Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Дайняк Александр Борисович

Оценки числа независимых множеств в графах из некоторых классов

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сапоженко Александр Антонович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, руководитель отдела ИСП РАН Кузюрин Николай Николаевич
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ВЦ РАН Вялый Михаил Николаевич
Ведущая организация:	Институт системного анализа РАН

Защита диссертации состоится 9 октября 2009 г. в 11 : 00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан 7 сентября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Трифонов Н. П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Рассматриваемые в диссертации вопросы относятся к перечислительной и экстремальной теории графов. Доказываются верхние и нижние оценки числа независимых множеств (то есть подмножеств попарно не смежных вершин) в графах из различных классов, и описывается структура графов, на которых достигаются полученные оценки.

Исследования в области перечисления независимых множеств в графах ведутся с середины прошлого века. Результаты этих исследований находят приложения не только непосредственно в математике (комбинаторная теория чисел, теория кодирования, теоретическая информатика), но и в других областях. Так, например, в теоретической химии важными характеристиками соединений являются индексы Мэррифилда–Симмонса,[1] и Хосойи[2], которые есть не что иное, как число независимых множеств в соответствующих графах.

Подмножество попарно несмежных вершин графа называется *независимым.* Под *максимальными независимыми множествами* (м. н. м.) понимаются максимальные по включению независимые множества. Максимальный размер независимого множества в графе называется *числом независимости* графа. Будем обозначать через $\alpha(G)$ число независимости графа G. Через $i(G)$ и $i_M(G)$ будем обозначать число независимых множеств и число м. н. м. в G соответственно.

Одними из первых работ в области перечисления независимых множеств являются статьи[3] Миллера, Маллера и Муна, Мозера, в которых независимо был доказан следующий факт.

Теорема (Р. Е. Миллер, Д. Е. Маллер и Дж. У. Мун, Л. Мозер)**.** *Пусть G — граф на n вершинах, имеющий максимальное число м. н. м. среди всех n–вершинных графов. Тогда G является*

объединением $n/3$ копий графа K_3 при $n \equiv 0 \pmod 3$,

объединением графа K_2 и $(n-2)/3$ копий K_3 при $n \equiv 2 \pmod 3$,

объединением $(n-4)$ копий графа K_3 и либо графа K_4, либо двух графов K_2 при $n \equiv 1 \pmod 3$.

[1] Merrifield R. E., Simmons H. E. Topological methods in chemistry, New York, John Wiley & Sons, 1989.

[2] Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons //Bull. Chem. Soc. Jpn. 1971. 44(9). P. 2332–2339.

[3] Miller R. E., Muller D. E. The problem of maximum consistent subsets — IBM Research Report RC-240. 1960. J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y.

Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965. 3. P. 23–28.

Экстремальные графы в приведённой выше теореме являются частным случаем графов $UK_{n,\alpha}$, определяемых следующим образом: $UK_{n,\alpha}$ суть объединение $(\alpha\cdot(\lfloor n/\alpha\rfloor+1)-n)$ клик размера $\lfloor n/\alpha\rfloor$ и $(n-\alpha\cdot\lfloor n/\alpha\rfloor)$ клик размера $\lceil n/\alpha\rceil$. Можно проверить, что $n(UK_{n,\alpha}) = n$, $\alpha(UK_{n,\alpha}) = \alpha$.

Теорема Муна–Мозера обобщалась в различных направлениях несколькими авторами. Так, например, К. Кройтору[4] получил верхние оценки числа м. н. м. в классе всех графов с заданным числом независимости. Дж. М. Нильсен получила[5] достижимую верхнюю оценку числа м. н. м. заданного размера в графах. В обеих указанных задачах максимум достигается на графе $UK_{n,\alpha}$. Подобные результаты используются для получения оценок времени работы алгоритмов раскраски графов и определения мощности максимального независимого множества (см., например, работы Д. Эппштейна[6] и Дж. М. Нильсен).

Интерес представляет также получение оценок числа м. н. м. в классах графов, описанных в терминах запрещённых подграфов. М. Гуйтером и Ж. Тузой была получена[7] оценка числа м. н. м. в графах без треугольников (то есть в графах, не содержащих K_3 в качестве подграфа). В. Е. Алексеев исследовал[8] число м. н. м. в графах, не содержащих «большого» паросочетания (объединения графов K_2) в качестве порождённого подграфа.

