

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ВОЛКОВ Сергей Александрович

КОНЕЧНЫЕ БАЗИСЫ ПО СУПЕРПОЗИЦИИ В КЛАССАХ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая
кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической
кибернетики факультета ВМиК МГУ
Марченков Сергей Серафимович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Института проблем передачи
информации имени А. А. Харкевича РАН
Вьюгин Владимир Вячеславович;

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Вычислитель-
ного центра имени А. А. Дородницына РАН
Вялый Михаил Николаевич.

Ведущая организация: Институт системного программирования РАН.

Защита диссертации состоится 9 октября 2009 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе "Наука" — "Работа диссертационных советов" — "Д.501.001.44".

Автореферат разослан "__" сентября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор

_____ Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Понятие алгоритмически вычислимой (рекурсивной) функции является одним из основных в современной математике. Формализация понятия вычислимой функции была выполнена в середине 1930-х годов известными математиками: А. Тьюрингом, Э. Постом, А. Чёрчем, С. Клини и др.

Было отмечено, что класс всех вычислимых функций только с очень большой натяжкой можно назвать адекватной формализацией понятия вычислимости на практике, потому что некоторые функции требуют очень большого времени и ресурсов для вычисления даже при малых значениях аргументов, несмотря на то, что формально являются вычислимыми.

В связи с этими обстоятельствами рассматривались более узкие классы, состоящие только из всюду определенных рекурсивных функций, более приближенные к практической вычислимости. Эти классы называются классами элементарных функций. Оказалось, что некоторые из этих классов могут быть описаны как в терминах сложности вычислений на машинах Тьюринга и их разновидностях, так и в терминах порождения функций на основе базовых функций и некоторых порождающих операций, таких, как суперпозиция, примитивная рекурсия, ограниченные рекурсия, минимизация, суммирование и др.

Исследование подобных классов и поиск эквивалентных определений для них может помочь понять природу эффективной вычислимости, а также, возможно, подобные определения дадут возможность для конкретных функций, вычисление которых имеет практическое значение, выяснить, насколько эффективно они могут вычисляться.

Впервые вопрос о порождаемости достаточно широких и содержательно интересных классов рекурсивных функций с помощью одной лишь операции суперпозиции был рассмотрен А. Гжегорчиком в 1953 году¹. Базисом по суперпозиции в некотором классе мы будем называть полную относительно суперпозиции систему в этом классе. Традиционно в теории рекурсивных функций не требуют минимальности для таких систем. В этой же известной работе 1953 года А. Гжегорчиком было показано, что класс примитивно рекурсивных функций не имеет конечного базиса по суперпозиции. Кроме того, в той работе была введена иерархия классов $\mathcal{E}^n$, $n \geq 0$,

¹Grzegorzcyk A. *Some classes of recursive functions*, Rozprawy Matematyczne, 1953, V. 4, P. 1–46. (Русск. пер.: Гжегорчик А. *Некоторые классы рекурсивных функций*, Проблемы математической логики, М.: Мир, 1970, С. 9–49.)

исчерпывающая класс примитивно рекурсивных функций, и поставлен вопрос о существовании конечного базиса по суперпозиции в этих классах.

Интерес к проблеме существования конечных базисов по суперпозиции в классах рекурсивных функций вызван несколькими факторами. Во-первых, операция суперпозиции является довольно слабой операцией, поэтому можно предполагать, что функции из подобных базисных систем в значительной степени будут отражать специфику класса и, возможно, сложность в каком-либо из аспектов. Хорошо определенный базис может служить основой для канонических представлений, дающих возможность сравнивать и оценивать различные параметры функций класса.

Р. Ричи в 1964 году показал, что классы $\mathcal{E}^n$, $n \geq 2$, могут быть охарактеризованы в терминах сложности вычислений на машинах Тьюринга. В частности, $\mathcal{E}^2$ — это множество всех функций, вычислимых с линейным ограничением на зону (от длины записи входа), а $\mathcal{E}^3$ — с ограничением, имеющим вид "многоэтажной" экспоненты (с любым фиксированным числом этажей). Поэтому исследование базисов по суперпозиции в этих классах может пролить свет на природу вычислительной сложности.

