Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

ФОМИЧЕВ Василий Владимирович

Функциональные наблюдатели и наблюдатели состояния при неопределенности

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в *на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Научный консультант:
доктор технических наук,
академик РАН, профессор *КОРОВИН С.К.*

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор *КУРЖАНСКИЙ А.Б.*

доктор физико-математических наук,
чл.–корр. РАН, профессор *ЧЕТВЕРУШКИН Б.Н.*

доктор физико-математических наук,
профессор *КРИЩЕНКО А.П.*

Ведущая организация: *Вычислительный центр РАН*

Защита состоится «____»____________ 2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____»____________ 2009 г.
Ученый секретарь диссертационного совета,
профессор, доктор физико-математических наук *ЗАХАРОВ Е.В.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Задача о синтезе наблюдателей состояния для динамических систем, в том числе и для систем автоматического управления, является классической и имеет богатую историю.

Далее всюду для определенности под динамической системой имеем ввиду систему управления. В конечномерном случае при непрерывном времени система автоматического управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой зависит от *входа системы* $u(t)$, выбором которого можно влиять на свойства данной системы. В общем виде подобная система задается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы. Необходимость в наблюдателе состояния обусловлена тем, что при решении задач управления зачастую доступна информация не о фазовом векторе x, а только о некоторой функции от x

$$y = h(x), \tag{2}$$

которую называют *выходом системы*, что, вообще говоря, затрудняет решение задачи управления с надлежащим качеством.

Под задачей построения наблюдателя состояния понимают синтез динамической системы, формирующей оценку вектора состояний по доступной информации о системе, ее измеряемым выходу и входу. Решению этой задачи для различных классов систем при тех или иных предположениях о параметрах системы, о доступной информации, посвящено огромное число работ.

В 1963 г. Давид Люенбергер заложил основы теории наблюдателей для линейных стационарных систем управления. До сих пор появляются работы, обобщающие или распространяющие эту теорию на новые классы систем.

Существует ряд основных задач, связанных с теорией построения наблюдателей. Первая задача состоит в получении ответа на вопрос, а возможно ли в принципе для данной системы по имеющейся информации восстановление (построение оценки) полного фазового вектора системы? Соответствующую задачу называют *задачей о наблюдаемости динамической системы*.

Полное решение этой проблемы получено для многих видов динамических систем, в том числе для линейных стационарных многосвязных систем управления, которые описываются уравнениями вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор системы, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ — известные вход и выход системы, соответственно; A, B и C — постоянные матрицы соответствующих размеров. Задача о наблюдаемости решена также и для линейных нестационарных систем, а так же для частных случаев нелинейных систем. Однако для нелинейных систем (например для билинейных) исчерпывающего решения не получено.

Для систем, которые допускают восстановление фазового вектора по имеющейся информации (такие системы называются *наблюдаемыми*) встает задача о получении оценки $\tilde{x}(t)$ фазового вектора $x(t)$. Для решение этой задачи традиционно используют вспомогательные динамические системы, которые и формируют указанную оценку. В общем случае такие системы могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, u, y), \\ \tilde{x} = p(z, u, y). \end{cases} \tag{4}$$

Такие системы и называют *наблюдателями*. Здесь синтезу подлежат функции $g(.)$ и $p(.)$, размерность вектора $z(t)$ называют размерностью наблюдателя. Если оценка $\tilde{x}(t)$ асимптотически сходится к фазовому вектору системы

$x(t)$, то наблюдатель называют *асимптотическим* (если, кроме того, имеет место оценка $\|\tilde{x}(t) - x(t)\|^1 \leq C_0\|\tilde{x}(0) - x(0)\|e^{-\gamma t}$, где константы $\gamma > 0$, $C_0 > 0$, то такой наблюдатель называют *экспоненциальным*). Для линейных стационарных полностью определенных систем (3) эта задача получила исчерпывающее решение.

Однако для линейных систем с неопределенностью (возмущенных систем) вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D\xi, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{5}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^k$ — неизвестное возмущение, задача о синтезе асимптотических наблюдателей полностью еще не решена. До сих пор появляются работы, в которых предлагаются подходы к решению указанной проблемы при различных предположения относительно параметров системы (5) и неизвестного возмущения ξ.

Еще сложнее обстоит дело с синтезом наблюдателей при неопределенности в нелинейном случае, на сегодня эта задача решена лишь для некоторых классов нелинейных динамических систем.

В теории автоматического управления часто, помимо устойчивости замкнутой системы, предъявляются те или иные дополнительные требования к свойствам регулятора. В частности, нередко требуется, чтобы размерность наблюдателя [2] (т. е. размерность фазового вектора $z(t)$ динамической системы (4)) была минимальна. В результате появилась проблема, связанная с построением *минимального наблюдателя*, т. е. наблюдателя минимального динамического порядка, минимальной размерности.

Для линейных стационарных полностью определенных систем (3) эта задача оценивания полного фазового вектора получила исчерпывающее ре-

[1] $\| \, \|$ - какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$

[2] Наблюдатель, как правило, часть регулятора

шение в работах Люенбергера. В тоже время для решения задач управления зачастую не требуется знать весь фазовый вектор системы, а достаточно располагать информацией лишь о некотором функционале от этого вектора, например следующего вида

$$\sigma = h(x) \in \mathbb{R}^p, \tag{6}$$

где $h(.)$– известная достаточно гладкая функция. В этом случае имеет место задача о построении оценки для этого функционала, или иначе говоря, задача о построении *функционального наблюдателя.* Разумеется, эта задача имеет смысл, когда размерность такого наблюдателя оказывается ниже размерности наблюдателя, восстанавливающего полный фазовый вектор.

В случае линейной стационарной системы без неопределенности и линейного функционала

$$\sigma = Hx, \tag{7}$$

эта задача рассматривалась в монографии О'Рейли, где предложены методы построения функциональных наблюдателей и получена оценка сверху для размерности таких наблюдателей. Однако задача о функциональном наблюдателе минимальной размерности актуальна до сих пор.

Кроме того, самостоятельный интерес представляет задача о синтезе функциональных наблюдателей для линейных и нелинейных стационарных и нестационарных систем с неопределенностью.