Исследовался вопрос о числе независимых множеств в графах с небольшим числом циклов, в первую очередь, деревьев. В работе Г. Продингера и Р. Ф. Тичи[9] были получены верхние и нижние оценки числа независимых множеств в деревьях с заданным числом вершин. Через ϕ_n обозначим $(n+2)$-ое число Фибоначчи ($\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} + \phi_{n-2}$ при $n \geqslant 2$).

Теорема (Г. Продингер, Р. Тичи)**.** *Пусть T — дерево на n вершинах. Тогда $\phi_n \leqslant i(T) \leqslant 2^{n-1}+1$, причём равенство $i(T) = \phi_n$ имеет место*

[4] Croitoru C. On stables in graphs // Proc. Third Coll. Operations Research, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania. 1979. P. 55–60.

[5] Nielsen J. M. On the number of maximal independent sets in a graph. Preprint. Research Series RS-02–15, BRICS. Aarhus, Denmark: University of Aarhus, Department of Computer Science, 2002. 10p.

[6] Eppstein D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring // J. Graph Algorithms and Applications (special issue for WADS'01) 2003. 7(2). P. 131–140.

[7] Hujter M., Tuza Ž. The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM J. Discr. Math. 1993. 6(2). P. 284–288.

[8] Алексеев В. Е. Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа // Дискретная математика. 2007. Т. 19. Вып. 3. С. 84–88.

[9] Prodinger H., Tichy R. F., Fibonacci numbers of graphs // Fibonacci Quart. 1982. 20(1). P. 16-–21.

только в случае, если T является простой цепью, а равенство $i(T) = 2^{n-1}+1$ лишь в случае когда T — звезда.

В той же статье было найдено число независимых множеств в цикле на n вершинах. По-видимому, со статьи Продингера и Тичи берёт начало использование термина «число Фибоначчи графа» в качестве синонима для числа независимых множеств.

В статье Г. С. Вильфа была получена[10] верхняя оценка числа максимальных независимых множеств в деревьях с заданным числом вершин:

Теорема (Г. С. Вильф). *Для любого дерева T на n вершинах выполнены неравенства $i_M(T) \leqslant 2^{(n-1)/2}$ при нечётных n, и $i_M(T) \leqslant 1 + 2^{(n-2)/2}$ при чётных n.*

Оригинальное доказательство этой теоремы основывалось на свойствах разбиений натуральных чисел. Б. Е. Саган, используя теоретико–графовые рассуждения, упростил доказательство теоремы Вильфа и полностью охарактеризовал деревья, на которых достигается верхняя оценка.[11] В недавней работе Сагана, Инга, Менга и Ваттера[12] теоремы Вильфа и Муна–Мозера одновременно обобщались на случай связных графов с заданным числом циклов. Для каждых фиксированных n и r были указаны графы, на которых достигается максимум числа м. н. м. в классе всех связных n–вершинных графов с r циклами.

Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_{d-1}\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_q\}$. Обозначим через $B_{d,p,q}$ дерево на множестве вершин $U \cup V \cup W$, такое, что его поддеревья, порождённые множествами $\{u_1\} \cup V$, $\{u_{d-1}\} \cup W$ и U представляют собой соответственно звёзды $K_{1,p}$, $K_{1,q}$ и цепь P_{d-1}. Отметим, что $B_{d,1,1}$ есть просто цепь длины d. П. Д. Вестергардом и А. С. Педерсеном была получена[13] следующая верхняя оценка числа независимых множеств в деревьях заданного диаметра:

Теорема (П. Д. Вестергард, А. С. Педерсен). *Для любого n–вершинного дерева T диаметра d выполнено неравенство $i(T) \leqslant i(B_{d,n-d,1})$, обращающееся в равенство только если T изоморфно $B_{d,n-d,1}$.*

[10] Wilf H. S. The number of maximal independent sets in a tree // SIAM J. Alg. Discr. Methods 1986. 7. P. 125–130.

[11] Sagan B. E. A note on independent sets in trees // SIAM J. Discr. Math. 1988. 1. P. 105–108.

