Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи.
УДК 519.63

Мокин Андрей Юрьевич

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Специальность: 01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор Гулин Алексей Владимирович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор Ломов Игорь Сергеевич;
доктор физико-математических наук
Змитренко Николай Васильевич

Ведущая организация:

Институт проблем безопасного развития
атомной энергетики РАН.

Защита диссертации состоится “ ” 2009 года в часов минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-ой гуманитарный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан “ ” 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.43
доктор физико-математических наук
профессор

Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время внимание как отечественных, так и зарубежных учёных привлекают задачи математической физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. К ним относятся краевые задачи с условием Бицадзе-Самарского, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы. Не менее актуальным является исследование численных методов решения задач с нелокальными дополнительными условиями, к числу которых относятся конечно-разностные схемы.

Следует отметить отсутствие каких-либо универсальных методов исследования как дифференциальных задач с неклассическими условиями, так и разностных схем, их аппроксимирующих. Существуют принципиальные трудности для применения традиционных методов, таких как метод потенциалов, метод разделения переменных, принцип максимума и метод энергетических неравенств. Это свойство неклассических задач связано, в первую очередь, с большой свободой выбора и существующим чрезвычайным многообразием дополнительных условий. Имеет смысл выделить для изучения некоторый класс нелокальных задач математической физики и соответствующих разностных схем.

Естественным обобщением классических постановок для одномерных по пространству начально-краевых задач является класс задач с двухточечными граничными условиями. Задачи данного типа многократно изучались ранее. В частности, в работах Моисеева Е.И., Ионкина Н.И. рассмотрена начально-краевая задача с двухточечными граничными условиями общего вида для уравнения параболического типа с переменным потенциалом. В предположении усиленной регулярности граничных условий доказана корректность постановки.

Наименее изученными являются те задачи, граничные условия которых не обладают свойством усиленной регулярности. Одна из первых задач такого типа, известная как задача Самарского-Ионкина, была исследована в 70-х годах 20 века. В диссертации рассматривается её обобщение, которое представляет собой начально-краевую задачу для одномерного по пространству уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями, содержащими параметр α. Параметр предполагается вещественным числом. Нулевое значение параметра соответствует задаче Самарского-

Ионкина. Особенность обобщения заключается в том, что краевые условия задачи не являются усиленно регулярными ни при каком значении $\alpha \in \mathrm{R}$, однако в пределе при $\alpha \to \infty$ становятся условиями первого рода.

При каждом вещественном $\alpha \neq 0$ в работе рассматривается вопрос существования регулярного решения дифференциальной задачи, его единственность и устойчивость по начальным данным.

Центральное место в диссертации отведено изучению корректности разностных схем, аппроксимирующих дифференциальную задачу, обобщающую задачу Самарского-Ионкина. Ключевым моментом исследований является выбор сеточной нормы, в которой изучается устойчивость, доказательство необходимых и достаточных условий устойчивости, а также анализ свойств норм, гарантирующих устойчивость. Особенность разностных схем заключается в их несамосопряжённости, что делает невозможным использование существующих методов изучения устойчивости самосопряжённых разностных задач и требует разработки новых методов.

Рассмотренное в диссертации семейство схем с весами при нулевом значении параметра α совпадает с разностными схемами, исследованными ранее в работах Гулина А.В., Ионкина Н.И., Морозовой В.А., где доказано существование, единственность разностного решения и его устойчивость как в специальных нормах пространства сеточных функций, так и в сеточной среднеквадратической норме.

Диссертация представляет собой дальнейшее развитие тех идей и методов исследования нелокальных краевых задач и несамосопряжённых разностных схем, аппроксимирующих их, которые были предложены и хорошо себя зарекомендовали в случае $\alpha = 0$.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является нелокальная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности, а также семейство разностных схем, аппроксимирующих данную задачу. Предметом исследования является корректность рассмотренных в диссертации задач.

Цель работы. Доказать существование, единственность и исследовать условия устойчивости по начальным данным дифференциальной задачи и аппроксимирующих её разностных схем.

Методы исследования. Корректность постановки начально-краевой задачи изучается методом разделения переменных, адаптированным для применения к задачам, краевые условия которых не являются усиленно регулярными. Изучение условий устойчивости решения осуществляется с использованием свойств координат базиса Рисса (базиса безусловной сходимости).