Аналогичные задачи, т.е. задачи о наблюдаемости, о синтезе наблюдателя, о построении наблюдателя в условиях неопределенности, о синтезе функциональных наблюдателей, о минимальном наблюдателе и т.п., имеют место и для дискретных регулируемых систем, в частности, для линейных дискретных систем управления, которые описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

где, как и ранее, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — вход и выход системы, соответственно.

Для линейных стационарных систем большинство результатов переносятся с непрерывного случая на дискретный, хотя для последнего имеются особенности и существенные отличия.

Цель диссертационной работы. Целью работы является разработка теории построения наблюдателей для систем в условиях неопределенности, а так же разработка конструктивной теории построения минимальных функциональных наблюдателей.

Для первой из поставленных задач предложены алгоритмы синтеза асимптотических наблюдателей для линейных стационарных динамических систем в условиях неопределенности при различных условиях на параметры системы (различные сочетания размерностей входов и выходов, различные относительные порядки системы и т.д.) и факторы неопределенности. Полученные алгоритмы построения наблюдателей для систем дифференциальных уравнений должны быть перенесены на дискретные системы.

Для второй задачи, а именно для задачи синтеза функциональных наблюдателей, требуется рассмотреть две смежные, но тем не менее существенно различные постановки задачи:

1) Задача о построении функционального наблюдателя минимально возможного порядка с каким-либо устойчивым спектром;

2)Задача о построении минимальных функциональных наблюдателей с наперед заданными динамическими свойствами (заданным спектром, заданной скоростью сходимости).

Кроме того, целью работы является решение задач о наблюдаемости и о построении асимптотических наблюдателей для одного из классов нелинейных управляемых систем - билинейных (по управлению и фазовому вектору) динамических систем.

Научная новизна. В диссертации впервые получены следующие основные результаты:

1. Предложена теория построения асимптотических наблюдателей для гипервыходных векторных линейных стационарных систем с неопределенностью (т.е. для систем, у которых размерность измеряемого выхода превышает размерность неизвестного входа). При этом предложены два различных метода решения этой задачи: метод декомпозиции системы к специальному виду и метод "псевдовходов". Для каждого их методов строго изложены алгоритмы построения асимптотических наблюдателей, получены условиях их применимости.

2. Разработана теория построения наблюдателей для квадратных векторных линейных стационарных систем с неопределенностью (т.е. для систем, у которых размерность измеряемого выхода совпадает с размерностью неизвестного входа). Для решения задачи был развит подход с использование иерархии коэффициентов обратной связи в наблюдателе. В этом случае задача решается с наперед заданной точностью.

3. Предложены методы построения асимптотических функциональных наблюдателей минимального порядка (т.е. наблюдателей, восстанавливающих заданный линейный функционал от фазового вектора) с каким-либо устойчивым спектром. Получены необходимые и достаточные условия существования функциональных наблюдателей заданного порядка. Разработаны два подхода к решению задачи: метод скалярных наблюдателей и метод "псевдовходов".

4. Предложены методы построения функциональных наблюдателей с заданным устойчивым спектром (заданной скоростью сходимости), получены оценки сверху размерности таких наблюдателей.

5. Предложены методы синтеза асимптотических наблюдателей для билинейных динамических систем. Полностью решена задача о равномерной

по управлению наблюдаемости для планарных систем, для них так же полностью решена задача о построении асимптотических наблюдателей. Для многомерных билинейных систем решена задача о синтезе наблюдателей при различных случаях вырождения матрицы билинейности.

6. Разработанные алгоритмы построения наблюдателей (для систем с неопределенностью и функциональных наблюдателей) обобщены на дискретные линейные стационарные системы.

Методы исследования. В работе использованы методы математической теории управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости.

Практическая значимость. Работа имеет теоретическую и практическую составляющие. Предложенные в работе методы построения асимптотических наблюдателей для различных классов линейных стационарных систем имеют важное теоретическое значение, они позволяют решать не только задачи синтеза наблюдателей, но и могут составить основу для решения других смежных задач теории управления: задачи стабилизации систем в условиях неопределенности, задачи оценивания параметров динамических систем, оценивания внешних воздействий. Теоретическую и практическую ценность представляет также разработанная теория наблюдаемости для билинейных динамических систем.

Минимальные и функциональные наблюдатели, помимо теоретического интереса, имеют практическую ценность. Это обусловлено тем, что наблюдатели являются частью систем управления и понижение их порядка ведет к повышению быстродействия таких систем, упрощению их конструкции (и, как следствие, к повышению их надежности).

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные её части докладывались: на научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова, на научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление"под руководством академиков РАН С.В. Емельянова и С.К. Коровина; на Международной конференции по управлению «Автоматика 2001», Одесса, 2001; на научной школе -конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" (Москва, МГУ, Институт механики имени Е.А. Девянина) 2004 год; Симпозиуме IFAC по Обобщенным решениям в задачах управления (GSCP-2004); на Первой Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2005 (12-16 сентября 2005 г, г. Переславль); на Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» им. Е.С. Пятницкого (ИПУ РАН), 2006; на Второй Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2007 (10-14 сентября 2007 г. Обнинск, Россия); на семинаре в Международном Институте прикладного системного анализа (IIASA, Austria Laxenburg) 2007; на семинарах в университете Лафборо (Великобритания) 2007г.; на Ломоносовских чтениях в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, Москва, 2004-2008; на Тихоновских чтениях в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, Москва, 2008г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 35 работах, из них 25 работ - в ведущих математических журналах (Доклады РАН, Дифференциальные уравнения) и рецензируемых сборниках. Список основных публикаций помещен в конце автореферата.

Лично автором получены следующие результаты:

- Метод скалярных наблюдателей и метод псевдовходов для решения различных типов задач наблюдения.

- Методы построения асимптотических функциональных наблюдателей минимального порядка (т.е. наблюдателей, восстанавливающих заданный линейный функционал от фазового вектора) с некоторым устойчивым спектром. Получены необходимые и достаточные условия существования функциональных наблюдателей заданного порядка.

