Самарский государственный университет
Механико-математический факультет

На правах рукописи

САВИНОВ Евгений Анатольевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СМЕСЕЙ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2009

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета Самарского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор С.Я. Шатских

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Афанасьева Л.Г.;

доктор физико-математических наук, профессор Бенинг В.Е.

Ведущая организация: Математический институт РАН им. В.А. Стеклова.

Защита диссертации состоится 23 октября 2009г. в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ http://cs.msu.ru в разделе "Наука" – "Работа диссертационных советов" – "Д 501.001.44"

Автореферат разослан ”23” сентября 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н.П. Трифонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В работе изучаются свойства преобразований независимости случайных величин, распределения которых задаются непрерывными смесями. Для бесконечномерных устойчивых распределений (являющихся гауссовскими смесями) устанавливаются формулы условных квантилей. Для логарифмических производных некоторых непрерывных смесей устанавливаются явные представления и вероятностные свойства.

Актуальность темы.

Интерес к вероятностным мерам, представляющим собой непрерывные смеси, объясняется их частым появлением в теории вероятностей и ее приложениях [1] [2] [3] [4] [5]. Также хорошо известно, какую важную роль в теории вероятностей и математической статистике играет свойство статистической независимости. Наличие линейного преобразования независимости для гауссовского вектора является фактической основой многих вероятностно-статистических теорий, которые в той или иной степени используют гауссовские распределения вероятностей. Здесь достаточно упомянуть теорию гауссовских случайных процессов и полей, линейный регрессионный анализ, а также дисперсионный, факторный анализы. Преобразование независимости для негауссовских случайных величин и, тем более, для случайных процессов, стало объектом исследований лишь в последнее время. Фактически первой работой, посвященной таким преобразованиям была работа М.Розенблатта [6]. Более подробно свойства этого преобразования изучались в работах Шатских С.Я. [7] [8], Кнутовой Е.М. [9], Горячкина О.В. [10] [11] и др. Однако в настоящее время теория преобразований независимости еще далека

[1]Круглов В.М. *Смеси вероятностных распределений*//Вестник моск. ун-та, сер. 15, ВМиК, 1991, 2, с. 3-15.

[2]Королев В.Ю. *Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов*: Монография. – М.:МАКС Пресс, 2004. – 124с.

[3]Норин Н.В. *Свойства дифференцируемости смесей гауссовских мер*// Обозрение прикладной и промышленной математики. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2006. Т.13, вып. 6. С. 983-992.

[4]Норин Н.В., Смолянов О.Г. *Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве*// Матем. заметки. – 1993. – Т.54. – №6. – С. 135-138.

[5]Teicher H. *On the mixture of distributions*//Ann. Math. Statist. 1960. 31. p. 55-73.

[6]Rosenblatt M. *Remarks on multivariate transformation.* – Ann. Math. Stat., 1952, v.23, p. 470-472.

[7]Шатских С.Я. *Об одном варианте преобразования независимости*// Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 815-816.

[8]Шатских С.Я. *Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер*// Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 292-311.

[9]Кнутова Е.М., Шатских С.Я. *Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений*// Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 2, с. 374-382.

[10]Горячкин О.В. *Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи.* – М.:Радио и связь, 2003. – 229 с.

[11]Горячкин О.В. *Метод анализа независимых компонент на основе преобразования независимости*// Доклады Академии Наук Российской Федерации, т.398, №4, 2004.

от своего завершения.

Изучаемые в настоящей работе преобразования независимости выражаются через условные распределения. В то же время условные распределения позволяют записать уравнения для условных квантилей. Как известно, не все устойчивые распределения вероятностей имеют математические ожидания. Поэтому при решении многих задач математической статистики вместо условных моментов для таких распределений естественно рассматривать условные медианы и квантили. Кроме того системы случайных величин, полученные в результате рассматриваемых преобразований независимости, близки к биортогональным. Например, биортогональными они являются в гауссовском случае. В теории случайных процессов хорошо известны биортогональные гауссовские случайные поля.

