МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Сорокин Константин Сергеевич

Гарантии в многокритериальных динамических задачах

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. И. Жуковский
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Горелик
	кандидат физико-математических наук, доцент В. С. Молоствов
Ведущая организация:	Факультет прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Защита диссертации состоится 23 октября 2009 г. в 11.00
на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44»

Автореферат диссертации разослан «   » сентября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор   Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена исследованию активно развивающегося в последние годы направления теории принятия решений: многокритериальным задачам при неопределенности. При этом к решению предъявляется дополнительное требование оптимального сочетания исходов и сожалений-рисков (последние в формализации Сэвиджа). Рассматривается как статический случай (глава 1), так и динамический (глава 2). Эти задачи находится на стыке теорий многокритериальных задач и принятия решения в условиях неопределенности, а в динамическом случае - еще и теории дифференциальных игр.

Выделим последовательно особенности рассматриваемой задачи, где важнейшим является вопрос принятия решения в условиях неопределенности Здесь предполагается, что помимо выбора лица, принимающего решение (ЛПР), на итоговый результат влияет еще и некоторый неопределенный фактор (неопределенность), о котором известны лишь границы возможного изменения, но какая-либо вероятностная информация отсутствует.

Известен ряд принципов решения однокритериальных задач при неопределенности: максиминной полезности, минимаксного сожаления (идея которого и использована в настоящей работе), пессимизма-оптимизма, недостаточного основания и др. Каждый из этих принципов формирует критерий, использование которого приводит ЛПР к однозначному ответу.

Принцип минимаксного сожаления предполагает, что строится функция, оценивающая сожаление ЛПР о том, что он выбрал данную конкретную альтернативу, а не наилучшую (если бы знал реализовавшуюся неопределенность). В дальнейшем будем называть эту функцию *функцией сожаления.* По форме функция сожаления является также критерием эффективности, альтернативным исходному. При этом основные свойства критерия сохраняются, например, если множества всевозможных альтернатив у ЛПР и реализаций неопределенных факторов компактны, а критерий эффективности непрерывен по совокупности аргументов, тогда функция сожаления (по этому критерию) также будет непрерывной. Этим обосновывается возможность рассматривать функцию сожаления наравне с исходным критерием эффективности, переходя от однокритериальной задаче к двухкритериальной. Так проблематика естественным образом смещается в область многокритериальных задач при неопределенности (в дальнейшем - МЗН).

Принятие решения в задаче многокритериальной оптимизации обычно сводится к выбору ЛПР одной альтернативы из некоторого допустимого множества. Последствия такого выбора оцениваются не непосредственно, а за счет набора значений функций (в дальнейшем - критериев), определенных на множестве допустимых альтернатив: чем больше значение каждой из функций, тем «лучше» выбранная альтернатива. Основная проблема (и отличие от классических задач оптимизации) состоит в том, что критериев несколько, следовательно, обычного понятия максимума недостаточно и нужно вводить специальное понятие «векторного максимума». Основные варианты такого понятия были предложены в работах Парето и Гурвица (максимум по Слейтеру). Современное состояние классической теории принятия решения в многокритериальных задачах отражено в известной монографии В. В. Подиновского и В. Г. Ногина [1].

Отметим, что и в многокритериальных задачах, и в задачах при неопределенности отсутствует единый подход к понятию решения; когда же рассматриваются МЗН, то единства в определении «хорошего» решения нет тем более.

Впервые, по-видимому, на МЗН обратили внимание Р. Ауманн и Б. Пелег в [2] при определении α- и β-оптимальности. На основе этих понятий в [3] было предложено обобщение понятия минимакса на случай антагонистической игры с векторной функцией выигрыша (векторный минимакс). В диссертационной работе используется векторный аналог седловой точки (по Слейтеру или Парето). И, если МЗН образована за счет расширения однокритериальной задачи, то понятия векторной седловой точки по Слейтеру, векторной седловой точки по Парето и «обычной» седловой точки в исходной задаче оказываются тесно связанными, что выявлено в разделе 1.4 диссертации. Если же перейти к естественному обобщению этой задачи и считать, что исходная задача также была многокритериальной, то столь тесная связь пропадает и получается, что переход к расширенной задаче (то есть использование функций сожаления, построенных отдельно по каждому критерию наравне с исходными критериями) существенно расширяет множество решений.

При построении векторного аналога седловой точки существенную роль играет метод свертки критериев, который обеспечивает достаточные условия, а при определенных предположениях еще и критерий для поиска такого решения. Наиболее значимы здесь свертки Карлина (линейные) и Гермейера [4] (много других вариантов сверток приведено в [1]); основная их идея в том, что ЛПР фиксирует набор коэффициентов свертки и по этому набору формируется единый критерий, при максимизации которого и находится соответствующий векторный оптимум (по Слейтеру или Парето). При дополнительных предпо-

[1] *В. В. Подиновский, В. Д. Ногин.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982.