- Методы построения функциональных наблюдателей с заданным устойчивым спектром, получены оценки сверху на размерность таких наблюдателей.

- Теория асимптотических наблюдателей для гипервыходных векторных линейных стационарных систем с неопределенностью.

- Теория построения наблюдателей для квадратных векторных линейных стационарных систем с неопределенностью. В этом случае задача решается с наперед заданной точностью.

- Методы синтеза асимптотических наблюдателей для билинейных динамических систем.

- Алгоритмы построения наблюдателей (для систем с неопределенностью и функциональных наблюдателей) для дискретных линейных стационарных систем.

Содержание работы

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит их семи глав (первая из них - вводная). Главы разбиты на параграфы, параграфы на пункты. Нумерация утверждений, теорем, лемм, замечаний, примеров и формул - двойная, сквозная по каждой главе. В конце приведена библиография из 123 наименований, вначале в алфавитном порядке перечислены работы на кириллице, потом в алфавитном порядке работы на латинице.

Глава 1 является вводной, в ней приведены основные понятия, общие постановки задачи, дан краткий обзор современного состояния области исследований.

В **Главе 2** рассмотрены понятия наблюдаемости и идентифицируемости линейных динамических систем, приведены определения этих понятий. Для линейных стационарных систем указаны критерии наблюдаемости. При этом приведены как широко известные формулировки (критерий Калмана), так и менее распространенные, но полезные при проведении дальнейших исследований (критерий Розенброка).

Теорема 2.2. *(Критерий наблюдаемости Калмана). Стационарная пара $\{C, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Матрицу $N(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ называют матрицей наблюдаемости (матрицей наблюдаемости Калмана).

Ранговое условие говорит о том, что среди (nl) строк матрицы $N(C, A) \in \mathbb{R}^{(nl)\times n}$ есть n линейно независимых. При этом может оказаться, что выполнено условие

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} N_\nu(C, A) = n$$

при некотором $\nu \le n$. Минимальное число ν, при котором выполняется ранговое условие, называют *индексом наблюдаемости* пары $\{C, A\}$. Иногда матрицей наблюдаемости называют матрицу $N_\nu(C, A)$.

Теорема 2.4. *(Критерий наблюдаемости Розенброка). Пара $\{C, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для линейных наблюдаемых стационарных систем (3) приведены классические канонические формы: калмановская декомпозиция, канонические формы наблюдаемости (для скалярных и векторных выходов), каноническая форма Люенбергера. Описаны алгоритмы приведения систем к этим каноническим формам. Эти канонические формы необходимы для дальнейшего решения основных задач о построении асимптотических наблюдателей.

Так же во второй главе приведена оригинальная каноническая форма с выделением нулевой динамики. Под нулевой динамикой системы (3) понимают движение в системе, целиком принадлежащее многообразию $y = Cx = 0$. При этом, как правило, рассматриваются системы, у которых размерность измеряемого выхода l не меньше размерности входа m. Для линейных стационарных систем нулевая динамика так же описывается системой линейных стационарных уравнений. Поэтому можно определить характеристический полином этой системы, который далее называем *характеристическим полиномом нулевой динамики.* Корни характеристический полинома нулевой динамики является инвариантными нулями матрицы Розенброка

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right], \tag{8}$$

т.е. такие s, что $rank R(s) < n + m$. Для квадратных систем характеристический полином нулевой динамики $\beta(s) = \det R(s)$.

Для решения задачи наблюдения важную роль играет понятие *относительного порядка системы*. В диссертации приведено

Определение 2.8 (по Исидори). *Вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ — вектор относительного порядка системы (3), если выполнены условия:*

1. $C_i A^j B = 0$, *$j = 1, \dots, r_i - 2$; $C_i A^{r_i - 1} B \neq 0$, для всех $i = 1, \dots, l$.*
2. $\det H(r_1, \dots, r_l) = \det \begin{bmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} B \\ \dots \\ C_l A^{r_l - 1} B \end{bmatrix} \neq 0,$

где C_i — строки матрицы C.

Показано, что для векторных систем (т.е. при $lm > 1$) условия из определения могут быть не совместны, т.е. понятие относительного порядка по Исидори не всегда определено. Доказана

Теорема 2.12. *Пусть линейная стационарная квадратная система (3) управляема и наблюдаема, для нее определен вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ относительного порядка по Исидори. Тогда система невырожденным преобразова-*

нием приводится к виду:

$$\begin{gathered}
\dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\
\begin{aligned}
&\dot{y}_i^1 = y_{i+1}^1, \quad i = 1, \ldots, r_1 - 1; \\
&\dot{y}_i^2 = y_{i+1}^2, \quad i = 1, \ldots, r_2 - 1; \\
&\ldots \\
&\dot{y}_i^l = y_{i+1}^l, \quad i = 1, \ldots, r_l - 1;
\end{aligned} \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_l}^l \end{pmatrix} = A_{21}x' + \sum_{i=1}^{l} A_{22}^i \ \bar{y}_i + H(r_1, \ldots, r_l)u,
\end{gathered} \tag{9}$$

который является каноническим представлением системы с выделением нулевой динамики. Нулевая динамика системы соответствует $(n - |r|)$-мерной первой части системы и описывается уравнением:

$$\dot{x}' = A_{11}x'.$$

Описан алгоритм приведения системы к этой канонической форме.

В **Главе 3** рассмотрена задача синтеза наблюдателей фазового вектора для линейных стационарных полностью определенных систем (3). Описаны алгоритмы синтеза полноразмерных наблюдателей (т.е. наблюдателей порядка n, порядка системы (3)) для скалярных ($l = 1$) и векторных систем ($l > 1$). Так же описаны наблюдатели Люенбергера пониженного порядка $(n - l)$.

В **Главе 4** рассмотрена одна из основных задач, а именно задача о построении функциональных наблюдателей. Рассматривается n-мерная линейную стационарная полностью определенная наблюдаемая система с l-мерным выходом

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{10}$$

Далее везде полагается, что матрица C – полного ранга, т.е $\operatorname{rank} C = l$. В этой главе решается задача о построении функциональных наблюдателей, т. е.