[12] Sagan B. E., Ying G. Ch., Meng K. K., Vatter V. Maximal independent sets in graphs with at most r cycles // J. Graph Th. 2006. 53. P. 270–282

[13] Pedersen A. S., Vestergaard P. D. An upper bound on the number of independent sets in a tree // Ars Combinatoria. 2007. 84. P. 85—96.

В той же работе был поставлен вопрос о нижних оценках числа независимых множеств в деревьях заданного диаметра. Для деревьев диаметра 4 исчерпывающий ответ был дан в работе Вестергарда, Педерсена, Сапоженко и Френдрупа.[14] Ими была описана структура экстремальных деревьев диаметра 5 для достаточно больших n. Проблема Вестергарда (полное описание экстремальных деревьев при произвольном заданном числе вершин и диаметре) до сих пор не решена в общем случае.

Важным направлением является получение асимптотических оценок числа независимых множеств в параметрических классах графов. К таковым относятся диаграммы Хассе частично упорядоченных множеств, плоские прямоугольные решётки и др. Для числа независимых множеств в полных бинарных деревьев с n ярусами рёбер В. П. Ворониным и Е. В. Демаковой получен[15] следующий результат.

Теорема (В. П. Воронин, Е. В. Демакова)**.** *Обозначим через ι_k число независимых множеств в полном бинарном дереве, имеющем k ярусов рёбер. Существуют константы β и γ такие, что при $n \to \infty$ справедлива асимптотика*

$$\iota_n \sim \beta \cdot \gamma^{2^n}.$$

Интерес представляют оценки числа независимых множеств в регулярных и «почти регулярных» графах (то есть графах, в которых степени вершин либо попарно равны, либо лежат в сравнительно узком диапазоне). К задачам такого рода сводятся некоторые перечислительные проблемы теории чисел и теории групп. Например, перечисление множеств, свободных от сумм (МСС), в абелевых группах (то есть множеств A, таких, что $A \cap \{a+b \mid a, b \in A\} = \varnothing$) сводится к перечислению независимых множеств в графах Кэли. Этот подход был применён Н. Алоном[16] для получения асимптотики логарифма числа МСС в отрезке натуральных чисел. Позже, также с применением теории графов, А. А. Сапоженко получил[17] асимптотику числа МСС в отрезке натуральных чисел. В

[14] Frendrup A., Pedersen A. S., Sapozhenko A. A., Vestergaard P. D. Merrifield-Simmons index and minimum number of independent sets in short trees // Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Research Report Series. ISSN 1399-2503. R-2009-03, January 2009. 13pp.

[15] Воронин В. П., Демакова Е. В. О числе независимых множеств для некоторых семейств графов // Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем», Красновидово, 19—25 июня 2000 г., М.: МАКСПресс, 2000. С. 145–149.

[16] Alon N. Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups // Israel J. Math. 1991. 2(73). P. 247–256.

[17] Сапоженко А. А. Доказательство гипотезы Камерона-Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.:Физматлит. 2003. С. 5–14.

упомянутой статье Алона была получена следующая оценка для числа независимых множеств в регулярных графах.

Теорема (Н. Алон)**.** *Для любого k–регулярного графа G на n вершинах число независимых множеств $i(G)$ удовлетворяет неравенству*

$$i(G) \leqslant 2^{\frac{n}{2}(1+f(k))}, \tag{1}$$

где $f(k) = O(k^{-0.1})$.

В доказательстве приведённой теоремы подсчёт числа независимых множеств в регулярных графах был сведён к подсчёту числа независимых множеств в почти регулярных двудольных графах.

Отметим, что задача оценки числа независимых множеств в двудольных графах возникает и при других обстоятельствах, например, при решении проблемы Дедекинда.

А. А. Сапоженко предложил[18] более простое доказательство оценки (1), улучшив, кроме того, остаточный член до $f(k) = O(\sqrt{k^{-1}\ln k})$ и распространив оценку на квазирегулярные графы.

Алон высказал следующее предположение.