[2] *R. J. Aumann, B. Peleg.* Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1960. — Vol. 66. — Pp. 173–179.

[3] *G. Jentzsch.* Some thoughts on the theory of cooperative games // *Advances in game theory. Ann. Math. Studies.* — 1964. — Vol. 52. — Pp. 407–442.

[4] *Ю.Б. Гермейер.* Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1971.

ложениях, перебирая всевозможные наборы коэффициентов, можно найти все множество оптимальных точек по Слейтеру или по Парето. Тут естественным образом возникает вопрос о связи коэффициентов свертки и результирующих значений критериев, например, могут ли значения коэффициентов свертки соответствовать «важности» критериев.

Задача о сужении множества всех максимальных по Слейтеру (или Парето) значений критериев эффективности на основании информации о «важности» критериев рассматривалась неоднократно (см., например, работы [5,6,7] и библиографию к ним), однако обычно используется информация об относительной важности критериев (например, «первый критерий важнее второго в 2 раза»), тогда как вопрос о соотношении коэффициентов свертки и результирующих значений критериев обычно остается в стороне. А его решение позволило бы выбирать соответствующий предпочтениям ЛПР элемент из множества векторных оптимумов без предварительного построения всего этого множества. Исследованию вопроса посвящен раздел 1.6.

В главе 2 рассматриваются динамические многокритериальные задачи при неопределенности (ДМЗН). В отличие от обычных (статических) МЗН, здесь предполагается, что управляемая система изменяется во времени и ЛПР может получать ту или иную информацию об этом функционировании, например, в виде обратной связи. Математическая формализация постановки такой задачи основывается на теориях оптимального управления и дифференциальных игр. Обращаясь к теории дифференциальных игр, будем считать первым игроком ЛПР, а вторым — лицо, «руководящее» выбором реализации неопределенного фактора.

В разделе 2.1 обсуждаются типы альтернатив ЛПР в зависимости от характера информации, получаемой ЛПР в процессе функционирования системы. Если никакой информации не поступает, то как альтернатива ЛПР, так и реализация неопределенного фактора формируются как функции от времени; тогда будем говорить, что ЛПР использует программные альтернативы или просто *программы.* Формализация таких задач и методика их решения основывается на теории оптимального управления, созданной Л. С. Понтрягиным [8] и его сотрудниками и получившей в дальнейшем широчайшее развитие. Принцип максимума используется для построения решения ДМЗН в классе программных альтернатив и неопределенностей. Игровые постановки таких задач активно изучались Л. А.

[5] *В. А. Горелик, Т. П. Фомина.* Основы исследования операций. — М.: МПГУ, 2004.

[6] *В. Д. Ногин.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[7] *В. В. Подиновский.* Количественная важность критериев // *Автоматика и телемеханика.* — 2000. — № 5. — С. 110 – 123.

[8] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

Петросяном в [9] (в классе кусочно-программных стратегий), где к требованиям оптимальности добавились требования динамической устойчивости принципов оптимальности.

Если же ЛПР в процессе функционировании динамической системы получает информацию о текущем состоянии системы — *позиции,* то говорят, что ЛПР выбирает свою альтернативу из класса *позиционных стратегий.* По-видимому, впервые такие задачи были рассмотрены в известной книге Айзекса [10]. В дальнейшем позиционные дифференциальные игры получили развитие и теоретическое обоснование в работах Н. Н. Красовского, А. И. Субботина и их учеников [11]. В данном случае по аналогии предполагаем, что неопределенный фактор формируется в том же классе позиционных стратегий, что использует ЛПР, то есть нет информационной дискриминации неопределенного фактора. Формализация МДЗН, основывающаяся на классе позиционных альтернатив и неопределенностей, отнесена в раздел 2.2.

В случае, когда предполагается неравнозначность в информированности ЛПР и неопределенного фактора, а именно, когда ЛПР в каждый момент времени «знает» не только текущую позицию, но и текущее значение неопределенного фактора, будем говорить, что ЛПР использует в качестве альтернатив класс контрстратегий. При этом возможен как вариант, при котором неопределенность использует программу, так и вариант позиционной реализации неопределенности. В разделе 2.4 активно используется пара позиционная контрстратегия – программная неопределенность. Заметим, что линейно-квадратичные ДМЗН в том виде, в котором они приводятся в разделах 2.2 и 2.4, подробно рассматривались (как в многокритериальной, так и в игровой постановках) в работах В. И. Жуковского и его учеников.

Цель работы

В проводимом в диссертации исследовании ставятся следующие цели:

- выяснить общие свойства гарантий по исходам и сожалениям в одно- и многокритериальных задачах при неопределенности; на их основе предложить конструктивные методы построения всего множества таких гарантий;
- исследовать возможность применения принципа максимума Понтрягина для построения гарантии по исходам и сожалениям в динамических многокритериальных задачах при неопределенности;

[9] *L. A. Petrosian.* Differential Games of Pursuit. — London, Singapore: World Sci. Publ. Co. Pt. Ltd., 1993.