Разностные схемы, аппроксимирующие дифференциальную задачу, исследуются с позиций общей теории устойчивости операторно-разностных схем, разработанной в работах Самарского А.А. и Гулина А.В. Изучение свойств норм, в которых исследуется устойчивость схем, основано на разностном аналоге принципа квадратичной близости систем функций.

Научная новизна. Научной новизной обладают методы исследования рассмотренных в диссертации задач. Трудности, возникшие при попытке применить метод разделения переменных для решения нелокальной краевой задачи, привели к необходимости его модернизации. Существенную модификацию претерпел метод операторных неравенств исследования устойчивости разностных схем. Особое внимание заслуживает способ изучения свойств сеточных норм, в которых исследуется устойчивость разностных схем. В частности, обладает научной новизной способ вычисления констант эквивалентности норм, основанный на разностном аналоге принципа квадратичной близости систем функций.

Теоретическая значимость. В диссертации реализован новый метод исследования свойств нелокальных краевых задач как в дифференциальной, так и в разностной трактовке, который был получен в результате модернизации уже существующих методов. Разработанный метод может быть использован при изучении корректности задач математической физики с неклассическими дополнительными условиями и аппроксимирующих их разностных схем.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Практической значимостью обладают аналитические методы исследования корректности, разработанные в диссертации. Основной сферой применения методов являются начально-краевые задачи для одномерных по пространству уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x u, \quad u = u(x,t)$$

с неклассическими дополнительными условиями, а также аппроксимирующие их конечно-разностные схемы. Возможность использования разработанных методов и качество результата определяется, во многом, объёмом известной информации о спектральных свойствах дифференциального оператора L_x и его разностного аналога.

Достоверность научных результатов обеспечена математической строгостью доказательства теорем, которые содержат основные результаты работы. В диссертации не использованы факты, полученные эмпирическим путём или же с помощью компьютерных вычислений.

Основные положения, выносимые на защиту:
1. Аналитический метод исследования существования и единственности, а также устойчивости начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями;
2. Аналитический метод изучения устойчивости несамосопряжённых двухслойных разностных схем;
3. Метод вычисления констант эквивалентности сеточных норм, основанный на разностном аналоге принципа квадратичной близости.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации доложены на конференциях "Тихоновские чтения" в 2006, 2007, 2008 годах, на 15 и 16 конференциях "Математика.Компьютер.Образование", а также на научных семинарах кафедры Вычислительных методов, кафедры Общей математики факультета ВМиК МГУ и кафедры Вычислительной математики механико-математического факультета МГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. В главах работы использована сквозная двойная нумерация лемм, теорем, определений и формул, в которой первая часть номера соответствует номеру главы, вторая часть указывает на порядковый номер в главе. Каждый раздел диссертации обладает уникальной системой обозначения. Список литературы состоит из 69 наименований. Общий объём работы равен 108 страницам.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится обзор литературы по теме диссертации, обосновывается актуальность исследований и излагаются основные результаты.

В первой главе "Согласованность норм при исследовании устойчивости задачи Самарского-Ионкина" изучается вопрос равномерной устойчивости задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t), \qquad 0 < t \leqslant T \end{aligned} \tag{1}$$

в смысле следующего определения.

Определение 1. *Задача (1) называется равномерно устойчивой в линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$, если её регулярное решение $u(x,t)$ при каждом $t \geqslant 0$ принадлежит $\mathcal{L}$ и удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x,t_2)\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|u(x,t_1)\|_{\mathcal{L}}, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty.$$

Там же рассматривается проблема согласованности сеточной нормы $\|\cdot\|_{D_h}$, которая возникает при исследовании устойчивости разностной схемы

$$\begin{aligned}
&y^n_{t,i} = \sigma y^{n+1}_{\overline{x}x,i} + (1-\sigma) y^n_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1,\\
&0.5h y^n_{t,N} = \sigma\big(y^{n+1}_{x,0} - y^{n+1}_{\overline{x},N}\big) + (1-\sigma)\big(y^n_{x,0} - y^n_{\overline{x},N}\big),\\
&n = 0,1,2,\ldots,M-1,\\
&y^n_0 = 0, \quad y^0_i = \varphi(ih), \quad n = 0,1,2,\ldots,M,\ i = 1,2,\ldots,N,
\end{aligned} \tag{2}$$

аппроксимирующей задачу (1) на равномерной сетке.