Гипотеза (Н. Алон)**.** *Наибольшим числом независимых множеств среди k–регулярных графов на n вершинах при $2k \mid n$ обладает единственный с точностью до изоморфизма граф, представляющий собой объединение $\frac{n}{2k}$ непересекающихся полных двудольных графов.*

Граф из формулировки гипотезы будем называть далее *графом Алона.*

Эта гипотеза остается недоказанной до сих пор (сентябрь 2009), хотя большинство исследователей не сомневаются в ее справедливости. Справедливость этой гипотезы означала бы в частности, что в (1) имеет место оценка $f(k) = O(k^{-1})$.

С помощью теоретико–информационного подхода Дж. Каном и А. Лоренцем была получена[19] достижимая верхняя оценка числа независимых множеств в двудольных регулярных графах, что косвенно подтверждает гипотезу Алона.

Теорема (Дж. Кан, А. Лоренц)**.** *Пусть G — двудольный k–регулярный граф на n вершинах. Тогда*

$$i(G) \leqslant (2^{k+1} - 1)^{\frac{n}{k}}.$$

[18] Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в расширителях // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 1. С. 56–62.

[19] Kahn J., Lawrenz A. Generalized rank functions and an entropy argument // J. Comb. Th. Ser. A. 1999. 87. P. 398–403.

Отметим, что вопрос о единственности экстремального графа в теореме Кана–Лоренца до сих пор остаётся открытым.

Интересен вопрос о числе независимых множеств в графах, для которых известен размер наибольшего независимого множества. Это связано с довольно общим подходом в перечислительной комбинаторике, который может быть назван *методом контейнеров*. Метод состоит в следующем. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — семейства подмножеств некоторого множества. Скажем, что семейство $\mathcal{B}$ является *системой контейнеров* для $\mathcal{A}$, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ найдётся $B \in \mathcal{B}$, такое, что $A \subseteq B$. Тогда, очевидно, выполнено неравенство

$$|\mathcal{A}| \leqslant \sum_{B \in \mathcal{B}} 2^{|B|}.$$

Грубые на первый взгляд, такие оценки при подходящем выборе системы $\mathcal{B}$ позволяют получать асимптотику. Таким способом, например, А. А. Сапоженко получил[20] решение проблемы Камерона–Эрдёша. Вопрос о применимости метода контейнеров для задачи оценки числа независимых множеств в графах тесно связан с указанной выше задачей перечисления независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости, поскольку семейство всех м. н. м. графа является системой контейнеров для семейства всех независимых множеств, и число независимости графа является прямым ограничением размера таких контейнеров.

В. Е. Алексеевым была доказана следующая

Теорема (В. Е. Алексеев). *Для любого графа G выполнено неравенство*

$$i(G) \leqslant \left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^{\alpha}, \tag{2}$$

где $n = |V(G)|$, $\alpha = \alpha(G)$.

Неравенство (2) было использовано В. Е. Алексеевым для оценки числа м. н. м. в графах, а А. А. Сапоженко — для получения верхних оценок числа независимых множеств в квазирегулярных графах с ограничением на число независимости и расширителях.

Цель диссертации. Основной целью диссертации является получение оценок числа независимых множеств в деревьях с ограничением на диаметр и исследование соотношений между числом независимости

[20] Сапоженко А. А. Доказательство гипотезы Камерона-Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.:Физматлит. 2003. С. 5–14.

и числом независимых множеств в регулярных и «почти регулярных» графах.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Научная и практическая ценность. Работа имеет теоретическую направленность. Получены достижимые оценки числа независимых множеств в деревьях с заданным числом вершин и диаметром, при этом описана структура экстремальных деревьев.

Полученные при этом методы могут применяться при решении задач перечисления объектов с ограничениями на структуру.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с применением комбинаторных методов теории графов.

Публикации и апробирование. Результаты диссертации докладывались на семинаре ВМК МГУ «Дискретный анализ» (руководители — А. А. Сапоженко, Т. В. Андреева), на VI молодёжной научной школе по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16–21 апреля 2007), на VII молодёжной научной школе по дискретной математике и её приложениям (Москва, 18–23 мая 2009), на XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008), на XVII Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября - 1 ноября 2008), на Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (Москва, 30 марта – 2 апреля 2009) а также на XVIII Международной научной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009).

По теме диссертации опубликовано 10 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, приложения и списка литературы. Объём работы 98 страниц.