[10] *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1965.

[11] *Н. Н. Красовский, А. И. Субботин.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

- исследовать класс линейно-квадратичных динамических многокритериальных задач при неопределенности на предмет существования гарантированного по исходам и рискам решения; получить (при выполнении условий существования) явный вид такого решения.

Научная новизна работы

Все основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. для однокритериальной задачи при неопределености установлено соотношение между седловой точкой и векторными седловыми точками (по Слейтеру и Парето) в расширенной задаче (при учете двух критериев — исхода и сожаления);

2. для динамических многокритериальных задач при неопределенности в классе программных альтернатив и неопределенностей предложен способ нахождения гарантированного по исходу и сожалению решения на основе принципа максимума Понтрягина; приведен пример успешного применения этой методики;

3. для линейно-квадратичных динамических многокритериальных задач при неопределенности в классе контрстратегия ЛПР – программная неопределенность построен явный вид гарантированного по исходу и сожалению решения.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации имеют теоретическую направленность. Полученные в разделах 1.3-1.5 свойства гарантий по исходу и сожалению носят конструктивный характер и могут быть положены в основу практических алгоритмов решения многокритериальных задач при неопределенности. Установленная в разделе 1.6 теорема позволяет точнее очертить сферу применимости методов и алгоритмов систем поддержки принятия решений в многокритериальной среде. Методы решения динамических многокритериальных задач из разделов 2.2 и 2.4 могут использоваться при исследовании некоторых классов динамических задач принятия решения, а также при создании соответствующих программных продуктов.

Методы исследования

В первой главе применяются классические методы теории оптимизации, а также математического анализа. Кроме того, используются различные методы сверток критериев в многокритериальных задачах, а в разделе 1.6 сами эти свертки становятся предметом рассмотрения. Во второй главе активно применяется метод динамического программирования и принцип максимума Понтрягина, а также разрабатываются специальные варианты этих методов для решения рассматриваемых в работе задач.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались автором на научно-исследовательском семинаре «Прямые и обратные задачи оптимального управления» на факультете ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова и совместном семинаре программы «Динамические системы» Международного института прикладного системного анализа и факультета ВМиК МГУ, а также на ряде конференций [3, 2, 7, 10].

Публикации

Основные результаты работы представлены в статьях [1, 5, 8, 9] и материалах конференций. Кроме того, автором были написаны раздел 3.8 [4] из монографии [12] и раздел 3.6 [6] из монографии [13], оба упомянутых раздела содержат результаты численного расчета модельных примеров, непосредственно перекликающихся с материалами настоящей работы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 83 наименования. Общий объем составляет 121 страницу печатного текста. Работа включает 7 графиков.

Краткое содержание работы

В **главе 1** рассматриваются многокритериальные задачи при неопределенности (МЗН); в *разделе 1.1* приводится постановка такой задачи в общем виде:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle, \tag{1}$$

здесь $F(x,y) = \{F_i(x,y)\}_{i \in N}$, $N = \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$. С данной МЗН соотносятся две (чисто оптимизационные) многокритериальные задачи:

$$\Gamma(x^*) = \langle Y, F(x^*, y) \rangle,$$

[12] *В. И. Жуковский, М. Е. Салуквадзе.* Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. — Тбилиси: Интелекти, 2004.

[13] *В. И. Жуковский.* Конфликты и риски. — М.: РосЗИТЛП, 2007.

$$\Gamma(y^*) = \langle X, F(x, y^*)\rangle.$$

В *разделе 1.2* для этих задач имеются определения максимума (минимума) по Слейтеру и Парето. Приведем лишь одно из этих понятий.

Определение. Неопределенность $y_S \in Y$ называется *минимальной по Слейтеру* для задачи $\Gamma(x^*)$, если при любых $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$F_i(x^*, y_S) > F_i(x^*, y) \ (i \in N).$$

Кроме того, в разделе обсуждаются свойства этих векторных оптимумов.

В *разделе 1.3* рассматривается задача (1) при $n = 1$ (то есть, однокритериальная задача при неопределенности). Для нее функция сожаления используется в виде

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - \max_{z \in X} F(z, y),$$

где $\Phi(x, y)$ численно оценивает потери ЛПР от того, что он выбрал данную конкретную альтернативу, а не наилучшую (при заданной неопределенности).

Определение. *Гарантированным по сожалению решением задачи* (1) *при* $n = 1$ *назовем пару* $(x^0, \Phi^0) \in X \times \mathbb{R}$, *определяемую цепочкой равенств*

$$\Phi^0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \Phi(x, y) = \min_{y \in Y} \Phi(x^0, y).$$

Далее приводятся свойства функции сожаления, а также подробно обсуждается принцип минимаксного сожаления, приводятся примеры, показывающие ограниченность области его возможного применения.