В главе I определена гильбертова норма $\|\cdot\|_D$ в линейном пространстве функций, интегрируемых с квадратом по $[0,1]$, эквивалентная среднеквадратической норме $L_2[0,1]$. Сформулированы и доказаны теоремы:

Теорема 1. *Решение задачи (1) при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty$ удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x,t_2)\|_D \leqslant \|u(x,t_1)\|_D. \tag{3}$$

Теорема 2. *Нормы $\|\cdot\|_D$, $\|\cdot\|_{D_h}$, обеспечивающие устойчивость задачи (1) и аппроксимирующей её схемы (2) соответственно, являются согласованными в классе функций, интегрируемых по Риману на $[0,1]$.*

Вторая глава диссертации называется "Семейство начально-краевых задач для уравнения теплопроводности" и посвящена изучению корректности задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$$\alpha u(1,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t), \qquad u(0,t) = 0,\ t > 0 \tag{5}$$

при каждом вещественном $\alpha \neq 0$. Существование и единственность решения доказано модернизированным методом разделения переменных. Предварительно рассмотрена задача на собственные значения

$$\begin{aligned}
&u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
&u(0) = 0, \quad u'(0) = u'(1) + \alpha u(1).
\end{aligned} \tag{6}$$

Показано, что если $\alpha \neq 0$, то все собственные значения $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$ вещественные и простые. Собственные функции u_k, $k = 1, 2, \dots$ при любом отличном от нуля α образуют полную и линейно независимую систему. Особенность системы собственных функций заключается в том, что она не является базисом Рисса пространства $L_2[0,1]$ (то есть базисом безусловной сходимости) ни при каком значении параметра α.

Проблема базисности (отсутствие безусловной базисности) системы собственных функций задачи (6) существенно осложняет построение и исследование регулярного решения задачи (4), (5). Необходимо отметить, что эта проблема характерна не только для задачи с постоянными коэффициентами (6), но и в случае аналогичных краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля общего вида.

Во второй главе предложен и реализован модернизированный метод разделения переменных для поиска решения задачи (4), (5). Метод заключается в представлении решения в виде функционального ряда по вспомогательной системе функций $\{w_k(x),\ k = 1, 2, \dots\}$ с коэффициентами, зависящими от переменной t. Каждая из вспомогательных функций представляет собой линейную комбинацию не более, чем двух собственных функций задачи (6), отвечающих различным собственным значениям. Система $\{w_k(x),\ k = 1, 2, \dots\}$ построена таким образом, что является базисом Рисса при любом $\alpha \neq 0$ и допускает применение метода разделения переменных.

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 3. *Если существует регулярное решение задачи (4), (5), то оно единственно и представимо в виде ряда*

$$u(x,t) = w_1(x)T_1(t) + w_2(x)T_2(t) + \dots,$$

в котором коэффициенты $T_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$ однозначно определяются функцией $\varphi(x)$.

Теорема 4. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и удовлетворяет граничным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) + \alpha\varphi(1)$, то задача (4), (5) имеет регулярное решение.*

Там же рассмотрен вопрос устойчивости решения задачи (4), (5) в смысле определения 1. На классе функций, интегрируемых с квадратом по $[0,1]$, определена энергетическая норма $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}_{L_2[0,1]}$, где $D = D^*$ – положительно определённый оператор, действующий в пространстве $L_2[0,1]$, и доказана теорема устойчивости.

Теорема 5. *Пусть $\alpha > 0$. Если регулярное решение задачи (4), (5) существует, то оно удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x,t_2)\|_D \leqslant \|u(x,t_1)\|_D, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty.$$

Следствием теоремы 5 и эквивалентности норм $\|\cdot\|_D$, $\|\cdot\|_{L_2[0,1]}$, заданных на классе функций $L_2[0,1]$, является

Теорема 6. *Решение задачи (4), (5) при положительных α является устойчивым по начальным данным в норме пространства $L_2[0,1]$, то есть удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,1]} \leqslant C\|\varphi(x)\|_{L_2[0,1]}, \tag{7}$$

при всех $t > 0$ с константой $C > 0$, не зависящей от выбора $\varphi(x)$.