Поставленная А. Гжегорчиком проблема решалась в несколько этапов. Существование конечного базиса по суперпозиции в классах $\mathcal{E}^n$ ($n \geq 3$) было доказано Д. Рёддингом в 1964 году². Для класса $\mathcal{E}^2$ это было доказано С. С. Марченковым в 1969 году³. Основной идеей работы С. С. Марченкова было использование так называемых квазиуниверсальных функций, которые определяются на основе нумерации одной разновидности машин Тьюринга. В 1970 году А. А. Мучник⁴ на основе идей С. С. Марченкова доказал существование базисов в большом семействе классов, определяемых в терминах сложности вычислений на машинах Тьюринга, например, для класса FP функций, вычислимых за полиномиальное время (от длины записи аргументов).

Особый интерес представляет проблема построения "простых" базисов по суперпозиции. Если класс имеет базис простого вида, то вопрос о принадлежности какой-либо функции этому классу сводится к вопросу о представимости этой функции в виде суперпозиции конкретных функций достаточно простого вида. Первым существенным продвижением в этом на-

²Rödding D. *Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen*, Zeitschr. math. Logik. u. Grundlag. Math., 1964, B. 10, N 4, S. 315–330.

³Марченков С. С. *Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика*, Математические заметки, 1969, Т. 5, N. 5, С. 561–568.

⁴Мучник А. А. *О двух подходах к классификации рекурсивных функций*, Проблемы математической логики, М.: Мир, 1970, С. 123–138.

правлении был результат, полученный С. С. Марченковым в 1980 году⁵: базисом по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^3$ является система

$$\{x + 1, \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, x^y, \varphi(x, y)\},$$

где $\varphi(x, y)$ равно наименьшему номеру нулевого разряда в представлении числа y в позиционной системе счисления с основанием x . Таким образом, был построен базис, состоящий из простых арифметических функций и одной специальной функции, которая не является арифметической "в чистом виде", но имеет очень короткое определение. В этой же работе С. С. Марченкова было показано, что суперпозициями функций

$$x + 1, x \div y, \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, x^y$$

можно получить все функции из $\mathcal{E}^3$, принимающие конечное число значений. Избавиться от "плохой" функции смог С. Маззанти в 2002 году⁶. Более точно, он доказал, что

$$\{x + y, x \div y, \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, 2^x\}$$

— базис по суперпозиции в $\mathcal{E}^3$.

Техника, предложенная в этих работах, позволяет строить базисы простого вида в классах, содержащих $\mathcal{E}^3$.

Цель диссертации. В диссертации рассматривается проблема построения конечных базисов по суперпозиции в различных классах рекурсивных функций. В работе ставятся и решаются следующие основные задачи:

- описание классов функций, получающихся суперпозициями простых арифметических функций и, возможно, других общеизвестных функций, с различными ограничениями на скорость роста используемых функций и строение формул;
- построение конечных базисов по суперпозиции простого вида в классах, аналогичных классу $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика, без использования нумераций машин Тьюринга;

⁵Марченков С. С. *Об одном базисе по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару*, Математические заметки, 1980, Т. 27, N 3, С. 321–332.

⁶Mazzanti S. *Plain bases for classes of primitive recursive functions*, Mathematical Logic Quarterly, 2002, V. 48, P. 93–104.

- исследование групп перестановок, связанных с известными классами рекурсивных функций, на предмет конечной порождаемости.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

1. Впервые исследуется вопрос об описании классов рекурсивных функций, получающихся суперпозициями с ограничением на строение формул.
2. Впервые построены базисы по суперпозиции простого вида без использования нумераций машин Тьюринга в классах, существенно меньших, чем $\mathcal{E}^3$.
3. Решена (положительно) проблема о конечной порождаемости групп перестановок, связанных с известными классами рекурсивных функций.

Научная и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы, по мнению автора, могут быть применены к другим задачам теории рекурсивных функций. Явные базисы по суперпозиции, а также методы, разработанные для их получения, могут быть применены для получения простых эквивалентных определений различных классов рекурсивных функций и сложностных классов. Эти эквивалентные определения могут помочь в исследовании природы этих классов, а также в установлении вычислительной сложности конкретных функций.