В *разделе 1.4* осуществляется переход от однокритериальной задачи при неопределенности к расширенной (двухкритериальной) задаче, в которой к исходному критерию эффективности (исходу) добавляется функция сожаления

$$\Gamma = \langle X, Y, \{F(x, y), \Phi(x, y)\}\rangle. \tag{2}$$

Приводится определение гарантированного по исходу и сожалению решения в виде слейтеровской седловой точки. Далее $F^{(1)} >_S F^{(2)} \Leftrightarrow F_i^{(1)} > F_i^{(2)}$, $i \in N$; $F^{(1)} \not>_S F^{(2)} \Leftrightarrow \neg F^{(1)} >_S F^{(2)}$.

Определение. Пара $(x_0, y_0) \in X \times Y$ называется слейтеровской седловой точкой в задаче (2), если $\forall (x, y) \in X \times Y$ выполнено

$$(F(x, y_0), \Phi(x, y_0)) \not>_S (F(x_0, y_0), \Phi(x_0, y_0)) \not>_S (F(x_0, y), \Phi(x_0, y)).$$

Доказываются следующие утверждения.

Утверждение. Если $(x_0, y_0) \in X \times Y$ — слейтеровская седловая точка в задаче (2), то $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Утверждение. Если $(x_0, y_0) \in X \times Y$ — седловая точка в задаче (1) при $n = 1$, то она же будет слейтеровской седловой точкой в двухкритериальной задаче (2).

Приводятся примеры, подтверждающие строгость данного включения.

Аналогично рассматривается случай сравнения векторов по Парето: $F^{(1)} >_P F^{(2)} \Leftrightarrow F_i^{(1)} \geqslant F_i^{(2)}$, $i \in N$, $\exists j \in N$ $F_j^{(1)} > F_j^{(2)}$; $F^{(1)} \not>_P F^{(2)} \Leftrightarrow \neg F^{(1)} >_P F^{(2)}$.

Определение. Пара $(x_0, y_0) \in X \times Y$ называется паретовской седловой точкой в задаче (2), если $\forall (x, y) \in X \times Y$ выполнено

$$(F(x, y_0), \Phi(x, y_0)) \not>_P (F(x_0, y_0), \Phi(x_0, y_0)) \not>_P (F(x_0, y), \Phi(x_0, y)).$$

Утверждение. Любая паретовская седловая точка в задаче (2) будет одновременно и слейтеровской.

Утверждение. Если $(x_0, y_0) \in X \times Y$ — паретовская седловая точка в двукритериальной задаче (2), то $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Утверждение. Если $(x_0, y_0) \in X \times Y$ — паретовская седловая точка в двукритериальной задаче (2), то (x_0, y_0) — седловая точка в исходной задаче (1).

Приводятся примеры, подтверждающие, что обратные включения, вообще говоря, места не имеют. В заключении раздела рассматривается связь введенных понятий.

Пусть (при $n = 1$) W — множество всех седловых точек в исходной задаче (1), а W_S и W_P — множество всех слейтеровских и паретовских точек соответственно в двухкритериальной задаче (2). Обозначим $x^*(y) = \operatorname*{Argmax}_{x \in X} F(x, y)$, а $y^*(x) = \operatorname*{Argmin}_{y \in X} F(x, y)$.

Теорема. *Если в задаче (1) функция сожаления существует, то выполнена цепочка включений:*

$$W_P \subset W \subset W_S.$$

Теорема. *Если в задаче (1) $\forall x \in X$ $y^*(x)$ содержит ровно один элемент, а также $\forall y_1, y_2 \in Y$ будет $x^*(y_1) \cap x^*(y_2) = \varnothing$, то*

$$W_P = W = W_S.$$

Приводится пример, для которого выполнены условия последней теоремы.

В *разделе 1.5* рассматривается задача (1) при $n = 2$. Предполагается, что ЛПР строит функцию сожаления отдельно по каждому критерию. Как и в предыдущем параграфе, осуществляется переход от исходной задачи к расширенной:

$$\Gamma = \langle X, Y, \{F_1(x, y), F_2(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)\}\rangle. \tag{3}$$

Для нее доказывается эквивалентность следующих двух понятий:

Определение. Пара $(x_0, y_0) \in X \times Y$ называется слейтеровской седловой точкой в задаче (3), если $\forall (x, y) \in X \times Y$ выполнено:

$$(F(x, y_0), \Phi(x, y_0)) \not>_S (F(x_0, y_0), \Phi(x_0, y_0)) \not>_S (F(x_0, y), \Phi(x_0, y)).$$

Определение. Пара $(x_0, y_0) \in X \times Y$ называется слейтеровской седловой точкой в задаче (3), если $\forall (x, y) \in X \times Y$ выполнено:

$$F(x, y_0) \not>_S F(x_0, y_0),$$

$$(F(x_0, y_0), \Phi(x_0, y_0)) \not>_S (F(x_0, y), \Phi(x_0, y)).$$

Аналогичные определения и утверждение приводятся и для сравнения векторов по Парето.