задача о восстановлении линейного функционала от неизвестного фазового вектора

$$\sigma = Fx, \tag{11}$$

где $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ — известная матрица.

Рассматриваются две постановки задачи: задача о построении минимального функционального наблюдателя с каким-либо устойчивым спектром и задача о построении минимального наблюдателя с заданными динамическими свойствами (заданным спектром).

Вначале рассмотрена первая из этих задач. Для ее решения предложены два метода: метод псевдовходов[3] и метод скалярных наблюдателей. На основе этого метода для скалярных выхода и функционала доказано необходимое и достаточное условие существования наблюдателя заданного порядка.

Теорема 4.3. *Пусть в системе (10)* $l = 1$*, пары* $\{C, A\}$ *и* $\{F, A\}$ *наблюдаемы,* $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F \\ C \end{pmatrix} = 2$*. Скалярный функционал* $\sigma = Fx$ *восстанавливается наблюдателем порядка* k *тогда и только тогда, когда существует гурвицев вектор* $l = (l_1, \ldots, l_k)^T$*, удовлетворяющий уравнению*

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_k \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \ldots & f_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \\ \ldots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где f_i *– коэффициенты вектора* F *в каноническом базисе.*

Здесь под гурвицевым столбцом понимается столбец коэффициентов гурвицева полинома $\varphi(s) = s^k + l_k s^{k-1} + ... + l_1$.Матрица системы (12) имеет размер $(n-k-1) \times k$, столбец свободных членов – размер $1 \times (n-k-1)$, матрица и столбец полностью определяются параметрами вектора F, задающего

[3] называемые иногда также *виртуальными входами.*

функционал $\sigma = Fx$ в каноническом базисе. Из основной теоремы можно получить

Следствие 4.1 *Система (12) имеет решение, если выполнено ранговое условие*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{n-2} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{k+1} \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

поэтому легко проверяемое условие (13) является необходимым для существования такого наблюдателя.

Аналогичный результат получен для случая векторного функционала и скалярного выхода.

Теорема 4.4. *Пусть в системе (10) $l = 1$, пары $\{C, A\}$ и $\{F, A\}$ наблюдаемы, функционал $\sigma = Fx$, где $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F \\ C \end{pmatrix} = p + 1$, имеет в каноническом базисе вид $F = [f^i_j]$. Этот функционал может быть восстановлен наблюдателем порядка k тогда и только тогда,когда среди решений линейной системы*

$$\left(\begin{array}{cccc} f^1_1 & f^1_2 & \dots & f^1_k \\ f^1_2 & f^1_3 & \dots & f^1_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_{n-k-1} & f^1_{n-k} & \dots & f^1_{n-2} \\ \hline f^2_1 & f^2_2 & \dots & f^2_k \\ f^2_2 & f^2_3 & \dots & f^2_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^2_{n-k-1} & f^2_{n-k} & \dots & f^2_{n-2} \\ \hline f^3_1 & f^3_2 & \dots & f^3_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^p_{n-k-1} & f^p_{n-k} & \dots & f^p_{n-2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} = - \left(\begin{array}{c} f^1_{k+1} \\ f^1_{k+2} \\ \vdots \\ f^1_{n-1} \\ \hline f^2_{k+1} \\ \vdots \\ f^2_{n-1} \\ \hline f^3_{k+1} \\ \vdots \\ f^p_{n-1} \end{array}\right)$$

найдется гурвицев столбец $l = (l_1, \dots, l_k)^\top$.

Для решения задачи разработан еще один метод: метод скалярных наблюдателей. Для указанных случаев (скалярный выход) этом метод позволяет получить те же самые необходимые и достаточные условия, однако его применение технически более сложно.

Однако этот метод является более универсальным, с его помощью можно рассмотреть и системы с векторным выходом. Для случая векторного выхода требуется рассмотреть систему (10) в канонической форме Люенбергера:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{l} \bar{a}_{ij}y_j, \quad i = 1, \ldots, l, \\ y_i = \bar{C}_i x_i, \end{cases} \tag{14}$$

когда система распадается на l подсистем порядка ν_i каждая, связь между которыми осуществляется через компоненты y_j вектора выхода. Размерность максимальной из подсистем равна в точности индексу наблюдаемости пары $\{C, A\}$. Каждая из пар $\{\bar{C}_i, A_{ii}\}$ наблюдаема, более того, задана в канонической форме наблюдаемости для скалярных систем. Коэффициенты ν_i - индексы Кронекера для системы (10) могут быть упорядочены по невозрастанию. Пусть требуется восстановить скалярный функционал. Доказана

Теорема 4.8. *Пусть система (10) при $l > 1$ наблюдаема, пара $\{C, A\}$ находится в канонической форме Люенбергера. Функционал $\sigma = Fx$, где $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$,* $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F \\ C \end{pmatrix} = l + 1$,

$$F = (F_1, \ldots, F_l), \quad F_i = (f_1^i, \ldots, f_{\nu_i}^i),$$

может быть восстановлен наблюдателем порядка k тогда и только тогда, *когда среди решений системы*

$$\left[\begin{array}{cccc} f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_k^1 \\ f_2^1 & f_3^1 & \dots & f_{k+1}^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{\nu_1-k-1}^1 & f_{\nu_1-k}^1 & \dots & f_{\nu_1-2}^1 \\ \hline \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_2^k \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{\nu_2-k-1}^2 & f_{\nu_2-k}^2 & \dots & f_{\nu_2-2}^k \\ \hline \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{\nu_l-k-1}^l & f_{\nu_l-k}^l & \dots & f_{\nu_l-2}^l \end{array}\right] \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} = - \left[\begin{array}{c} f_{k+1}^1 \\ f_{k+2}^1 \\ \vdots \\ f_{\nu_1-1}^1 \\ \hline \\ f_{k+1}^2 \\ \vdots \\ f_{\nu_2-1}^2 \\ \hline \\ \vdots \\ f_{\nu_l-1}^l \end{array}\right]$$

найдется гурвицев столбец $l = (l_1, \dots, l_k)^\top$.