Теория дифференцирования мер в бесконечномерных линейных пространствах была заложена в работах Авербуха В.И., Смолянова О.Г., Фомина С.В. [12] , Скорохода А.В. [13] В скором времени эта теория приобрела самостоятельный интерес, что выразилось во многих последующих работах, посвященных как дифференциальным свойствам мер в целом, так и, в частности, дифференцированию гауссовских смесей [14] [15] [16].

Таким образом, тематика настоящей работы является актуальной как с точки зрения развития теории, так и с точки зрения практических применений.

Цель работы.

Целью настоящей работы является продолжение развития направления теории вероятностей, начатого в работах М. Розенблатта, Скорохода А.В., Фомина С.В., Шатских С.Я., в частности, изучение свойств преобразований независимости, обобщение их на более широкие классы мер и пространств, а также, изучение свойств логарифмических производных, а именно:

1. доказать новые варианты центральной предельной теоремы для схемы серий условных распределений непрерывных смесей вероятностных мер;
2. установить формулы для условных квантилей устойчивых распределений в гильбертовом пространстве;

[12]Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах.* – Тр. ММО, 1971, вып. 24, с. 132-174.

[13]Скороход А.В. *Интегрирование в гильбертовом пространстве.*–М.: Наука, 1975. – 232 с.

[14]Богачев В.И. *Основы теории меры.* – Т.1. – Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2006. – 584 с.

[15]Норин Н.В. *Свойства дифференцируемости смесей гауссовских мер*// Обозрение прикладной и промышленной математики. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2006. Т.13, вып. 6. С. 983-992.

[16]Богачев В.И. *Гауссовские меры.* – М.: Наука, 1997. – 352 с.

3. получить обобщение сходимости условных распределений непрерывных нормальных смесей на случай локально выпуклого пространства;
4. получить явные формулы для логарифмических производных непрерывных смесей некоторого класса негауссовских мер в пространстве последовательностей; с их помощью установить новые вероятностные свойства логарифмических производных изучаемых классов мер;

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана центральная предельная теорема (ЦПТ) для схемы серий условных распределений меры Стьюдента на гильбертовом пространстве. Указанная схема серий построена на основе проекций исходной меры на конечномерные подпространства, натянутые на произвольный ортонормированный базис. Показано, что асимптотика сумм в схеме серий, зависит от выбора базиса.

2. Показано, что в случае специально выбранного базиса имеет место ЦПТ для схемы серий условных распределений устойчивой эллиптически контурированной меры.

3. Показано, что в схеме суммирования слагаемые являются зависимыми случайными величинами, и исследован характер этой зависимости.

4. Получены формулы для условных квантилей устойчивых эллиптически контурированных распределений в гильбертовом пространстве.

5. С помощью известной конструкции воспроизводящего гильбертова пространства гауссовской меры и пространства Камерона-Мартина установлена сходимость почти наверное условных распределений непрерывных нормальных смесей, заданных на линейном топологическом (локально выпуклом) пространстве.

6. получены явные формулы для логарифмических производных (ЛП) вдоль координатных направлений некоторых непрерывных смесей негауссовских мер в пространстве последовательностей. С помощью найденных представлений установлены новые вероятностные свойства логарифмических производных изучаемых классов мер. Приведены примеры логарифмических производных некоторых смесей, в частности, 1-симметричной меры (непрерывной смеси распределений Коши).

Методы исследования.

В работе используются методы теории вероятностей, теории функций и функционального анализа.

Теоретическая и практическая значимость.

В основном работа носит теоретический характер. Теоретическая значимость состоит в доказательстве предельных теорем для условных распределений (преобразований независимости) и выводе формул для логарифмических производных непрерывных смесей. Эти результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории преобразований независимости и теории дифференцирования. Практическая значимость заключается в получении формул для условных квантилей устойчивых эллиптически контурированных мер, которые могут быть использованы при решении задач статистики случайных процессов (экстраполяция, интерполяция, фильтрация).