В следующем пункте рассматривается пример — скалярная линейно-квадратичная задача при неопределенности (с ограничениями).

$$\langle [-1, 1], [-1, 1], \{F_1(x, y), F_2(x, y)\} \rangle,$$

здесь

$$F_1(x, y) = -\frac{3}{4}x^2 + 2xy + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 2y,$$
$$F_2(x, y) = -\frac{3}{4}x^2 + 4xy + \frac{3}{4}y^2 - 2x + 2y.$$

Для нее строятся функции сожаления по каждому критерию, после чего задача численно решается как в исходном варианте (без учета сожаления ЛПР), так и в расширенном варианте. Приводится сравнение результатов - множества слейтеровских седловых точек как в первом, так и во втором случае.

После чего рассматривается фактически та же задача, только в общем виде и без ограничений:

$$\Gamma_1 = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, \{A_i x^2 + B_i xy + C_i y^2 + 2a_i x + 2c_i y\}_{i=1,2} \rangle.$$

В этой формуле A_i, B_i, C_i, a_i, c_i — постоянные, причем будем предполагать, что $A_i < 0$, $B_i \neq 0$, а $C_i > 0$.

Сначала эта задача решается без учета сожаления, строится множество всех слейтеровских седловых точек. Затем строятся функции сожаления, которые имеют вид

$$\Phi_i(x, y) = A_i^{-1}(A_i x + B_i y + a_i)^2 \ (i = 1, 2).$$

Таким образом, приходим к расширенной задаче

$$\langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, \{A_i x^2 + B_i xy + C_i y^2 + 2a_i x + 2c_i y, A_i^{-1}(A_i x + B_i y + a_i)^2\}_{i=1,2} \rangle.$$

Отметим, что функция сожаления строго вогнута и по x и по y (так как $A < 0$ и $A^{-1}B^2 < 0$). Это значит, что отдельно по каждой функции сожаления минимума по y не существует. Тем не менее, удается доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Пара* (x_0, y_0) *является слейтеровской седловой точкой в задаче* Γ_1 *тогда и только тогда, когда выполнено*

1. $\exists \alpha \in [0,1]$*:* $\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + a_1) + (1-\alpha)(A_2x_0 + B_2y_0 + a_2) = 0$*,*

2. $\exists \beta \in [0,1],\ \exists \gamma \in [0,1],\ \exists \overline{y} \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} \gamma(A_1x_0 + B_1\overline{y} + a_1) + (1-\gamma)(A_2x_0 + B_2\overline{y} + a_2) = 0, \\ \beta(B_1x_0 + C_1\overline{y} + c_1) + (1-\beta)(B_2x_0 + C_2\overline{y} + c_2) = 0. \end{cases}$$

Это утверждение позволяет конструктивно решить данную задачу и сравнить множество седловых точек в исходной и расширенной задачах.

В *разделе 1.6* рассматривается вопрос о связи коэффициентов сверток и результирующих значений критериев эффективности. С учетом специфики рассматриваемого предмета вводятся обозначения, несколько отличные от принятых ранее:

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ — количество критериев в задаче, будем также применять множество $N = \{1, ..., n\}$,
- множество коэффициентов важности: $\mathcal{A}^n = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T |\ \alpha_i \in [0,1],$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$,
- множество значений критериев: $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, предполагается, что X компактно, тогда, если $\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, то $X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$.

Вводится функция свертки (общего вида):

$$F : \operatorname{comp}\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}^n \to \mathbb{R}^n,$$

эта функция по компактному множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ и вектору коэффициентов важности α «возвращает» точку $x_\alpha \in X$.

Задача формулируется следующим образом: необходимо построить такую функцию F, чтобы для нее были выполнены следующие три условия:

1. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}^n,\ \exists x_\alpha \in S(X) : x_\alpha = F(X, \alpha)$ *(достаточность),*
2. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n,\ \forall x \in S(X),\ \exists \alpha_x \in \mathcal{A}^n : x = F(X, \alpha_x)$ *(необходимость),*
3. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n,\ \forall i \in N, i \leqslant n,\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}^n : \alpha_i \geqslant \beta_i \Rightarrow F_i(X, \alpha) \geqslant F_i(X, \beta)$ *(монотонность).*

На содержательном уровне первое и второе условия означают, что перебирая все возможные $\alpha \in \mathcal{A}^n$, можно найти все максимальные по Слейтеру точки из X и только их, а третье задает связь между набором коэффициентов важности α и тем $x_\alpha \in X$, что этому набору соответствует, и обладающее свойством:

если ЛПР при переходе от одного набора коэффициентов к другому не уменьшает коэффициент важности, то соответствующее значение критерия не может уменьшиться.

Показывается, что классические свертки (Карлина и Гермейра), вообще говоря, не удовлетворяют всему набору этих аксиом — и не напрасно, ведь доказывается следующая основная теорема этого раздела.