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена оценкам числа независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра. В разделе 1.1 вводится понятие ёмкости графа и даётся несколько других определений, доказываются вспомогательные утверждения. В разделе 1.2 доказываются нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра $6, 7, 8, 9$. В частности, доказываются следующие теоремы:

Теорема 8 (разд. 1.2). *Любое дерево диаметра* 6 *на* n *вершинах содержит не меньше* $35^{(n-1)/7}$ *независимых множеств. Любое дерево диаметра* 7 *на* n *вершинах содержит не меньше* $35^{(n-2)/7}$ *независимых множеств.*

Теорема 9 (разд. 1.2). *Любое дерево диаметра* 8 *на* n *вершинах содержит не меньше* $35122^{(n-1)/21}$ *независимых множеств. Любое дерево диаметра* 9 *на* n *вершинах содержит не меньше* $35122^{(n-2)/21}$ *независимых множеств.*

В разделе 1.3 доказываются теоремы, характеризующие структуру экстремальных деревьев в проблеме Вестергарда. Дерево T называется (n, d)–минимальным, если оно имеет наименьшее число независимых множеств среди всех деревьев диаметра d на n вершинах. Ёмкостью n–вершинного графа G, имеющего $i(G)$ независимых множеств, называется величина $c(G) = (i(G))^{1/n}$ (отметим, что это определение отличается от известного понятия ёмкости Шеннона). Деревья минимальной ёмкости играют существенную роль в описании структуры (n, d)–минимальных деревьев. Через F_T будем обозначать лес, полученный из дерева T удалением всех центральных вершин. Положим

$$\widehat{c}(d) = \inf_{\substack{T\text{-дерево,}\\ \mathrm{diam}(T)=d}} c(T).$$

Теорема 11 (разд. 1.3). *Пусть* d *— чётное число, и* $\mathcal{M}_d$ *— множество всех деревьев* T'*, для которых* $c(T') = \min_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$. *Тогда найдётся такое* $N = N(d)$*, что для* $d' \in \{d + 2,\ d + 3\}$*, произвольного натурального числа* n*, и произвольного* (n, d')*–минимального дерева* T *в лесе* F_T *не более* N *вершин лежат в компонентах связности, не изоморфных деревьям из* $\mathcal{M}_d$.

Пусть множество $\mathcal{M}_d$ определено так же, как в теореме 11. Рассмотрим множество

$$\mathcal{J}_d = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists T' \in \mathcal{M}_d,\ |V(T')| = j\}.$$

Назовём число q разложимым по $\mathcal{J}_d$, если $q = \sum_{s=1}^{l} j_s$ для некоторых (не обязательно различных) чисел $j_1, \ldots, j_l \in \mathcal{J}_d$.

Теорема 12. *Пусть* d *— чётное натуральное число, и* $d' \in \{d{+}2,\ d{+}3\}$. *Существует такая константа* N*, что для всех* n, $n \geqslant N$*, таких, что* $(n - d' + d + 1)$ *разложимо по* $\mathcal{J}_d$*, и произвольного* (n, d')*–минимального* *дерева T, каждая из компонент леса F_T изоморфна некоторому дереву из $\mathcal{M}_d$.*

В разделе 1.4 приводятся оценки числа независимых множеств в так называемых радиально регулярных деревьях, предположительно являющихся деревьями минимальной ёмкости.

В разделе 1.5 получено обобщение теоремы Воронина–Демаковой на случай q–арных деревьев при произвольном q. Обозначим через $\iota_{q,k}$ число независимых множеств в полном q–арном дереве, имеющем k ярусов рёбер, или, что то же, диаметр $2k$. Доказана следующая

Теорема 15 (разд. 1.5)**.** *При $q \in \{2, 3, 4\}$ для $\iota_{q,k}$ справедлива асимптотика при $k \to \infty$:*

$$\iota_{q,k} \sim \beta_q \cdot \gamma_q^{q^k},$$

для некоторых констант β_q и γ_q.

При $q \geqslant 5$ справедлива асимптотика при $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} \iota_{q,2k} &\sim \alpha_{q,0} \cdot \gamma_q^{q^{2k}}, \\ \iota_{q,2k+1} &\sim \alpha_{q,1} \cdot \gamma_q^{q^{2k+1}}, \end{aligned}$$

где константы $\alpha_{q,0}$ и $\alpha_{q,1}$ удовлетворяют неравенству $\alpha_{q,0} > \alpha_{q,1}$.