Апробация работы.

Результаты научных исследований докладывались на Всероссийских школах-коллоквиумах по стохастическим методам (VIII - Йошкар-Ола, 2001г., XI - Сочи, 2004г., XIV - Сочи-Адлер, 2007г., предс. оргкомитета - академик Прохоров Ю.В.), на Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (X - Сочи-Дагомыс, 2009г., предс. оргкомитета - академик Прохоров Ю.В.), на семинаре каф. математической статистики ВМиК МГУ (2008г., 2009г., рук. академик Прохоров Ю.В.), на семинаре каф. функционального анализа и теории функций мех.-мат. ф-та СамГУ (рук. проф. Асташкин С.В.), на семинаре каф. теории вероятностей и математической статистики мех.-мат. ф-та СамГУ (рук. проф. Шатских С.Я.).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах в ведущих рецензируемых научных журналах. Список приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, трех глав, разбитых на 15 параграфов, и списка литературы, содержащего 59 наименований. Общий объем работы составляет 148 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит общую характеристику работы, описание объектов исследования и основных результатов.

Первая глава посвящена предельным теоремам для схемы серий случайных величин, полученных в результате преобразования независимости, на гильбертовом пространстве. Кроме того, решена задача построения условных квантилей для устойчивых эллиптически контурированных распределений в гильбертовом пространстве.

В **§1** рассматривается мера Стьюдента. Семейство условных распределений (преобразование независимости) строится по произвольному ортонормированному базису. Доказана ЦПТ для нормированных сумм в схеме серий случайных величин, полученных в результате преобразования независимости. Также показано, что формулировка ЦПТ существенно зависит от выбора базиса.

Пусть на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ со счетным о.н. базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и борелевской σ-алгеброй задана счетно-аддитивная мера Стьюдента с r степенями свободы μ с характеристическим функционалом

$$\Psi_{\mu}(y) = \int\limits_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{2} < By, y >\right\} g_r(t)\, dt, \quad y \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

где B - линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор, с собственными векторами $\{e_n\}$,

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \quad t > 0. \tag{2}$$

Выберем $\{f_k\}$ - произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Введем условную функцию распределения

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_i |\, x_1, \ldots, \widehat{x_i}\,, \ldots, x_n)$$

случайной величины $< h, f_i >$ относительно системы случайных величин

$$< h, f_1 >, \ldots, \widehat{< h, f_i >}, \ldots, < h, f_n >,$$

здесь $\hat{}$- знак пропуска элемента.

Мы рассматриваем схему серий случайных величин

$$X_i^{(n)} := \Phi^{-1}\left(F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_n)\right), \tag{3}$$

где $X_i =< h, f_i >$, $h \in \mathbb{H}$, $\Phi(\cdot)$ - функция распределения (0,1)-гауссовского закона. (Отметим, что при этом с.в. $X_i^{(n)}$ являются стандартными гауссовскими и, как будет отмечено далее, зависимыми).

Введем семейство ортопроекторов

$$\pi_m : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_m,$$

где подпространства $\mathbb{H}_m := span\{f_1,\ldots f_m\},\ m = 1,2,\ldots$.
Также введем еще одно семейство ортопроекторов $\{\pi_{mi}\}$: для $h = \sum_{k=1}^{\infty} < h, f_k > f_k$ определим

$$\pi_{mi}h := \sum_{k=1,k\neq i}^{m} < h, f_k > f_k, \quad m = 1,2,\ldots, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Теорема 1.1 Пусть μ - мера Стьюдента на гильбертовом пространстве, заданная характеристическим функционалом (1). Если ортонормированный базис $\{f_k\}$ обладает свойством