Некоторые из групп перестановок, для которых в диссертации доказана конечная порождаемость, можно представить как множество всех эффективно вычислимых функций, допускающих эффективное обращение. Такие функции играют важную роль в математике. Методы, разработанные для доказательства конечной порождаемости, могут помочь в изучении свойств таких функций.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории рекурсивных функций.

Публикации и апробирование. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях "Дискретные модели

в теории управляющих систем" (Москва, 2006 г.), "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2008 г.), научно-исследовательском семинаре кафедры математической кибернетики факультета ВМиК МГУ, научно-исследовательском семинаре кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ, научно-исследовательском семинаре института проблем передачи информации, опубликованы в работах [1–5].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем работы 126 страниц.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации и краткий обзор исследований, связанных с темой работы. Кроме того, во введении сформулированы цели диссертации, даны основные определения и сформулированы результаты, полученные в диссертации.

Пусть $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Рассматриваются всюду определенные функции (произвольного числа аргументов) на множестве $\mathbb{N}_0$. Под операцией суперпозиции будем подразумевать подстановку функций в функции, перестановку и отождествление переменных, введение фиктивных переменных.

Пусть Q — некоторый класс функций на $\mathbb{N}_0$. Будем обозначать через $[Q]$ замыкание по суперпозиции класса Q .

Пусть Ψ — некоторое множество функций, замкнутое относительно суперпозиции, и $\Phi \subseteq \Psi$. Будем говорить, что множество Φ порождает множество Ψ , если $[\Phi] = \Psi$. Конечные множества, порождающие Ψ , будем называть *конечными базисами по суперпозиции* в множестве Ψ .

Положим

$$\begin{aligned} x \div y &= \max(x - y, 0), \\ \text{sg}(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \overline{\text{sg}}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \\ \text{rm}(x, y) &= \begin{cases} \text{остатку от деления } x \text{ на } y, & \text{если } y > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$[\log_2 x] = \begin{cases} \text{целой части двоичного логарифма } x, & \text{если } x > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$x\langle y \rangle$ = y -му двоичному разряду числа x

$$(\text{таким образом, } x = \sum_{y=0}^{\infty} x\langle y \rangle \cdot 2^y).$$

Определим функцию $x \wedge y$ — поразрядную конъюнкцию двоичных представлений чисел x и y . Пусть $a_n a_{n-1} \dots a_0, b_n b_{n-1} \dots b_0$ — двоичные представления чисел x и y (если длины двоичных представлений различны, то старшие разряды двоичного представления меньшего числа равны нулю). Тогда двоичное представление числа $x \wedge y$ есть

$$(a_n \cdot b_n)(a_{n-1} \cdot b_{n-1}) \dots (a_0 \cdot b_0).$$

Характеристической функцией предиката $\rho(x_1, \dots, x_n)$ будем называть функцию $\chi_\rho(x_1, \dots, x_n)$ такую, что при любых $x_1, \dots, x_n$

$$\chi_\rho(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(x_1, \dots, x_n) \text{ истинно,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для класса функций Q через Q_* будем обозначать множество всех предикатов, характеристические функции которых лежат в Q .

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n, y)$ получена из функций $g(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_n, y, z), j(x_1, \dots, x_n, y)$ с помощью операции *ограниченной рекурсии*, если выполняются соотношения

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)), \\ f(x_1, \dots, x_n, y) \leq j(x_1, \dots, x_n, y). \end{cases}$$

Определим классы $\mathcal{E}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) иерархии Гжегорчика⁷. $\mathcal{E}^n$ есть минимальный класс функций, содержащий функции $x+1, f_n(x, y)$ и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченной рекурсии, где

$$f_0(x, y) = y + 1,$$

$$f_1(x, y) = x + y,$$

$$f_2(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1),$$

⁷Grzegorzcyk A. *Some classes of recursive functions*, Rozprawy Matematyczne, 1953, V. 4, P. 1–46. (Русск. пер.: Гжегорчик А. *Некоторые классы рекурсивных функций*, Проблемы математической логики, М.: Мир, 1970, С. 9–49.)

при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(0, y) &= f_n(y + 1, y + 1), \\ f_{n+1}(x + 1, y) &= f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y)). \end{aligned}$$

Для векторов из переменных (и их частей) будут использоваться сокращенные обозначения вида $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и т. п. (например, $(\tilde{x}, t)$ вместо $(x_1, \dots, x_n, t)$).