Заслуживает внимания различный характер асимптотики величины $\iota_{q,k}$ при $q \leqslant 4$ и $q \geqslant 5$.

Результаты первой главы опубликованы в [2, 6].

Вторая глава диссертации посвящена оценкам числа максимальных независимых множеств в графах заданного диаметра. В разделе 2.1 вводятся основные определения и доказываются некоторые вспомогательные утверждения. В разделе 2.2 получено полное описание графов с заданным диаметром, на которых достигается минимум числа м. н. м. Определим последовательность ψ_n соотношением $\psi_n = \psi_{n-2} + \psi_{n-3}$ и начальными условиями $\psi_0 = \psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$.

Теорема 16 (разд. 2.2)**.** *Для любого d, $d \geqslant 4$, и для любого графа G диаметра d выполнено неравенство $i_M(G) \geqslant \psi_{d+1}$. Если $i_M(G) = \psi_{d+1}$, то множество $V(G)$ можно разбить на подмножества $V_0, \ldots, V_d$, так, что при любом k, $2 \leqslant k \leqslant d$, и любом i, $0 \leqslant i \leqslant d-k$, в G отсутствуют рёбра между вершинами из V_i и V_{i+k}, и для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, подграф графа G, порождённый множеством $V_i \cup V_{i+1}$, является полным двудольным с долями V_i и V_{i+1}.*

В разделе 2.3 приводится полное описание деревьев с заданным диаметром и числом вершин, на которых достигается максимум числа м. н. м.

Теорема 17 (разд. 2.3)**.** *Для любого n–вершинного дерева T диаметра d выполнено неравенство $i_M(T) \leqslant M(n,d)$, где*

$$M(n,d) = \begin{cases} \psi_{d-1} + (2^{(n-d+1)/2} - 1)\psi_{d-2}, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2k+1,\ k \geqslant 0, \\ \psi_{d-2} + \psi_d, & \text{при } d \geqslant 4,\ n-d = 2, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1}, & \text{при } d \geqslant 5,\ d \neq 7,\ n-d = 2k \geqslant 4, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} + 1, & \text{при } d \in \{4,7\},\ n-d = 2k \geqslant 4. \end{cases}$$

При $d \geqslant 9$ существует единственное с точностью до изоморфизма дерево, на котором достигается указанная оценка (полное описание экстремальных деревьев при всех d см. в разд. 2.3 диссертации).

Приведённая теорема является усилением теорем Вильфа и Сагана.

Результаты второй главы опубликованы в [7, 8, 9, 10].

В третьей главе диссертации исследуется число независимых множеств в графах с заданным размером максимального независимого множества. Неравенство (2) обращается в равенство при $\alpha | n$ (максимум числа независимых множеств достигается на графе $UK_{n,\alpha}$). Доказываемая в разделе 3.1 теорема 18 даёт уточнение оценки (2), делающее её достижимой при всех возможных сочетаниях параметров n, α, а также описывает экстремальные графы.

Теорема 18 (разд. 3.1)**.** *Для любого n–вершинного графа G, такого, что $\alpha(G) = \alpha$, выполнено неравенство $i(G) \leqslant i(UK_{n,\alpha})$, обращающееся в равенство только на графах, изоморфных $UK_{n,\alpha}$.*

В разделе 3.2 получены оценки числа независимых множеств в деревьях и лесах с заданным числом независимости, и приведено описание соответствующих экстремальных графов.

Теорема 19 (разд. 3.2)**.** *Для любых n, α ($n \geqslant 2$) среди всех деревьев на n вершинах с числом независимости α максимальное число независимых множеств имеют только деревья, изоморфные дереву, полученному из звезды $K_{1,\alpha}$ подразбиением $(n - \alpha - 1)$ рёбер.*

Теорема 20 (разд. 3.2)**.** *Среди всех лесов на n вершинах без изолированных вершин с числом независимости α максимум числа независимых множеств достигается только на лесах, являющихся объединением паросочетания на $2(n - \alpha - 1)$ вершинах и звезды $K_{1,2\alpha-n+1}$.*

Раздел 3.3 посвящён оценкам числа независимых множеств в регулярных n–вершинных графах, число независимости в которых близко к $n/2$ (то есть к максимально возможному).