В случае $\alpha < 0$ в спектре задачи (6) присутствует отрицательное собственное значение. Отсюда вытекает неустойчивость задачи (4), (5) в смысле определения 1. Единственность отрицательного собственного значения позволяет доказать ограниченный рост регулярного решения в норме $L_2[0,1]$ на конечном отрезке времени. Справедлива

Теорема 7. *Пусть $\alpha < 0$, $T > 0$ – фиксированное число. Регулярное решение задачи (4), (5) при $0 < t \leqslant T$ удовлетворяет неравенству (7) с константой $C = C(T)$, имеющей экспоненциальный рост по T.*

В третьей главе "Разностные схемы для нелокальной краевой задачи" изучается корректность семейства разностных схем

$$\begin{aligned}
&y^n_{t,i} = \sigma y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma) y^n_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1,\\
&0.5hy^n_{t,N} = \sigma\big(y^{n+1}_{x,0} - y^{n+1}_{\bar{x},N} - \alpha y^{n+1}_N\big) + (1-\sigma)\big(y^n_{x,0} - y^n_{\bar{x},N} - \alpha y^n_N\big),\\
&n = 0,1,2,\ldots,M-1,\\
&y^n_0 = 0, \quad y^0_i = \varphi(ih), \quad n = 0,1,2,\ldots,M,\ i = 1,2,\ldots,N,
\end{aligned} \tag{8}$$

аппроксимирующих задачу (4), (5) на равномерной сетке. Особое внимание уделяется доказательству необходимых и достаточных условий устойчивости схем.

Поскольку исходная дифференциальная задача (4), (5) не является корректной при $\alpha < 0$, то схемы (8) рассматриваются только для положительных α.

В основе исследований свойств схемы (8) находится общая теория устойчивости операторно-разностных схем. Пусть H – линейное пространство функций, заданных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ h = 1/N\}$, снабжённое скалярным произведением и нормой

$$\|u\|_{L_2^h} = \sqrt{(u,u)_{L_2^h}}, \quad (u,v)_{L_2^h} = \sum_{i=1}^{N-1} hu(x_i)v(x_i) + 0.5hu(x_N)v(x_N). \tag{9}$$

Разностную схему (8) удобно представить и изучать в операторном виде

$$\begin{aligned} &\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1-\sigma)Ay^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1,\\ &y^k = y(x, t_k),\ x \in \omega_h,\ k = 0, 1, 2, \ldots, M, \quad y^0 = \varphi(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где оператор $A : H \to H$ определён равенствами

$$\begin{aligned} &\big(Ay\big)(x_j) = -\big(y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1})\big)/h^2, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,\\ &\big(Ay\big)(x_N) = 2h^{-1}\big((y(x_N) - y(x_{N-1}))/h - (y(x_1) - y(x_0))/h + \alpha y(x_N)\big), \end{aligned}$$

в которых $y(x_0) = 0$.

Основная особенность семейства схем (10) заключается в том, что оператор A не является самосопряжённым ни при каком $\alpha > 0$, что существенно осложняет исследование свойств схем.

Операторно-разностный подход к изучению свойств схем (8) основан на спектральных характеристиках оператора A. В главе рассмотрена задача на собственные значения для оператора A. Доказано, что при любом $\alpha > 0$ все собственные числа вещественные и положительные, каждому из них отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция. Совокупность собственных функций образует базис пространства H. При нечётных N и $\alpha > 2$, а также при чётных N и любых $\alpha > 0$ максимальное по величине собственное значение Λ оператора A больше, чем $4/h^2$.

Из положительности спектра оператора A следует существование и единственность решения разностной схемы (10) при $\tau, h > 0$, $\sigma \geqslant 0$ и любой сеточной функции $y^0 = \varphi(x)$.

Рассматривается вопрос равномерной устойчивости семейства схем с весами (10) в пространствах H_D, каждое из которых представляет собой пространство H, снабжённое евклидовой нормой

$$\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)_{L_2^h}}, \quad D = D^* > 0.$$

Определение 2. *Разностная схема (10) называется равномерно устойчивой в норме $\|\cdot\|_D$ пространства H_D, если её решение $y^n = y(x, t_n)$, $n = 1, 2, \ldots, M$, отвечающее любому значению $y^0 = \varphi(x)$, удовлетворяет неравенству*

$$\|y^{n+1}\|_D \leqslant \|y^n\|_D, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1.$$

Актуальность изучения равномерной устойчивости разностных схем объясняется тем, что из определения 2 вытекает устойчивость по начальным данным, по правой части и, следовательно, сходимость схем. С другой стороны, известно, что устойчивая по начальным данным разностная схема является равномерно устойчивой в некотором пространстве H_D.