В главе 1 доказаны теоремы, в которых описаны классы функций, получающихся суперпозициями простых арифметических функций и некоторых других общеизвестных функций с ограничениями на скорость роста используемых функций и строение формул. Классы описаны в терминах порождения функций из базовых функций с помощью операций суперпозиции и ограниченного суммирования, а также в терминах выразимости в логике первого порядка. Все полученные классы либо уже исследовались другими математиками, либо являются модификациями классов, которые уже исследовались.

В разделе 1.1 описывается класс функций, представимых формулами с экспонентами высоты не более 2.

Будем говорить, что функция $f(x, z_1, \dots, z_n)$ получается из функции $g(y, z_1, \dots, z_n)$ с помощью операции *ограниченного суммирования* по переменной y , если

$$f(x, z_1, \dots, z_n) = \sum_{y \leq x} g(y, z_1, \dots, z_n).$$

Класс S функций, элементарных по Сколему⁸ — это минимальный класс функций, содержащий функции

$$0, \quad x + 1, \quad x \div y \tag{1}$$

и замкнутый относительно суперпозиции и ограниченного суммирования. Отметим, что S совпадает с минимальным классом, содержащим функции (1) и замкнутым относительно суперпозиции и суммирования вида $\sum_{x < y}$ (сумма по пустому множеству равна нулю), для удобства мы будем использовать именно это определение.

Для каждого множества функций Q по индукции определим последовательности классов $[Q]_{2^x}^n$ и $[Q]_{xy}^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

$$1. \quad [Q]_{xy}^0 = [Q]_{2^x}^0 = [Q].$$

⁸Skolem Th. *A theorem on recursively enumerable sets*, Abstract of short comm. Int. Congress Math., 1962, Stockholm, P. 11.

2. Если $f \in [Q]_{2^x}^n$ ($[Q]_{x^y}^n$), то $f \in [Q]_{2^x}^{n+1}$ ($[Q]_{x^y}^{n+1}$).
3. Если $f \in [Q]_{2^x}^n$ ($f \in [Q]_{x^y}^n$) и g получается из f перестановкой или отождествлением переменных, а также введением фиктивных переменных, то $g \in [Q]_{2^x}^n$ ($g \in [Q]_{x^y}^n$).
4. Если $f(y_1, \dots, y_m) \in Q$ и $g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k) \in [Q]_{2^x}^n$ ($[Q]_{x^y}^n$), то

$$f(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) \in [Q]_{2^x}^n \text{ } ([Q]_{x^y}^n).$$

5. Если $f \in [Q]_{x^y}^{n+1}$, $g \in [Q]_{x^y}^n$, $h \in [Q]_{2^x}^n$, то $2^h \in [Q]_{2^x}^{n+1}$ и $f^g \in [Q]_{x^y}^{n+1}$.

Для $[Q]_{2^x}^1$ и $[Q]_{x^y}^1$ будем использовать сокращенные обозначения $[Q]_{2^x}$ и $[Q]_{x^y}$ соответственно.

Индуктивно определим последовательность классов P^n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

1. P^0 – класс всех полиномов с коэффициентами из $\mathbb{N}_0$.
2. P^{n+1} есть класс всех функций вида 2^f , где $f \in P^n$.

Определим класс XS^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) как класс всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых выполнены следующие два условия:

1. f ограничена некоторой функцией из P^{n+1} .
2. Существуют функции $m(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ и $g(x_1, \dots, x_n, y, z) \in S$ такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n)\langle y \rangle = g(x_1, \dots, x_n, y, m(x_1, \dots, x_n)).$$

XS определим как класс всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых выполнены следующие два условия:

1. Существует полином $p(x_1, \dots, x_n)$ с натуральными коэффициентами такой, что для любых $x_1, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$f(x_1, \dots, x_n) < 2^{p(x_1, \dots, x_n)}.$$

2. $f(x_1, \dots, x_n)\langle y \rangle \in S$.

Положим

$$T = \{x + 1, \quad xy, \quad x \div y, \quad x \wedge y, \quad [x/y]\}.$$

Теорема 1. $XS = [T]_{2^x} = [T]_{x^y}$.