Из приведенных теорем видно, для построения наблюдателей заданного порядка (в том числе минимально возможного) требуется найти пересечение линейного многообразия решений некоторой линейной неоднородной системы с областью гурвицевости. Эта задача трудна для анализа и в общем случае не решена. Однако пользуясь специфической структурой линейной системы (12) можно получить ряд утверждений относительно свойств решений семейства систем (12) при различных k. Введем обозначения:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{n-2} \end{pmatrix}}_{H_k} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix}}_{l} = - \underbrace{\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_{k+2} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}}_{h_k}.$$

Доказаны следующие утверждения:

Лемма 4.3. *Если система алгебраических уравнений (12) разрешима при некотором* k*, то разрешима и система при* $(k+1)$.

Следствие 4.6. *Если для семейства систем алгебраических уравнений (12) существует число* k^* *такое, что у системы при всех* $k < k^*$ *нет решений, а при* k^* *у систем (12) есть решение, то при всех* $k \geq k^*$ *у систем (12) есть решения. Число* k^* *может быть любым от 1 до* $n-1$

Лемма 4.4.*Пусть* $k^* > 0$ *– такое число, что при всех* $k < k^*$ *у систем вида (12) нет решений, а при* $k = k^*$ *решение есть. Тогда, если* $k^* \leq \frac{n-1}{2}$*, то это решение единственно. Если же* $k^* > \frac{n-1}{2}$*, то решений при* k^* *бесконечно много.*

При этом при всех $k > k^*$ решений бесконечно много. Аналогичные условия имеют место и для гурвицевых решений систем (12).

Лемма 4.6. *Если у системы уравнений вида (12) при* k *есть гурвицево решение, то и при* $(k+1)$ *так же есть гурвицево решение.*

Доказано утверждение, облегчающее поиск минимального порядка наблюдателя:

Теорема 4.11. *Пусть число* $k^* \leq \frac{n-1}{2}$*, тогда при* k^* *у системы уравнений (12) существует единственное решение* $l \in \mathbb{R}^{k^* \times 1}$*. Если вектор* l *не является гурвицевым, то у систем (12) нет гурвицевых решений ни при каком* $k \in [k^*, n-k^*-1]$.

В последнем параграфе Главы 4 рассмотрена задача о построении минимального наблюдателя с наперед заданным спектром. Для решения этой задачи был использован метод скалярных наблюдателей.

В работе Tsui (1996 г.) получена оценка размерности такого наблюдателя. Если задана наблюдаемая система (10) с l-мерным выходом, то p-мерный функционал может быть восстановлен наблюдателем порядка

$$k(p) = \sum_{i=1}^{\min(p,l)} (\nu_i - 1),$$

где ν_i – упорядоченные по невозрастанию индексы Кронекера системы (10).

Методом скалярных наблюдателей удалось не только повторить эту оценку, но и показать, что она почти всегда может быть улучшена (т.е. может быть улучшена для почти всех систем (10), за исключением некоторых, образующих множество меры ноль в пространстве параметров A, C, F).

Доказаны следующие основные утверждения:

Лемма 4.8. *Пусть задана динамическая система общего положения порядка n с l выходами, приведенная к каноническому виду Люенбергера; $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_l$ – упорядоченные по невозрастанию индексы Кронекера. Пусть*

$$k^*(p) = \sum_{i=1}^{l} k_i,$$

где k_i определены следующим образом:

$$k_1 = \nu_1 - 1,$$

$$k_i = \max\left\{ (\nu_i - 1) - \left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1} k_j}{p} \right] ; 0 \right\}, \quad i = 2, \ldots, l,$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда при любом p имеет место оценка

$$k^*(p) \leq k(p) = \sum_{i=1}^{min\{p,l\}} (\nu_i - 1).$$

Теорема 4.14. *Пусть задана динамическая система общего положения порядка n с l выходами, приведенная к канонической форме Люенбергера, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_l$ – упорядоченные по невозрастанию индексы Кронекера. Тогда для почти всех матриц $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$ для функционала $\sigma = Fx \in \mathbb{R}^p$ для любого устойчивого вещественного и различного спектра $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k^*}\}$ найдется сколь угодно близкий к нему устойчивый, вещественный и различ-*

ный спектр Λ' такой, что для функционала σ можно построить наблюдатель порядка $k^*(p)$ со спектром Λ'.

В **Главе 5** рассматривается задача построения асимптотических наблюдателей для линейных стационарных систем с неопределенностью вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{15}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ — известные постоянные матрицы; $u(t) \in \mathbb{R}^k$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — известные вход и выход системы, соответственно; $f(t,x) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестное возмущение. Требуется по информации об известных входе $u(t)$ и выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ неизвестного вектора состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Рассматриваются два основных случая: *гипервыходные системы* (когда размерность выхода превышает размерность неизвестного входа, т.е. $l > m$) и *квадратные системы* (когда эти размерности совпадают, т.е. $l = m$).

Поскольку влияние известного входа $u(t)$ в наблюдателе можно компенсировать, для простоты изложения считаем, что $u(t) \equiv 0$, т. е. вместо (15) рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Df, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{16}$$

Для гипервыходных систем предложены два подхода к решению задачи: метод расщепления системы на две части (одна из которых не зависит явно от возмущения $f(t,x)$, а фазовый вектор другой является частью измеряемого выхода системы); второй метод - метод псевдовходов. При использовании обоих методов относительно системы (16) считаются выполненными следующие предположения.

Предположение П.1. *Пара $\{C, A\}$ — наблюдаема, пара $\{A, D\}$ — управляема, т. е. система* (16) *находится в общем положении.*

Предположение П.2. *Матрицы C и D полного ранга, т. е.* $\operatorname{rank} C = l$, $\operatorname{rank} D = m$.

Предположение П.3. *Число выходов больше числа неизвестных входов, т. е. $l > m$.*

Предположение П.4. *Имеет место ранговое условие*

$$\operatorname{rank} CD = m,$$

т. е. матрица $CD \in \mathbb{R}^{l \times m}$ — полного ранга.

