //Дифференц уравнения. 2008.Т.44.№6.С 831-836.

2.Моисеев Е.И.,Аббаси.Н. Базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием нечетности и с разрывом градиента решения //Дифференц уравнения.2008.Т.44.№10.С.1399-1404.

3.Моисеев Е.И.,Аббаси.Н. О полноте собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом градиента решения//Integral transforms and special functions.2009. vol.20.Issue.2.C.155-160.

4.Моисеев Е.И.,Аббаси.Н. О полноте собственных функций задачи Франкля с условием нечетности //Дифференц уравнения.2008. Т.44.№3.С.408-412.

5.Аббаси.Н. Базисности и полноте собственных функций задачи Франкля //Докл.АН.2009.Т.79,№.2,С.1-4.