Отметим, что теорема 1 является первым результатом, описывающим классы рекурсивных функций, получающихся с помощью суперпозиции с ограничением на строение формул.

В разделе 1.2 описан класс функций, получающихся суперпозициями функций простого вида со следующим ограничением на скорость роста: длина записи значения функции ограничена полиномом от длин записей аргументов. Класс описан в терминах выразимости в логике первого порядка.

Если A — некоторый алфавит, то будем обозначать A^+ множество всех конечных непустых слов в алфавите A . Если X — некоторое слово в алфавите A , то будем обозначать $|X|$ длину этого слова.

Назовем *ФОМ-термом* над переменными $x_1, \dots, x_m$ любое выражение вида $x_1, \dots, x_m, 1, |X|$ (подразумевается, что такого рода выражениям соответствуют функции, которые зависят еще и от словарной переменной X , но мы это не будем указывать явно; см. ниже).

Определение. *Элементарными ФОМ-формулами* над переменными $x_1, \dots, x_m$ называются выражения вида $(t_1 \leq t_2)$, $\text{BIT}(t_1, t_2)$ или $X\langle t_1 \rangle$, где t_1, t_2 — ФОМ-термы над переменными $x_1, \dots, x_m$.

Определим индуктивно понятие ФОМ-формулы над переменными $x_1, \dots, x_m$.

1. Все элементарные ФОМ-формулы над $x_1, \dots, x_m$ являются ФОМ-формулами над $x_1, \dots, x_m$.
2. Если Φ_1, Φ_2 — ФОМ-формулы над переменными $x_1, \dots, x_m$, $x_i \in \{x_1, \dots, x_m\}$, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\neg \Phi_1)$, $(\exists x_i)(\Phi_1)$, $(\forall x_i)(\Phi_1)$, $(Mx_i)(\Phi_1)$ являются ФОМ-формулами над $x_1, \dots, x_m$.

Каждому ФОМ-терму t над переменными $x_1, \dots, x_m$ следующим образом сопоставим функцию $h_t(X, x_1, \dots, x_m)$, определенную на множестве всех наборов $(X, x_1, \dots, x_m)$ таких, что $X \in \{0, 1\}^+$ и $1 \leq x_1, \dots, x_m \leq |X|$.

1. Если t есть 1, то

$$h_t(X, x_1, \dots, x_m) = 1.$$

2. Если t есть $|X|$, то

$$h_t(X, x_1, \dots, x_m) = |X|.$$

3. Если t есть x_i , то

$$h_t(X, x_1, \dots, x_m) = x_i.$$

Каждой элементарной ФОМ-формуле Φ над переменными $x_1, \dots, x_m$ следующим образом сопоставим предикат $\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m)$, область определения которого совпадает с областью определения функций ФОМ-термов над $x_1, \dots, x_m$.

1. Если Φ имеет вид $(t_1 \leq t_2)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv (h_{t_1}(X, x_1, \dots, x_m) \leq h_{t_2}(X, x_1, \dots, x_m)).$$

2. Если Φ имеет вид $\text{BIT}(t_1, t_2)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv (h_{t_1}(X, x_1, \dots, x_m) \langle h_{t_2}(X, x_1, \dots, x_m) - 1 \rangle = 1).$$

3. Если Φ имеет вид $X \langle t_1 \rangle$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv (h_{t_1}(X, x_1, \dots, x_m)\text{-й символ слова } X \text{ равен } 1),$$

где нумерация символов начинается с единицы (и символы нумеруются слева направо).

Каждой ФОМ-формуле Φ над переменными $x_1, \dots, x_m$ следующим образом сопоставим предикат $\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m)$, область определения которого совпадает с областью определения функций ФОМ-термов над $x_1, \dots, x_m$.

1. Если формула является элементарной ФОМ-формулой, то соответствующий ей предикат совпадает с предикатом, определенным для данной элементарной формулы.