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{<(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i, f_j>}{[<(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i, f_i><(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j, f_j>]^{1/2}} = \sigma^2, \tag{4}$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Отметим, что не для каждого о.н.базиса и меры Стьюдента или, что то же самое, не для каждой пары $(\{f_i\}_{i=1}^{\infty},\ B)$ выполнено условие (4). В диссертации рассмотрен пример пары $(\{f_i\}_{i=1}^{\infty},\ B_0)$, для которой условие теоремы 1.1 не выполняется. Но выполняется

Теорема 1.2 Если ортонормированный базис $\{f_k\}$ обладает свойством

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{<(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i, f_j>}{[<(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_i, f_i><(\pi_n B\pi_n)^{-1}f_j, f_j>]^{1/2}} = \sigma^2, \tag{6}$$

то

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2).$$

Для приведенного в диссертации примера значение $\sigma^2 = \frac{1}{12}(\pi^2 - 3)$.

§2 посвящен случаю, когда мера μ устойчивая эллитически - контурированная, а базис $\{f_i\}$ совпадает с $\{e_i\}$. Отметим, что для меры Стьюдента в случае собственного базиса условие (4) выполняется, и имеет место сходимость (5) ($\sigma^2 = 1$). В этом параграфе показано, что эта же сходимость всегда выполняется и для случая устойчивой эллиптически-контурированной меры с характеристическим функционалом

$$\Psi(y) = \exp\left[-\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < y, e_j >^2\Big)^{\alpha/2}\right], \quad y \in \mathbb{H} \tag{7}$$

и показателем $\alpha \in (0, 2)$, где $\lambda_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$. (теорема 1.3 в диссертации).

Отметим, что ранее (см. [3],[5]) теорема 1.3 была доказана также для случая меры Коши. В этом доказательстве использовалась явная формула для условных функций распределения, использующая B-распределения, и двусторонние оценки B-распределений В доказательстве же теоремы 1.3 для устойчивой меры существенным образом использовался факт некоррелированности величин $X_i^{(n)}$, полученный в этом же параграфе диссертации

Утверждение. Для любого натурального $m \le n$ и любого набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$ случайные величины $X_{i_1}^{(n)}, X_{i_2}^{(n)}, \ldots, X_{i_m}^{(n)}$ некоррелируемы в совокупности, т.е.

$$\mathbb{M}\left\{X_{i_1}^{(n)} X_{i_2}^{(n)} \ldots, X_{i_m}^{(n)}\right\} = 0. \tag{8}$$

В **§3** доказан закон больших чисел для квадратов рассматриваемых случайных величин $X_i^{(n)}$.

Теорема 1.4 Пусть μ устойчивая мера, заданная характеристическим функционалом (7). Имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[X_i^{(n)}\right]^2 \xrightarrow{\mu} 1, \quad n \to \infty.$$

Как было отмечено выше, в случае собственного о.н. базиса случайные величины $X_i^{(n)}$ являются некоррелированными гауссовскими. Возникает вопрос о том, являются ли они при этом независимыми. В **§4** показано на примере меры Коши, что случайные величины в пределах каждой серии являются зависимыми, при это они не обладают свойством отрицательной или положительной зависимости (не являются ассоциированными). Кроме того, доказано, что распределения векторов одной размерности из разных серий различны, но вектора одной размерности, составленные из случайных величин одной серии, имеют одно и то же распределение.

В **§5** решается задача построения условных квантилей для устойчивых эллиптически контурированных распределений в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mu_\alpha^B\{\cdot\}$ - устойчивая эллиптически контурированная вероятностная мера на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}\}$ с характеристическим функционалом

$$\Psi(y) = \exp\left\{-\langle Bh, h\rangle^{\alpha/2}\right\}, \quad h \in \mathbb{H},$$

где B - линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор и $\alpha \in (0, 2]$.