При использовании метода расщеплений показано, что при выполнении предложения П.4 существует невырожденная замена координат, приводящая систему (16) к виду

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y', \\ \dot{y}' = A_{21}x' + A_{22}y' + (C'D)f, \end{cases} \tag{17}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{n-m}$- неизвестная часть фазового вектора, $y' \in \mathbb{R}^{m}$- часть измеряемого выхода системы, A_{ij} — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей, матрица $(C'D)$ - невырожденная. Заметим, что в указанном представлении системы первые $(n-m)$ неизвестных компонент фазового вектора x' не зависят явно от неизвестного возмущения f.

Так как размерность выхода $l > m$, то оставшаяся часть измеряемого выхода в новых координатах имеет вид:

$$y'' = C_1''x' + C_2''y'.$$

Так как y' и y'' — известные векторы, можно определить новый выход

$$\tilde{y} = y'' - C_2''y' = C_1''x'.$$

Тогда первое уравнение системы (17) и $\tilde{y}$ описывают линейную систему порядка $(n-m)$ с известным выходом $\tilde{y}$ порядка $(l-m)$ и известным входом

y' порядка m, т. е.

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y', \\ \tilde{y} = C_1''x'. \end{cases} \tag{18}$$

В отличие от исходной системы, система (18) не зависит явно от неизвестного входа $f(t,x)$. Поэтому, если пара $\{C_1'', A_{11}\}$ наблюдаема, то задачу восстановления вектора x' решает стандартный полноразмерный наблюдатель порядка $(n-m)$ либо классический наблюдатель Люенбергера порядка $(n-m)-(l-m)=(n-l)$.

Из вышесказанного следует, что фундаментальное значение при построении наблюдателя для x' играет наблюдаемость (восстанавливаемость) пары $\{C_1'', A_{11}\}$. Для ее анализа требуется исследовать свойства инвариантных нулей системы (16), т.е. точек понижения ранга матрицы Розенброка $R(s)$ системы (16), т. е. таких комплексных s, что

$$\operatorname{rank} R(s) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{pmatrix} < n + m,$$

где $R(s) \in \mathbb{C}^{(n+l)\times(n+m)}$.

Доказано следующее основное утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть для системы* (16) *выполнены предположения* П.1 – П.4. *Тогда, если у системы нет инвариантных нулей, то пара* $\{C_1'', A_{11}\}$ *наблюдаема. Если у системы есть инвариантные нули, то они являются неизменяемой частью спектра матрицы* $A_L = A_{11} - LC_1''$; *если инвариантные нули устойчивы, то пара* $\{C_1'', A_{11}\}$ *восстанавливаема.*

Таким образом, если у системы (16) нет инвариантных нулей (а для гипервыходных систем это почти всегда так; множество систем имеющих инвариантные нули образует множество меры ноль среди всех систем), то задача построения асимптотического наблюдателя для исходной системы с неопределенностью сводится к соответствующей задаче для редуцированной системы без неопределенности. Кроме того, этот подход позволяет решить и задачу о построении функционального наблюдателя для неопределенной системы (16). Рассмотрим задачу восстановления функционала $\sigma = Fx$, $\sigma \in \mathbb{R}^p$, где $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$ — известная матрица. При указанном выше преобразовании координат функционал $\sigma = Fx$ примет вид

$$\sigma = Fx = F'x' + F''y' = \sigma' + \sigma'',$$

где $F' \in \mathbb{R}^{p\times(n-m)}$, $F'' \in \mathbb{R}^{p\times m}$ — известные матрицы. Заметим, что функционал $\sigma'' = F''y'$ известен, а, следовательно, для построения оценки функционала σ достаточно построить оценку его неизвестной части $\sigma' = F'x'$ только для редуцированной системы без неопределенности.

Второй метод, предложенный для решения задачи - метод псевдовходов (или виртуальных входов), заключается он в следующем. Так как число выходов системы l больше числа неизвестных входов m, то дополним систему $(l-m)$ "псевдовходами" $f' \in \mathbb{R}^{(l-m)}$. В результате получим квадратную систему с l входами и l выходами

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Df + D'f' = Ax + \bar{D}\bar{f}, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{19}$$

где $\bar{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, $\bar{D} = [D; D']$, способ выбора матрицы $D' \in \mathbb{R}^{n\times(l-m)}$ будет описан ниже.

При $f' \equiv 0$ система (19) совпадает с системой (16), поэтому наблюдатель, построенный для системы (19) при условии $f' \equiv 0$, будет восстанавливать фазовый вектор и исходной системы.

Так как система (19) квадратная, то характеристический полином ее нулевой динамики является определителем матрицы Розенброка

$$\beta(s) = \det R'(s) = \det \begin{pmatrix} sI_n - A & -[D; D'] \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Если полином $\beta(s)$, зависящий от выбора матрицы D', имеет порядок $(n-l)$ (т. е. $\det(C\bar{D}) \neq 0$), то для системы (19) можно провести декомпозицию с выделением нулевой динамики, при этом система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\ \dot{y} = A_{21}x' + A_{22}y + C\bar{D}\bar{f}, \end{cases}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{(n-l)}$, а $\det(sI - A_{11}) = \beta(s)$. Если матрица D' выбрана так, что полином $\beta(s)$ гурвицев, то задачу восстановления неизвестной части фазового вектора x' решает наблюдатель порядка $(n-l)$

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}\tilde{x}' + A_{12}y. \tag{20}$$

Доказана следующая

Теорема 5.2. *Пусть для системы* (16) *выполнены предположения* П.1 – П.4. *Тогда, если у системы нет инвариантных нулей, то корни полинома $\beta(s)$ порядка $(n-l)$ целиком определяются выбором матрицы D'. Если у системы есть инвариантные нули, то они являются корнями полинома $\beta(s)$, остальные корни определяются выбором матрицы D'.*

Для этой теоремы можно дать альтернативную формулировку:

Теорема 5.2'. *Если для системы* (16) *выполнены предположения* П.1 – П.4, *то неособым преобразованием она может быть приведена к виду*

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y, \\ \dot{y} = A_{21}x' + A_{22}y + CDf, \end{cases} \tag{21}$$

где спектр матрицы A_{11} содержит все инвариантные нули системы (16), *а остальная его часть может быть выбрана произвольно (и определяется выбором матрицы преобразования)*