Следствием существования базиса из собственных функций оператора A является *симметризуемость* схемы (10).

Определение 3. *Разностная схема (10) называется симметризуемой, если её оператор перехода $S = E - \tau(E + \tau\sigma A)^{-1}A$ подобен самосопряжённому, то есть существует невырожденный оператор $K : H \to H$ такой, что $(K^{-1}SK)^* = K^{-1}SK$.*

В результате исследования схемы (10) как симметризуемой схемы с весами, доказана

Теорема 8. *Необходимым условием равномерной устойчивости схемы (10) в пространствах H_D является неравенство*

$$\sigma \geqslant 0.5 - 1/(\tau\Lambda), \tag{11}$$

где через Λ обозначено наибольшее по величине собственное число оператора A. Неравенство (11) совпадает с достаточным условием устойчивости при $D = (KK^*)^{-1}$, где K – любой невырожденный оператор, удовлетворяющий условию $(K^{-1}AK)^* = K^{-1}AK$.

В теореме утверждается, что условие равномерной устойчивости (11) не может быть ослаблено за счёт выбора оператора энергетической нормы D, а также гарантируется существование непустого множества энергетических норм, в которых условие устойчивости имеет вид (11).

Разностные схемы (10) обладают одним из отрицательных качеств задачи (4), (5), которым является проблема базисности системы собственных функций. В разностном случае проблема базисности заключается в том, что собственные функции оператора A становятся линейно зависимыми и теряют свойство базисности как при $\alpha \to +0$ (h – фиксировано), так и при $h \to 0$ (α – фиксировано). Следствием этого свойства собственных функций является дефект сеточных норм $\|\cdot\|_D$, равномерная устойчивость в которых гарантируется теоремой 8. Справедлива

Теорема 9. *Пусть норма $\|\cdot\|_D$ определена равенством*

$$\|y\|_D = \sqrt{\big(Dy, y\big)_{L_2^h}}, \quad D = (KK^*)^{-1},$$

где K – любой невырожденный оператор, удовлетворяющий условию $(K^{-1}AK)^* = K^{-1}AK$. Тогда дробь $M(h)/m(h)$, где

$$m(h) = \inf_{y\neq 0} \frac{\|y\|_D}{\|y\|_{L_2^h}}, \quad M(h) = \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|_D}{\|y\|_{L_2^h}},$$

является бесконечно большой величиной при $h \to 0$ (α – фиксировано), а также при $\alpha \to +0$ (h – фиксировано).

При каждом положительном α определена энергетическая норма $\|\cdot\|_\alpha$ пространства H, удовлетворяющей требованиям:
1. Её константы эквивалентности с нормой L_2^h не зависят от выбора $h > 0$ и не имеют особенности при $\alpha \to +0$;
2. Семейство схем (10) равномерно устойчиво в данной норме при выполнении условий, близких к необходимому условию (11).

В результате исследования равномерной устойчивости разностных схем (10) в норме $\|\cdot\|_\alpha$ доказана

Теорема 10. *Семейство схем (10) является равномерно устойчивым в норме $\|\cdot\|_\alpha$, если его параметры удовлетворяют неравенству*

$$\sigma \geqslant 0.5 - h^2/(4\tau) \tag{12}$$

при нечётном N и $0 < \alpha < 2$, или же неравенству (11) в противном случае (то есть при $N = 2m+1$, $\alpha \geqslant 2$, а также при $N = 2m$, $\alpha > 0$).