Введем в пространстве $\mathbb{H}$ новое скалярное произведение и соответствующую норму

$$|\cdot|_-^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle_- := \langle B\cdot,\cdot\rangle.$$

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ - произвольный ортонормированный (относительно исходного скалярного произведения $<\cdot,\cdot>$) базис в пространстве $\mathbb{H}$, минимальный относительно введенной нормы, т.е., любой элемент f_i не принадлежит замыканию (по норме $|\cdot|_-$) линейной оболочки всех остальных элементов этого базиса. Введем наименьшую $\sigma-$алгебру $\mathcal{B}_{ni}$ подмножеств пространства $\mathbb{H}$, относительно которой измеримы все $f_j(h)$, у которых $j \neq i$.

Следующая теорема дает формулу для условной квантили $q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h)$ случайной величины $f_i(h)$ относительно $\sigma-$алгебры $\mathcal{B}_{ni}$.

Теорема 1.5 Для любого минимального (относительно нормы $|\cdot|_-$) ортонормированнго базиса $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ пространства $\mathbb{H}$ имеет место равенство

$$q_{i|\mathcal{B}_{ni}}^{(p)}(h) = m_i^{(2)}(h) + s_\infty(h)|f_i - f_i^*|_- \Phi^{-1}(p).$$

где $m_i^{(2)}(h) = \mathbb{M}_2\left\{f_i(h)\,|\,\mathcal{B}_{ni}\right\}$ условное математическое ожидание $f_i(h)$ относительно гауссовской меры $\mu_2^B\{\cdot\}$; f_i^* - проекция (относительного скалярного произведения) $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$ элемента f_i на замыкание (по норме $|\cdot|_-$) линейной оболочки всех остальных элементов базиса;

$$s_\infty^2(h) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\langle(\pi_n B\pi_n)^{-1}\pi_n h, \pi_n h\right\rangle,$$

где π_n - семейство $<\cdot,\cdot>$ - ортопроекторов пространства $\mathbb{H}$ на подпространства $\mathbb{H}_n := span\{f_1,\dots,f_n\}$, $n = \overline{1,\infty}$; $\Phi(\cdot)$ - стандартное гауссовское распределение на $\mathbb{R}^1$.

Вторая глава посвящена асимптотике условных функций распределения непрерывной гауссовкой смеси на локально выпуклом пространстве.

Пусть X локально выпуклое пространство, X^* - пространство линейных непрерывных функционалов на X, $\mathcal{E}(X)$ - σ-алгебра, порожденная всеми элементами из X^*, γ – радоновская центрированная гауссовская мера на X, X^*_γ - воспроизводящее гильбертово пространство гауссовской меры γ, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – о.н. базис в X^*_γ. Введем семейство гауссовских мер $\{\gamma_\sigma\}_{\sigma>0}$ такое, что $\gamma_\sigma(A) = \gamma\left(\frac{1}{\sigma}A\right)$, $A \in \mathcal{E}(X)$. Пусть мера μ задана соотношением

$$\mu(A) = \int\limits_0^\infty \gamma_\sigma(A)\,\nu(d\sigma), \tag{9}$$

Определим функционал $s^2_\infty(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\left[f_j(x)\right]^2, \quad x \in X$, и случайные величины $X_k = \langle x, f_k\rangle$. Аналогично первой главе рассматриваются условные функции распределения одного набора таких случайных величин относительно всех остальных, и доказывается

Теорема 2.2 Для почти всех $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} F^{\mu}_{i_1,\ldots,i_k|j_1,\ldots,j_{n-k}}(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}|X_{j_1},\ldots,X_{j_{n-k}}) = \prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{X_{i_l}}{s_\infty(x)}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ – стандартное гауссовское распределение, $\{i_1,\ldots,i_k\}$, $\{j_1,\ldots,j_{n-k}\}$ произвольное разбиения множества $\{1,\ldots,n\}$ на упорядоченные по возрастанию подмножества.

Далее показано, что для схемы серий условных распределений $X_i^{(n)} = \Phi^{-1}\left(F^{\mu}_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_n)\right)$ также выполняется ЦПТ.