2. Если Φ имеет вид $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv \rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_m) \& \rho_{\Phi_2}(X, x_1, \dots, x_m).$$

3. Если Φ имеет вид $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv \rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_m) \vee \rho_{\Phi_2}(X, x_1, \dots, x_m).$$

4. Если Φ имеет вид $(\neg \Phi_1)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv \neg \rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_m).$$

5. Если Φ имеет вид $(\exists x_i)(\Phi_1)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv (\exists x)_{(1 \leq x \leq |X|)} \rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

6. Если Φ имеет вид $(\forall x_i)(\Phi_1)$, то

$$\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m) \equiv (\forall x)_{(1 \leq x \leq |X|)} \rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

7. Если Φ имеет вид $(\exists x_i)(\Phi_1)$, то $\rho_\Phi(X, x_1, \dots, x_m)$ истинно тогда и только тогда, когда количество x таких, что $1 \leq x \leq |X|$ и $\rho_{\Phi_1}(X, x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m)$ истинно, больше, чем $|X|/2$.

Класс FOM (от англ. First Order with Majority⁹) определим как множество всех всюду определенных на множестве $\{0, 1\}^+$ предикатов $\varphi(X)$, для которых существует FOM-формула, которой соответствует предикат $\rho(X, x_1, \dots, x_m)$ такой, что при любых $X, x_1, \dots, x_m$ из его области определения

$$\varphi(X) \equiv \rho(X, x_1, \dots, x_m).$$

Вообще говоря, класс FOM можно назвать "очень маленьким". Все предикаты из FOM вычислимы за полиномиальное время (и, более того, с логарифмической зоной).

Если $x_1, \dots, x_m$ — натуральные числа, то будем обозначать $\text{CODE}(x_1, \dots, x_m)$ слово

$$01s_101s_201 \dots 01s_m01,$$

где

$$s_i = \begin{cases} \text{пустому слову, если } x_i = 0, \\ \text{слову, получающемуся из двоичной записи } x_i \\ \text{заменой каждой единицы на 11,} \\ \text{а каждого нуля на 00, если } x_i \neq 0. \end{cases}$$

Класс FOM^N определим как множество всех всюду определенных на множестве $\mathbb{N}_0$ предикатов $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, для которых существует предикат $\psi(X) \in \text{FOM}$ такой, что при любых $x_1, \dots, x_n$ выполнено

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(\text{CODE}(x_1, \dots, x_n)).$$

Класс FFOM определим как множество всех всюду определенных на множестве $\mathbb{N}_0$ функций $f(x_1, \dots, x_n)$ таких, что выполняются следующие два условия.

1. Существует полином $p(y_1, \dots, y_n)$ такой, что при любых $x_1, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq 2^{p([\log_2(x_1)], \dots, [\log_2(x_n)])}.$$

⁹Barrington D.A.M., Immerman N., Straubing H. *On uniformity within NC¹*, Journal of Computer and System Sciences, 1990, V. 41, P. 274–306.

2. Предикат ρ , определяемый соотношением

$$\rho(x_1, \dots, x_n, y) \equiv (f(x_1, \dots, x_n)\langle y \rangle = 1),$$

лежит в FOM^N .

Класс FFOM можно назвать функциональным аналогом класса FOM (аналогично тому, что иногда рассматривают класс полиномиально вычислимых предикатов, а иногда — функций). Класс FFOM, не смотря на свою "малость", содержит большинство встречающихся на практике эффективно вычислимых функций, подходящих по скорости роста.

Теорема 2. *Имеет место*

$$\begin{aligned} \text{FFOM} &= \left[x + y, \quad x \div y, \quad x \wedge y, \quad [x/y], \quad 2^{\lceil \log_2 x \rceil^2} \right] = \\ &= \left[x + y, \quad x \div y, \quad x \wedge y, \quad [x/y], \quad x^{\lceil \log_2 y \rceil} \right]. \end{aligned}$$

Эта теорема является первым результатом, в котором построен "явный" базис, состоящий из общеизвестных функций, для достаточно естественного класса рекурсивных функций (который с некоторыми оговорками можно назвать сложностным), существенно меньшего, чем $\mathbf{K}$.

В разделе 1.3 описаны классы функций, представимых формулами с экспонентой с заданной высотой, большей или равной 2. Получается иерархия классов, исчерпывающая класс функций, элементарных по Кальмару.