Более сложен для анализа случай квадратной системы, так же рассмотренный в Главе 5. Подробно рассматривается основной случай скалярной системы, т. е. системы со скалярными входом $f(t)$ и выходом $y(t)$ (т. е. $l = m =$

$= 1$). В этом случае для системы (16) определена передаточная функция от входи f к выходу y

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}D = \frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)},$$

где $\beta_m(s)$ и $\alpha_n(s)$ — полиномы от s соответствующих степеней m и n. При этом

$$\alpha_n(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \ldots + \alpha_1$$

— характеристический полином матрицы A, а полином

$$\beta_m(s) = \beta_{m+1}s^m + \beta_m s^{m-1} + \ldots + \beta_1$$

— характеристический полином нулевой динамики системы, который является определителем матрицы Розенброка

$$\beta_m(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -D \\ \hline C & 0 \end{array} \right].$$

Относительным порядком системы (16) является число $r = n - m$, для него имеют место соотношения

$$CD = 0, \quad CAD = 0, \ldots, CA^{r-2}D = 0, \quad CA^{r-1}D = \beta_{m+1} \neq 0.$$

Относительно системы (16) предполагается, что ее нулевая динамика асимптотически устойчива, т. е. полином $\beta_m(s)$ — гурвицев, т.е. система является минимально-фазовой. Кроме того, пара $\{C, A\}$ — наблюдаема, а пара $\{A, D\}$ — управляема, т. е. система (16) находится в общем положении.

Для решения задачи доказано вспомогательное утверждение

Лемма 5.1. *Пусть матрица $A_L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такова, что ее спектр может быть назначен по произволу. Обозначим коэффициенты разложения матричной экспоненты через $\alpha_i(t)$, $i = 0, \ldots, n-1$:*

$$e^{A_L t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A_L^i.$$

Тогда для любого $\mu > 0$ спектр $\mathrm{Spec}\{A_L\}$ может быть выбран так, что для всех $\alpha_i(t)$ справедлива оценка

$$|\alpha_i(t)| \le \frac{N_i e^{-\mu t}}{\mu^i}, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

где $N_i = \mathrm{const} > 0$ и не зависят от μ.

При решении задачи выделяется базовый случай системы с максимальным относительным порядком. В этом случае после приведения системы к каноническому виду с выделением нулевой динамики используется стандартный полноразмерный наблюдатель, при этом спектр матрицы A_L замкнутой системы выбирается соответствии с леммой 5.1, т. е.

$$\begin{gathered} \mathrm{Spec}\{A_L\} = \{\mu\bar{\lambda}_1, \ldots, \mu\bar{\lambda}_n\}, \quad \bar{\lambda}_i < 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mu > 0 \\ |\bar{\lambda}_1| = 1, \quad |\bar{\lambda}_{i+1}| > |\bar{\lambda}_i|, \quad i = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{22}$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть скалярная квадратная система* (16) *находится в общем положении, ее относительный порядок $r = n$, система приведена к каноническому виду. Пусть, кроме того, неизвестный вход $f(t)$ равномерно ограничен известной константой F_0, т. е. $|f(t)| \le F_0$ при $t \ge 0$.*
Выберем вектор обратной связи L в наблюдателе так, чтобы спектр матрицы $A_L = A - LC$ удовлетворял условиям (22)*. Тогда ошибка наблюдения $e = \tilde{y}' - y'$ удовлетворяет оценке*

$$|e(t)| \le K_1 e^{-\mu t} + \frac{K_2}{\mu}, \tag{23}$$

где константа K_2 не зависит от коэффициента усиления μ.

Таким образом, выбирая коэффициент усиления μ достаточно большим можно сделать погрешность оценивания меньше наперед заданной константы.

В случае произвольного относительного порядка система сначала приводится к каноническому виду с выделением нулевой динамики, для минимально-фазовой системы строится асимптотический наблюдатель, восстанавливающий нулевую динамику системы, а затем решается задача для подсистемы с максимальным относительным порядком. Оценка погрешности в этом случае так же имеет вид (23) с той лишь разницей, что показатель экспоненты определяется спектром нулевой динамики системы.

В **Главе 6** рассматривается задача построения асимптотических наблюдателей для билинейных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{24}$$

Особенность этой системы в том, что при любых матрицах A, B и C эта система теряет управляемость в точке $x = 0$.

Вначале рассматривается случай билинейной системы на плоскости. Для нелинейной системы проблему представляет собой даже получение условий наблюдаемости. Для билинейных систем на плоскости показано, что систему (24) можно привести к виду , когда $B = bh$, $b \in \mathbb{R}^{2\times1}$, $b \in \mathbb{R}^{1\times2}$, доказана

Теорема 6.1. *Билинейная система $\dot{x} = Ax + ubhx$ на плоскости со скалярным выходом $y = Cx$ и произвольной ограниченной функцией $|u(t)| \leq u_0$ равномерно по t наблюдаема тогда и только тогда, когда*

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} + u(t)Cb \det \begin{bmatrix} C \\ h \end{bmatrix} \neq 0, \quad t \geq 0 \ .$$

Из этого утверждения можно получить достаточные и необходимые условия равномерной наблюдаемости, имеет место

Лемма 6.3.

1^0. *Пара $\{C, A + ubh\}$, где $|u(t)| \leq u_0$, равномерно по t наблюдаема, если выполнено одно из следующих условий:*

а) $Cb \neq 0$, $\det \begin{bmatrix} C \\ h \end{bmatrix} \neq 0$, $\left|\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right| > u_0|Cb| \left|\det \begin{bmatrix} C \\ h \end{bmatrix}\right|$;

b) наблюдаема пара $\{C, A\}$ и вектора C и h – коллинеарны;

c) наблюдаема пара $\{C, A\}$ и $Cb = 0$.

2^0**.** *Если пара $\{C, A + ubh\}$, где $|u(t)| \leq u_0$, равномерно по t наблюдаема, то пара $\{C, A\}$ – наблюдаема.*

Таким образом, в случае общего положения, равномерная наблюдаемость гарантированно имеет место при соблюдении ограничения

$$u_0 < \left| \frac{\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}}{Cb \det \begin{bmatrix} C \\ h \end{bmatrix}} \right| .$$

Это условие далее будем называть условием строгой равномерной наблюдаемости. При различных вырождениях задачи (условиях b) и c) Леммы 6.3) ограничение на управление $u(t)$ отсутствует.