Третья глава посвящена логарифмическим производным симметрических мер в пространстве последовательностей R^∞. Симметрическая мера порождается последовательностью бесконечно переставляемых случайных величин и в силу теоремы Де'Финетти является непрерывной смесью вероятностных мер.

В **§1** вводятся необходимые объекты, определения и замечания.

Будем рассматривать измеримое пространство $(R^\infty, \mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty))$, где R^∞ - пространство последовательностей, $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$ - борелевская σ-алгебра. Введем на R^∞ систему координатных функционалов

$$f_k(x) = x_k, \quad \forall x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in R^\infty, k = 1,2,\ldots,$$

и будем рассматривать класс симметрических мер μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ вида

$$\mu\{A\} = \int\limits_0^\infty \mu^y\{A\}\, dG(y), \tag{10}$$

где $G(\cdot)$ некоторая функция распределения на $(0, +\infty)$, а семейство вспомогательных мер $\{\mu^y\}_{y>0}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$ определяется последовательностью конечномерных распределений

$$\mu^y\{x \in R^\infty : f_1(x) \le t_1, \ldots, f_n(x) \le t_n\} = \prod_{j=1}^n H\left(\frac{t_j}{y}\right), \tag{11}$$

где $H(t)$ - некоторая функция распределения с гладкой плотностью $H'(t) = h(t) > 0$.

Будем также рассматривать симметрические меры (10), для которых семейство мер $\{\mu^y\}_{y>0}$ определяется последовательностью конечномерных распределений

$$\mu^y\{x \in R^\infty : f_1(x) \le t_1, \ldots, f_n(x) \le t_n\} = \prod_{j=1}^n F\left(t_j|y\right), \tag{12}$$

где $F(t|y)$ некоторая условная функция распределения, обладающая свойствами:

1°. существует плотность $f(t|y)$, гладкая по $t \in R$ при любом $y > 0$;

2°. если $y_1 \ne y_2$, то $F(t|y_1) \ne F(t|y_2)$, $\forall t \in R$.

Напомним известное определение производной и логарифмической производной меры

Определение 3.2 Производной борелевской меры μ по направлению $f \in \mathcal{D}(\mu) \subset \mathcal{R}^\infty$ называется мера $d_f\mu$, определяемая равенством

$$d_f\mu(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A + tf) - \mu(A)}{t}, \quad A \in \mathcal{B}(R^\infty).$$

Если мера μ дифференцируема по направлению f, то мера $d_f\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ, и существует производная Радона-Никодима $\beta_f^\mu(x) := \frac{d(d_f\mu)}{d\mu}(x)$, которая называется *логарифмической производной меры μ по направлению f*. Линейное подпространство $\mathcal{D}(\mu)$ в R^∞ называется подпространством дифференцируемости.

Хорошо известна формула для вычисления логарифмических производных сферически-симметричных мер (непрерывных смесей гауссовских) в локально выпуклом пространстве. В частности, в пространстве R^∞ логарифмическая производная сферически-симметричной меры μ по направлению f_k имет вид $\beta^\mu_{f_k}(x) = -f_k(x)/s^2_\infty(x)$, где функционал $s^2_\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n\sum_{k=1}^n f_k^2(x)$ определен μ-п.н. В то же время относительно меры более общего вида (например смеси α - устойчивых мер) такой предел может не существовать п.н., поэтому для описания логарифмических производных таких смесей возникает необходимость в поиске подходящих аналогов для $s_\infty(x)$. **§2** посвящен как раз таким представлениям.

В **§3** сформулированы основные результаты главы.