Теорема 22 (разд. 3.3)**.** *Для сколь угодно больших K и N существуют k–регулярный n–вершинный граф G, такой, что $k > K$, $n > N$, и*

$$\begin{aligned} \alpha(G) \ &< \frac{n}{2}\left(1 - \Omega(k^{-1})\right), \\ \log_2(i(G)) \ &> \frac{n}{2}\left(1 + \Omega(k^{-1})\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для любой константы $\theta \in (0,\, 1/2)$ для любого k–регулярного n–вершинного графа G, такого, что $\alpha(G) < \frac{n}{2}(1 - \Omega(k^{-\theta}))$, выполнено неравенство

$$\log_2(i(G)) < \frac{n}{2}(1 - \Omega(k^{-\theta})).$$

В терминах контейнеров, теорема 22 показывает, в частности, что существуют графы, в которых большое число независимых множеств обеспечивается не максимальным размером «контейнера» (м. н. м.), как это имеет место в графе Алона, а бо́льшим числом контейнеров.

В разделе 3.4 доказывается обобщение теоремы Кана–Лоренца на квазирегулярные двудольные графы:

Теорема 23 (разд. 3.4)**.** *Пусть G — двудольный граф с долями A и B. Пусть степени вершин из A ограничены сверху числом k_2, а степени вершин из B ограничены снизу числом k_1. Тогда*

$$i(G) \leqslant (2^{k_1} + 2^{k_2} - 1)^{\frac{|A|}{k_1}}.$$

Результаты третьей главы опубликованы в [1, 3, 4, 5].

В **Приложении** приведена последовательность Штурма для полинома, использующегося в доказательстве теоремы 15.

Основные результаты диссертации

1. Для произвольного d описана структура (n, d)–минимальных деревьев. Получены асимптотически достижимые нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра 6, 7, 8, 9.
2. Получена достижимая нижняя оценка числа максимальных независимых множеств в графах фиксированного диаметра, приведено полное описание экстремальных графов. Получена достижимая верхняя оценка числа максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра, приведено полное описание экстремальных деревьев.
3. Получена достижимая верхняя оценка числа независимых множеств в графах с заданным числом независимости, полностью описаны графы, на которых эта оценка достигается.
4. Получены оценки числа независимых множеств в регулярных графах с числом независимости, близким к максимальному.

Публикации по теме диссертации

1. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости // Дискретная математика. 2007. Т. 19. Вып. 2. С. 63–66.

2. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в деревьях малого диаметра // Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября — 1 ноября 2008) / Под ред. О. М. Касим-Заде. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2008. С. 32–36.

3. Дайняк А. Б. О некоторых вопросах, связанных с гипотезой Алона о числе независимых множеств // Материалы VI молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16—21 апреля 2007). Часть I. / Под ред. А. В. Чашкина. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2007. С. 26–30.

4. Дайняк А. Б. Уточнение оценки В. Е. Алексеева числа независимых множеств в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV международной конференции (Казань, 2—7 июня 2008) / Под ред. Ю. И. Журавлёва - Казань: Отечество, 2008. С. 25.

5. Дайняк А. Б. Оценки числа независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости // Вестник Московского университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. №2. С. 45–48.

6. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. №2. С. 61–73.

7. Дайняк А. Б. О нижних оценках числа независимых множеств в некоторых классах графов // Сборник тезисов XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2009». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». 13—18 апреля, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: МАКСПресс, 2009. С. 24.

8. Дайняк А. Б. О числе максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Современные проблемы математики, механики, и их приложений. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию акад. В. А. Садовничего. М.: Университетская книга, 2009. С. 357.

9. Дайняк А. Б. Оценки числа независимых множеств в графах из некоторых классов // Восьмая международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6—9 апреля, 2009 г.): Труды / Отв. ред. В. Б. Алексеев, В. А. Захаров. — М.: МАКС Пресс, 2009. С. 79–81.

10. Дайняк А. Б. О числе максимальных независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Выпуск 6. 2009. М: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ; МАКС Пресс, 2009. С. 58–68.