Определим класс FFOM^n ($n = 1, 2, \dots$) как класс всех ограниченных сверху функциями из $\mathbf{P}^n$ функций $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых существуют функция $m(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$ и предикат $\rho(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \text{FOM}^N$ такие, что

$$(f(x_1, \dots, x_n)\langle y \rangle = 1) \equiv \rho(x_1, \dots, x_n, y, m(x_1, \dots, x_n)).$$

Теорема 3. *При любом $n \geq 0$ имеет место*

$$\text{XS}^n = [T]_{2^x}^{n+1} = [T]_{x^y}^{n+1} = \text{FFOM}^{n+1}.$$

Эта теорема является обобщением теоремы 1.

В главе 2 построен явный базис в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика. Напомним, что этот класс может быть охарактеризован как множество всех функций, вычислимых на машине Тьюринга с линейным ограничением на

зону (от длины входа). В построенном базисе не используется в явном виде нумерация какой-либо разновидности машин Тьюринга. Базис состоит из простых арифметических функций и функции $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$, определенной с помощью примитивной рекурсии. Функция Q в известном смысле является квазиуниверсальной в $\mathcal{E}^2$.

Определим $R(x, y)$ как циклический сдвиг двоичного представления числа x на y разрядов вправо. Иными словами, пусть $R(0, y) = 0$, $R(1, y) = 1$, а если $x \geq 2$ и $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ – двоичное представление x , причем $a_n = 1$, то двоичная запись $R(x, y)$ есть

$$a_{n+y} a_{n+y-1} \dots a_{1+y} a_y,$$

где все сложения проводятся по модулю $n + 1$.

Определим функцию $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$ следующей примитивной рекурсией:

$$\begin{cases} Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, 0) = x, \\ Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t+1) = \\ = \begin{cases} Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t), & \text{если } Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \wedge R(p_1, c_1 \cdot t) \neq 0, \\ Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) + R(p_2, c_2 \cdot t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

Поскольку $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t) \leq x + 2p_2 t$, то имеем ограниченную рекурсию в классе $\mathcal{E}^2$ и, таким образом, $Q \in \mathcal{E}^2$.

Функцию $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из класса $\mathcal{E}^2$ будем называть *квазиуниверсальной* в классе $\mathcal{E}^2$ относительно системы функций Φ , если для любой функции $f(\tilde{y})$ из класса $\mathcal{E}^2$ найдутся функции $h(x, \tilde{y}), g_1(\tilde{y}), g_2(\tilde{y}), \dots, g_m(\tilde{y})$ из множества Φ , такие, что

$$f(\tilde{y}) = h(Q(g_1(\tilde{y}), g_2(\tilde{y}), \dots, g_m(\tilde{y})), \tilde{y}).$$

Теорема 4. *Функция $Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$ является квазиуниверсальной в классе $\mathcal{E}^2$ относительно замыкания по суперпозиции системы функций*

$$x + 1, \quad xy, \quad \min(x, 2^y), \quad x \div y, \quad \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, \quad [\log_2 x].$$

Следствие. *Система функций*

$$x + 1, \quad xy, \quad \min(x, 2^y), \quad x \div y, \quad \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, \quad [\log_2 x], \quad Q(x, p_1, p_2, c_1, c_2, t)$$

образует базис по суперпозиции в классе $\mathcal{E}^2$ Гжесгорчика.

Теорема 4 и следствие из нее в качественном отношении существенно усиливают результаты С. С. Марченкова¹⁰ и А. А. Мучника¹¹.

В главе 3 рассматриваются группы перестановок на множестве $\mathbb{N}_0$. Для большого семейства таких групп, связанных с классами рекурсивных функций, доказана конечная порождаемость. Для этих групп установлена минимальная мощность порождающего множества, равная двум. Кроме того, для этих групп, рассматриваемых как множества одноместных функций, доказано, что они имеют базис по суперпозиции из двух элементов.

Под термином *перестановка* будет подразумеваться перестановка на множестве $\mathbb{N}_0$.

Для любого класса Q , замкнутого относительно суперпозиции и содержащего функцию $I(x) = x$, через $\text{Gr}(Q)$ обозначим группу перестановок $(\{f : f, f^{-1} \in Q\}, \circ)$.

Определение. Бесконечное множество $A \subseteq \mathbb{N}_0$ называется *регулярным* в классе функций Q , если выполняются условия:

1. $\chi_A \in Q$;
2. Можно так занумеровать элементы множества A , что функция $\mu(x)$, вычисляющая номер элемента x в этой нумерации (равна нулю при $x \notin A$), и функция $\nu(x)$, вычисляющая элемент с номером x , принадлежат Q (нумерация начинается с нуля).