Теорема. *Если $n = 2$, то существует функция F, удовлетворяющая условиям 1–3. Если $n \geqslant 3$, то такой функции не существует.*

Сначала устанавливается утверждение о несуществовании, потом показывается, что при определенных предположениях и $n = 2$ свертки Карлина и Гермейера удовлетворяют условиям теоремы, наконец, конструируется свертка, доказывающая утверждение теоремы при $n = 2$ для любого $X \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$.

В **главе 2** рассматриваются многокритериальные динамические задачи при неопределенности; в *разделе 2.1* приводится общая постановка задачи. Предполагается, что динамика управляемой системы описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, z), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

где $U \div u(\cdot) \in \mathfrak{A}$ и $Z \div z(\cdot) \in \mathcal{Z}$ — альтернатива ЛПР и реализация неопределенного фактора соответственно, а эффективность выбора ЛПР оценивается векторным критерием

$$J_i(t_0, x(\cdot), u(\cdot), z(\cdot)) = g_i(x(\vartheta)) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} f_i^0(t, x(t), u[t], z[t])dt, \quad i \in N.$$

Далее обсуждаются различные классы альтернатив ЛПР и реализаций неопределенностей. Снова приводится определение функции сожаления:

$$\Phi_i(U, Z) = J_i(U, Z) - \max_{V \in \mathfrak{A}} J_i(V, Z), \quad i \in N,$$

то есть при построении функции сожаления ЛПР исходит из наилучшего действия при том раскладе, что ему известна вся функция $z(\cdot)$, а не только текущая позиция или текущее значение функции $z(\cdot)$. Откуда следует, что стандартные классы позиционных и контрстратегий (несмотря на то, что в них используется информация о реализации неопределенного фактора) не могут обеспечить нулевое сожаление при всех возможных реализациях неопределенного фактора, что показывается на конкретных примерах. Вводится ДМЗН

$$\Gamma^0 = \langle \Sigma \div (4), \{\mathfrak{A}, \mathcal{Z}\}, \{J(U, Z), \Phi(U, Z)\} \rangle,$$

где n-вектора $J = (J_1, ..., J_n)$, $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$.

Ниже приводится основное понятие главы 2.

Определение. *Тройка* $(U^*, J^*, \Phi^*) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^{2n}$ *называется слейтеровским гарантированным по исходу и сожалению решением ДМЗН,* если существует $Z^* \in \mathcal{Z}$ такое, что

1. $J^* = J(U^*, Z^*),\ \Phi^* = \Phi(U^*, Z^*)$;

2. U^* является максимальной по Слейтеру в динамической многокритериальной задаче, которая получается из Γ^0 при $Z = Z^*$;

3. Z^* является минимальной по Слейтеру в динамической многокритериальной задаче, которая получается из Γ^0 при $U = U^*$.

В *разделе 2.2* рассматривается классическая [12] задача, с которой фактически и началось исследование принципа минимаксного сожаления в динамическом случае. Под *линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачей при неопределенности (ДМЗН)* понимается упорядоченный набор

$$\langle \textstyle\sum, \mathfrak{A}, \mathcal{Z},\ \mathcal{J}(U, Z, t_0, x_0)\rangle, \tag{5}$$

где динамика системы $\sum$ описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + u + z + a(t),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m,$$

$\mathfrak{A}$ есть множество позиционных стратегий U у ЛПР:

$$\mathfrak{A} = \{U \div u(t,x) \,|\, u(t,x) = P(t)x + p(t) \\ \forall P(\cdot) \in C_{m\times m}[0,\vartheta],\ p(\cdot) \in C_m[0,\vartheta]\},$$

$\mathcal{Z}$ — множество позиционных неопределенностей Z:

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t,x) \,|\, z(t,x) = Q(t)x + q(t) \\ \forall Q(\cdot) \in C_{m\times m}[0,\vartheta],\ q(\cdot) \in C_m[0,\vartheta]\}.$$

Критерий эффективности задается векторным функционалом

$$J = (J_1, ..., J_n),$$

i-ая компонента которого имеет вид:

$$J_i(U, Z, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + 2c_i' x(\vartheta) + \\ + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{u'[t][D_i u[t] + 2K_i z[t] + 2M_i x(t)] + z'[t][L_i z[t] + 2N_i x(t)] + \\ + x'(t)G_i x(t) + 2d_i' u[t] + 2l_i' z[t] + 2g_i' x(t)\}dt \quad (i \in \mathbf{N}),$$

выше использованы заданные априори *постоянные* $m \times m$-матрицы A, C_i, D_i, M_i, G_i, K_i, N_i, L_i, m-вектора c_i, d_i, g_i, l_i, причем D_i, L_i, G_i и C_i симметричны, предполагается, что компоненты m-вектора $a(t)$ непрерывны по $t \in [0, \vartheta]$; штрих сверху означает операцию транспонирования; множество порядковых номеров критериев $N = \{1, ..., n\}$.

Обсуждается формализация данного класса задач, а затем приводится контрпример, показывающий, что уже в простейших случаях функция сожаления в этом классе задач может не существовать.