Для каждого из описанных в Лемме 6.3 случаев предложены асимптотические наблюдатели.

Далее рассмотрены билинейные системы в n-мерном пространстве при различных вырождениях матрицы билинейности B. Для систем со скалярным выходом и вырожденной матрицей билинейности ($\operatorname{rank} B = 1$) доказана

Теорема 6.7. *Для равномерной по $u(t)$ наблюдаемости системы* (23) *достаточно выполнения условий:*

1.$B = bh, \quad b \in \mathbb{R}^{n\times 1}, h \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

2. $Cb = 0, \quad CAb = 0, \ldots, CA^{n-2}b = 0$.

3. Пара $\{C, A\}$ — наблюдаема.

При этих условиях построен наблюдатель для билинейной системы.

Для различных случаев вырождения матрицы билинейности (т.е. $rankB = p < n$) и векторного выхода рассмотрены различные случаи сочетания размерности выхода и ранга B, при этом задача была сведена к построению асимптотических наблюдателей для гипервыходных систем с неопределенностью, подробно рассмотренные в Главе 5.

В **Главе 7** рассматриваются дискретные системы вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{24}$$

где u_k — вход объекта в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$, а y_k — выход объекта; x_k — фазовый вектор или вектор состояния объекта из $\mathbb{R}^n$; A, B, C — параметры объекта. Приведены результаты, аналогичные соответствующим результатам для непрерывных систем. В частности, приведены методы синтеза наблюдателей полного фазового вектора для дискретных систем, а также рассмотрена задача синтеза функциональных наблюдателей, и задача синтеза наблюдателей в условиях неопределенности.

Основные публикации по теме диссертации.

Монография: С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

Статьи:

1. С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Асимптотические наблюдатели билинейных систем на плоскости.// Дифференц. уравнения, 2001, Т. 37, № 12, 1605-1611.

2. С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Экспоненциальные наблюдатели билинейных систем на плоскости.// ДАН Теория управления, 2001, Т. 385, N 5, 713-728.

3. С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Построение экспоненциальных наблюдателей для билинейных управляемых систем. // Дифференц. уравнения, 2002, Т.38, № 1, стр. 139-140.

4. С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Асимптотические наблюдатели N-мерных билинейных систем.// Нелинейная динамика и управление. Вып.3 Сбор-

ник статей под редакцией С.В. Емельянова и С.К. Коровина. - Москва Физматлит, 2003, стр. 19-26

5. С.К. Коровин, А.В. ,Ильин, В.В. Фомичев, А. Хлавенка. Асимптотические наблюдатели состояния неопределенных векторных линейных систем. // ДАН Теория управления, 2004, Т. 396, N 4, стр. 469-473.

6. С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом. // ДАН Теория управления, 2004, Т. 398, №1, с. 38-43.

7. А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев, А. Хлавенка. Синтез асимптотических наблюдателей для линейных векторных неопределенных систем. // Дифференц. уравнения, 2005, Т.41, № 1, стр. 73-81.

8. А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев, А. Хлавенка Наблюдатели для линейных динамических систем с неопределенностью.// Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, № 11, стр. 1443-1457

9. А. В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев Асимптотические наблюдатели с разрывным управлением для скалярных линейных неопределенных систем.// Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, № 10, 1310-1317.

10. С.К. Коровин, В.В. Фомичев, И.С. Медведев. Синтез минимальных функциональных наблюдателей. // ДАН. Теория управления. 2005, Т.404, №3, стр. 316-320.

11. В.В. Фомичев. О построении минимальных функциональных наблюдателей заданного порядка.// Дифференц. уравнения, 2006, Т. 42, № 2, 282-283.

12. А.В. Ильин, А.П. Носов, В.В. Фомичев. Методы синтеза наблюдателей для дискретных неопределенных систем. // Дифференц. уравнения, 2006, Т. 42, № 8, 1148.

13. С.К. Коровин, И.С. Медведев, В.В. Фомичев. Функциональные наблюдатели для линейных систем с неопределенностью. // Дифференц. уравнения, 2006, Т. 42, № 10, 1307-1317

14. С.К. Коровин, И.С. Медведев, В.В. Фомичев. Функциональные наблюдатели для линейных неопределенных стационарных динамических систем. // ДАН. Теория управления. 2006, Т.411, №1, стр. 316-320.

15. С.К. Коровин, А.В. Ильин, И.С. Медведев, В.В. Фомичев. К теории функциональных наблюдателей и стабилизаторов заданного порядка. // ДАН. Теория управления, 2006, Т.409, №5, стр. 601-605.

16. С.К. Коровин, В.В. Фомичев, И.С. Медведев. Построение функциональных наблюдателей минимального порядка. // Нелинейная динамика и управление. Вып.5 Сборник статей под редакцией С.В. Емельянова и С.К. Коровина. - Москва Физматлит, 2007, стр. 25-44

17. Носов А.П., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Стабилизация по выходу многосвязных неопределенных систем с устойчивой нулевой динамикой // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей. Вып. 5 / Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, с. 47-58.

18. С.К. Коровин, А.В. Ильин, В.В. Фомичев. Об одной канонической форме векторных управляемых систем. // ДАН. Теория управления, 2007, Т.414, №3, стр. 320-324

19. А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Асимптотические наблюдатели для билинейных систем с векторным выходом.// Дифференц. уравнения, 2008, Т.44, N 5 , С.613-618.

20. С.К. Коровин, И.С. Медведев, В.В. Фомичев. О минимальной размерности функционального наблюдателя с задаваемыми динамическими свойствами. Нулевая динамика линейных векторных стационарных систем // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей. Вып. 6. Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, с. 37-64;

21. А.В. Ильин, С.К. Коровин, В.В. Фомичев. Методы построения наблюдателей для линейных динамических систем при неопределенности. //Труды МИАН, 2008, том 262, стр.80-95.