Следствие. *Для равномерной устойчивости семейства схем (10) в норме $\|\cdot\|_\alpha$ достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\begin{aligned} \sigma \geqslant 0.5 - h^2/(4\tau), &\quad N = 2m+1,\ 0 < \alpha \leqslant 2, \\ \sigma \geqslant 0.5 - \frac{h^2}{4\tau}\Big(1 - \operatorname{th}^2(h\max[\alpha, \sqrt{\alpha}])\Big), &\quad N = 2m+1,\ \alpha > 2, \\ &\quad N = 2m,\ \alpha > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

В главе рассмотрена задача вычисления констант эквивалентности норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_{L_2^h}$. Справедлива

Теорема 11. *Пусть α_0 – любое положительное число. Существуют константы $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$, не зависящие от выбора $h > 0$, такие, что неравенства*

$$\kappa_1 \|y\|_{L_2^h} \leqslant \|y\|_\alpha \leqslant \kappa_2 \|y\|_{L_2^h}$$

выполняются для любой $y(x) \in H$ и при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Следствием теорем 10, 11 является

Теорема 12. *Пусть $\alpha \in (0, \alpha_0)$, где α_0 – любое положительное число. Если параметры разностной схемы (10) удовлетворяют условиям*

$$\begin{array}{lll} \sigma & \geqslant & 0.5 - h^2/(4\tau), \quad N = 2m+1, \ 0 < \alpha < 2, \\ \sigma & \geqslant & 0.5 - 1/(\tau\Lambda), \quad N = 2m+1, \ \alpha \geqslant 2, \\ & & \qquad\qquad\qquad N = 2m, \ \alpha > 0, \end{array} \tag{14}$$

где Λ – максимальное по величине собственное число оператора A, то схема является устойчивой по начальным данным в пространстве H_N, а именно, её решение $y^n = y(x_i, t_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, M$ при любом выборе $y^0 \in H$, удовлетворяет неравенству $\|y^n\|_{L_2^h} \leqslant C \|y^0\|_{L_2^h}$, $n = 1, 2, \ldots, M$ с константой $C > 0$, не зависящей от выбора $h, \tau > 0$ и параметра α.

Теорема 12 остаётся справедливой в том случае, если условия устойчивости (14) заменить на неравенство

$$\sigma \geqslant 0.5 - \frac{h^2}{4\tau}\Big(1 - \mathrm{th}^2\left(h \max\left[\alpha_0, \sqrt{\alpha_0}\,\right]\right)\Big).$$

Основные результаты работы:

1. Установлена согласованность сеточной нормы, возникающей при исследовании устойчивости разностной схемы для задачи Самарского-Ионкина, с эквивалентной нормой в пространстве $L_2[0,1]$. Свойство согласованности доказано на классе функций, интегрируемых по Риману на $[0,1]$.
2. Исследовано однопараметрическое семейство нелокальных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности, граничные условия которых не являются усиленно регулярными. Доказано существование, единственность и устойчивость классического решения.
3. Найдены условия устойчивости разностных схем, аппроксимирующих однопараметрическое семейство нелокальных задач для уравнения теплопроводности. Получено семейство евклидовых сеточных норм, в которых необходимое условие устойчивости совпадает с достаточным. Исследована зависимость констант эквивалентности данных норм с сеточной среднеквадратической нормой от выбора шага сетки по пространственной переменной.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мокин А.Ю. Согласованность норм при исследовании разностных схем для задачи Самарского–Ионкина. Дифференциальные уравнения, Т.42, №7, 2006, с. 969-978.

2. Мокин А.Ю. О неустойчивости схем с весами для задачи Самарского–Ионкина. Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ, выпуск 3. М., 2006, с. 103-110.

3. Мокин А.Ю. Неустойчивость в H_E разностных схем с нелокальными граничными условиями. Тезисы 14 международной конференции Математика.Компьютер.Образование. Изд. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Москва–Ижевск, 2007, с. 14.

4. Мокин А.Ю. Неустойчивость в H_E разностных схем с нелокальными граничными условиями. Труды 14 международной конференции "Математика. Компьютер. Оборазование."Сб. научных трудов,том 2. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2007, с. 68-73.

5. Мокин А.Ю. Метод разделения переменных для задач с нелокальными граничными условиями. Труды 15 международной конференции "Математика.Компьютер.Образование". Изд. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск 2008, Т.2, с. 46-54.

6. Гулин А.В. Мокин А.Ю. Об устойчивости семейства разностных схем с весами. Прикладная математика и информатика: труды ф-та ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова. №29, 2008, с.64-87.

7. Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Дифференциальные уравнения. Т.45, №1, 2009, с.123-137.

8. Мокин А.Ю. Об устойчивости разностных схем с нелокальными граничными условиями. Тезисы 16 международной конференции "Математика.Компьютер.Образование". Изд. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск 2009, с.156.