В *разделе 2.3* рассматривается динамическая задача в классе программных альтернатив и неопределенностей:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t, x, u, z), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \\
&u(t) \underset{\text{п.в.}}{\in} P \subset \mathbb{R}^k, \ z(t) \underset{\text{п.в.}}{\in} Q \subset \mathbb{R}^h, \ u(\cdot) \in L_k^2[0, \vartheta], \ z(\cdot) \in L_h^2[0, \vartheta], \\
&J_i(x, u, z) = g_i(x(\vartheta)) + \int\limits_0^{\vartheta} f_i^0(t, x, u, z)dt \quad (i = 1, ..., n), \ n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Здесь ЛПР выбирает функцию $u(t) \in L_k^2[0, \vartheta]$, определенную на отрезке $[0, \vartheta]$ и удовлетворяющую ограничению $u(t) \in P$ почти всюду, независимо от его выбора реализуется неопределенность $v(t) \in L_h^2[0, \vartheta]$, определенной на отрезке $[0, \vartheta]$ и удовлетворяющую ограничению $v(t) \in Q$ почти всюду. Далее строится решение дифференциального уравнения (в смысле Каратеодори) $\dot{x} = f(t, x, u(t), v(t))$, $x(0) = x_0$. На всех возможных тройках $(x(t), u(t), v(t) |\ t \in [t_0, \vartheta])$ определен векторный критерий $J(x, u, v)$ $J = (J_1, ..., J_n)$, который и оценивает эффективность выбранной ЛПР альтернативы.

Параллельно с общей формулировкой рассматривается конкретный пример:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -x + u + z, \quad x(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&u \in \mathbb{R}, \ v \in \mathbb{R}, \ u(\cdot) \in L^2[0, 1], \ v(\cdot) \in L^2[0, 1], \\
&J_1(x, u, v) = x(1) + \int\limits_0^1 (-u^2 + z^2)dt, \quad J_2(x, u, v) = -x(1) + \int\limits_0^1 (-u^2 + z^2)dt.
\end{aligned}$$

Все дальнейшие рассуждения этого раздела проводятся для данного примера, но постоянно делаются отсылки к общему случаю, подробно обсуждается, какие изменения может претерпеть методика решения при переходе к общему случаю. За счет применения принципа максимума Понтрягина удается построить функции сожаления и перейти к расширенной задаче, правда, ценой увеличения размерности.

Для ее решения применяется свертка Карлина и принцип максимума Понтрягина (и то, и другое дважды - для альтернатив и для неопределенностей). Таким образом, при конкретных коэффициентах сверток приходим к краевой задаче принципа максимума, которая решена в явном виде, найдены значения критериев и функций сожаления.

В *разделе 2.4* рассматривается вариант линейно-квадратичной задачи (5) в классе контрстратегий с дополнительными предположениями относительно динамики реализации неопределенного фактора:

$$\Gamma = \langle \textstyle\sum, \mathfrak{A}_z, \mathcal{Z}_t,\ J(U, Z, t_0, x_0)\rangle,$$

где

$$\sum \div \dot{x} = Ax + u + A_1 z + a(t),\ x(t_0) = x_0,$$

$$\mathfrak{A}_z = \{U \div u(t,x,z)\,|\,u(t,x,z) = P(t)x + Q(t)z + p(t)$$
$$\forall P(\cdot) \in C_{m\times m}[0,\vartheta],\ \forall Q(\cdot) \in C_{m\times k}[0,\vartheta],\ p(\cdot) \in C_m[0,\vartheta]\},$$

$$\mathcal{Z}_t = \{Z \div z[t]\,|\,\dot{z}(t) = Bz + b(t),\ \forall z[t_0] = z_0 \in \mathbb{R}^k\},$$

$$J = (J_1, ..., J_n).$$

Здесь $k \times k$ матрица B постоянна, $b(t) \in C_k[0,\vartheta]$. Заметим, что источником принятого в описания множества неопределенности $\mathcal{Z}_t$ послужила модель Эванса из [14]; все множество неопределенностей $\mathcal{Z}_t$ получаем, когда начальное значение z_0 «пробегает» все евклидово пространство $\mathbb{R}^k$, а множество контрастратегий $\mathfrak{A}_z$, — когда матрицы $P(t), Q(t)$ и вектор $p(t)$ «пробегают» все множество непрерывных на $[0,\vartheta]$ матриц (соответственно векторов).

Оказывается, что этого класса альтернатив достаточно для построения функции сожаления. Следуя традиции рассмотрения данного класса задач [12], функция сожаления понимается здесь как разность между наилучшим и реализовавшимся вариантом (то есть отличается от рассмотренной выше только знаком). С помощью метода динамического программирования удается доказать, что если выполнены условия ($D < 0 \Leftrightarrow u^T Du$ — определенно отрицательна)

$$D_i < 0,\ C_i \leqslant 0,\ G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \leqslant 0\ (i \in N),$$

то можно построить явный вид компонент $\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)$, $i \in N$, векторной функции сожаления.