Перед вычислении логарифмических производных возникает вопрос о дифференцируемости рассматриваемой меры по нужному направлению.
Теорема 3.1. Мера μ, заданная соотношениями [(10),(11)], дифференцируема в направлении $f \in R^\infty_0$ только при выполнении следующих условий

$$\int\limits_0^\infty y^{-1}dG(y) < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^\infty |h'(t)|\,dt < \infty. \tag{13}$$

Следующая теорема дает явные формулы для логарифмических производных рассматриваемых мер.
Теорема 3.2 Пусть мера μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ задана соотношениями (10) и (12) и дифференцируема вдоль всех направлений $f_k,\ k = 1, 2, \ldots$. Тогда μ-почти наверное

$$\beta^\mu_{f_k}(x) = \frac{f'(f_k(x)|s_\infty(x))}{f(f_k(x)|s_\infty(x))}. \tag{14}$$

Если μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ задана соотношениями (10) и (11) и выполняются условия и (13), то μ-почти наверное

$$\beta^\mu_{f_k}(x) = \frac{1}{s_\infty(x)}\beta^h_1\left(\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}\right), \tag{15}$$

где $\beta^h_1(t) = h'(t)/h(t)$.

Следующие теоремы описывают вероятностные свойства логарифмических производных.
Теорема 3.3

Пусть мера μ задана соотношениями (10) и (11), и выполнены условия (13). Тогда относительно меры μ каждая из следующих систем случайных величин независима.

$$\left\{s_\infty(x), \beta^\mu_{f_1}(x)s_\infty(x), \ldots, \beta^\mu_{f_n}(x)s_\infty(x), \ldots\right\},$$

$$\left\{s_\infty(x), f_1(x)\beta^\mu_{f_1}(x), \ldots, f_n(x)\beta^\mu_{f_n}(x), \ldots\right\}.$$

Относительно меры μ каждая из случайных величин $\beta^\mu_{f_k}(x)s_\infty(x)$, $f_k(x)\beta^\mu_{f_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ не зависит от семейства

$$f_1(x), \ldots, \widehat{f_k(x)}, \ldots, f_n(x), \ldots,$$

Теорема 3.4

Пусть мера μ задана соотношениями (10) и (11), и выполнены условия (13).

1°. Если к тому же выполняется условие $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |th'(t)|\,dt < \infty$, то μ почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\beta^\mu_{f_k}(x) = -1. \tag{16}$$

2°. μ почти наверное выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|\beta^\mu_{f_k}(x)\right| = \frac{1}{s_\infty(x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|\,dt. \tag{17}$$

§4 состоит из примеров вычисления логарифмических производных.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Сергею Яковлевичу Шатских, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

[1] Савинов Е.А. Одно асимптотическое свойство условных распределений, порожденных устойчивой эллиптически-контурированной мерой на локально выпуклом пространстве //Обозрение прикладной и промышленной математики. VIII Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. М: ТВП. 2001. Т.8, вып. 2. С. 797-798.

[2] Савинов Е.А. Логарифмические производные симметричных распределений в пространстве последовательностей и их вероятностные свойства // Вестник СамГУ. 2004. Спец. вып. С. 36-48.

[3] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для схемы серий условных распределений меры Коши в гильбертовом пространстве // Обозрение прикладной и промышленной математики. XI Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. Часть II. М. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2004. Т.11, вып. 4. С. 918-919.

[4] Савинов Е.А. Асимптотические свойства конечномерных условных распределений сферически-симметричных мер на локально выпуклом пространстве // Известия вузов: Математика. 2005. №3. С. 71-78.

[5] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями сигма-аддитивной меры Коши // Вестник СамГУ. 2005. №6(40). С. 51-59.

[6] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями устойчивой меры на гильбертовом пространстве // XIV Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. Часть IV. М. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2007.

[7] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями проекций устойчивой меры на гильбертовом пространстве // Вестник СамГУ. 2007. №9/1. С. 121-127.

[8] Савинов Е.А. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями меры Стьюдента на гильбертовом пространстве // Обозрение прикладной и промышленной математики. Тезисы докладов. М. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2009. Т.16, вып. 5-6.

[9] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Условные квантили устойчивых распределений в гильбертовом пространстве //Обозрение прикладной и промышленной математики. Тезисы докладов. М. Редакция журнала "ОП и ПМ". 2009. Т.16, вып. 5-6.