Будем рассматривать классы функций Q , удовлетворяющие требованиям:

I. Q содержит функции

$$1, \quad x + y, \quad x \div y, \quad x \cdot \text{sg } y, \quad [x/2]; \quad (2)$$

II. Q содержит нумерационную функцию $c_2(x_1, x_2)$, взаимно-однозначно отображающую множество $\mathbb{N}_0^2$ на $\mathbb{N}_0$, и обратные к ней функции $c_{2,1}(x)$ и $c_{2,2}(x)$ ($c_{2,1}(c_2(x, y)) = x$, $c_{2,2}(c_2(x, y)) = y$ при любых x, y);

III. Для любой перестановки $f \in \text{Gr}(Q)$ существуют непересекающиеся регулярные в Q множества A, B такие, что $f(A) \cap B = \emptyset$ и $\mathbb{N}_0 \setminus A, \mathbb{N}_0 \setminus B$ регулярны в Q ;

¹⁰Марченков С. С. Устранение схем рекурсий в классе $\mathcal{E}^2$ Гжегорчика, Математические заметки, 1969, Т. 5, N. 5, С. 561–568.

¹¹Мучник А. А. О двух подходах к классификации рекурсивных функций, Проблемы математической логики, М.: Мир, 1970, С. 123–138.

IV. Q имеет конечный базис по суперпозиции.

Теорема 5. Если класс Q удовлетворяет требованиям I–IV, то существуют две перестановки из $\text{Gr}(Q)$, композициями которых можно представить любую перестановку из $\text{Gr}(Q)$.

Пусть FP — множество всех функций $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, вычислимых на машине Тьюринга за полиномиальное время от длины входа (числа представляются в двоичном виде). Аналогично, FL — множество всех функций, вычислимых с зоной $O(\log n)$, где n — длина входа (на многоленточных машинах Тьюринга, не записывающих на входную ленту).

Класс функций Q называется $\mathcal{E}^2$ -замкнутым, если он содержит функции

$$0, \quad x + 1, \quad xy$$

и замкнут относительно суперпозиции и ограниченной рекурсии.

Теорема 6. Классы FP , FL , FFOM , а также все $\mathcal{E}^2$ -замкнутые классы, имеющие конечный базис по суперпозиции, удовлетворяют требованиям I–IV.

Теоремы 5, 6 представляют собой решение проблемы, которая неоднократно формулировалась в 1970-80 гг.¹²

Основные результаты диссертации

1. Описаны классы функций, представимых формулами заданной высоты над простыми арифметическими функциями с экспонентой и одной функцией, являющейся стандартной во многих языках программирования. Эти классы описаны в терминах выразимости в логике первого порядка, а также в терминах порождения функций на основе суперпозиции и ограниченного суммирования.
2. В терминах выразимости в логике первого порядка описан класс функций, получающихся суперпозициями простых арифметических функций медленного роста и одной дополнительной функции, являющейся стандартной во многих языках программирования.

¹²Марченков С. С. Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций, Математические вопросы кибернетики, М.: Наука, 1991, вып. 3, С. 115–139.

3. Построен базис по суперпозиции простого вида в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика, в котором не используется в явном виде нумерация машин Тьюринга. Кроме того, приведен пример квазиуниверсальной функции простого вида в этом классе.
4. Доказана конечная порождаемость большого семейства групп перестановок, связанных с классами рекурсивных функций. Для каждой из этих групп установлена минимальная мощность порождающего множества, которая равна двум. Кроме того, доказано, что все эти группы имеют базисы по суперпозиции из двух элементов.

Публикации по теме диссертации

- [1] Волков С. А. Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, вып. 4. — С. 61–78.
- [2] Волков С. А. Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы конференции. — Казань, 2008. — С. 15.
- [3] Волков С. А. Порождение некоторых классов рекурсивных функций суперпозициями простых арифметических функций // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 415, N. 4. — С. 439–440.
- [4] Волков С. А. Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, вып. 4. — С. 31–44.
- [5] Волков С. А. Экспоненциальное расширение класса функций, элементарных по Сколему, и ограниченные суперпозиции простых арифметических функций // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2007. — вып. 16. — С. 163–190.