Имея такое представление функции сожаления, можно перейти к определению понятия решения.

Определение. *Тройку $(U^S, J^S, \Phi^S) \in \mathfrak{A}_z \times \mathbb{R}^{2n}$ назовем гарантрованным по исходам и сожалениям решением задачи Γ в контрстратегиях, если при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$ существует неопределенность $Z_S \in \mathcal{Z}_t$, при которой $J^S = J(U^S, Z_S, t_0, x_0)$, $\Phi^S = \Phi(U^S, Z_S, t_0, x_0)$, и* 1^0) *контрстратегия U^S является максимальной по Слейтеру в $n-$критериальной динамической задаче*

$$\langle \textstyle\sum, \mathfrak{A}_z, J(U, Z, t_0, x_0)\rangle;$$

[14] *В. А. Колемаев.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 2002.

2^0) *неопределенность Z_S минимальна по Слейтеру в $2n-$критериальной задаче*

$$\langle \sum(U = U^S), \mathcal{Z}, \{J(U^S, Z, t_0, x_0), -\Phi(U^S, Z, t_0, x_0)\}\rangle.$$

Далее, с использованием свертки Карлина и метода динамического программирования, строится максимальная по Слейтеру контрстратегия.

Утверждение. *Если удалось найти постоянные $\alpha \in \mathcal{A}^n$ такие, что $D_\alpha < < 0$ и специальная система уравнений типа Риккати (2.51) имеет продолжимое на отрезок $[0, \vartheta]$ решение Θ_α, то контрстратегия*

$$U^S \div u^S(t, x, z) = -D_\alpha^{-1}\left[(\Xi'_\alpha + K_\alpha)z + (\Theta_\alpha + M_\alpha)x + (\xi_\alpha + d_\alpha)\right], \qquad (6)$$

где Ξ_α и ξ_α — решение специальной системы (2.53) ((2.51) и (2.53)см. в тексте диссертации).

Для нахождения значений критериев эффективности также используется вариант метода динамического программирования.

Теперь можно перейти к построению минимальной по Слейтеру неопределенности. Так как получено представление и критериев, и функций сожаления как функций от z_0, то применив специальный вид линейной свертки критериев, можно свести вопрос к простой задаче минимизации линейно-квадратичной функции без ограничений.

Тем самым результаты параграфов 2.2 и 2.4 дают ответы на поставленные в монографии [12, с. 345] вопросы относительно применения принципа минимаксного сожаления в линейно-квадратичных ДМЗН. В самой монографии рассматривался гибридный случай, сожаление оценивается при дополнительных предположениях относительно динамики неопределенного фактора, а при решении расширенной задачи авторы возвращаются к случаю равноправных альтернативы ЛПР и реализации неопределенности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Владиславу Иосифовичу Жуковскому за постоянное внимание к работе.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] *В. И. Жуковский, К. С. Сорокин.* Риски и исходы в одной многокритериальной динамической задаче // Известия Института Математики и Информатики УдГУ. Вып. 2(30). — Ижевск: УдГУ, 2004. — С. 53 – 64.

[2] *В. И. Жуковский, К. С. Сорокин.* Риски в многокритериальных задачах // Нелинейный динамический анализ — 2007. Тезисы докладов международного конгресса. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2007. — С. 90.

[3] *К. С. Сорокин.* Гарантированное по исходам и рискам решение одной двухкритериальной задачи // Автоматика-2004: Материалы 11-ой международной конференции по автоматическому управлению. — Киев: Национальный университет пищевых технологий, 2004. — С. 39.

[4] *К. С. Сорокин.* §3.8. Скалярный случай // В. И. Жуковский, М. Е. Салуквадзе. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. — Тбилиси: Интелекти, 2004. — С. 321–335.

[5] *К. С. Сорокин.* Гарантированное по исходам и рискам решение одной двухкритериальной динамической задачи // Сборник статей молодых учёных факультета ВМиК МГУ, выпуск №2. — М.:МГУ, 2005. — С. 1 – 11.

[6] *К. С. Сорокин.* §3.6. Модельный пример // В. И. Жуковский. Конфликты и риски. — М.: РосЗИТЛП, 2007. — С. 417–431.

[7] *К. С. Сорокин.* Риски в многокритериальных динамических задачах // Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина: Тезисы докладов. — Москва: М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. — С. 398.

[8] *К. С. Сорокин.* Существование гарантированного по исходам и рискам решения одной многокритериальной задачи // *Вест. Моск. университета, сер. 15, вычисл. матем., киберн.* — 2008. — № 1. — С. 19–25.

[9] *К. С. Сорокин.* Гарантированное по исходам и рискам решение одной многокритериальной динамической задачи // *Автоматика и телемеханика.* — 2009. — № 3. — С. 123 – 135.

[10] *К. С. Сорокин.* О коэффициентах важности в задачах многокритериальной оптимизации // VI Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конференции (Омск, 29 июня – 4 июля 2009) / Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — Омск: полиграфический центр КАН, 2009. — С. 191.