МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Бештоков Мурат Хамидбиевич

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики математического факультета государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Сухинов Александр Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент Ионкин Николай Иванович

Ведущая организация: Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 25 ноября 2009 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г.Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМиК, ауд.685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «___» октября 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43
доктор физико-математических наук, профессор Е.В.Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование многих процессов приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике.

Важную роль в изучении различных процессов и явлений играют уравнения третьего и более высоких порядков. Например, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных гиперболического типа третьего порядка. Поэтому изучение краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков привлекали внимание многих исследователей: Аллер М., Ахиев С.С., Бицадзе А.В., Виноградова М.Б., Гусейнов О.М., Жегалов В.И., Кожанов А.И., Колтон Д.Л., Мамедов И.Г., Нахушев А.М., Ранделл В., Руденко О.В., Самарский А.А., Солдатов А.П., Сухоруков А.П., Хилькевич Г.И., Чудновский А.Ф., Шовальтер Р.Е., Шхануков М.Х., Тинг Т., Янгарбер В.А. и многие др.

Одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является постановка новых задач по краевым условиям и поиск методов решения поставленных задач. Последние годы интерес многих математиков вызывают задачи, названные нелокальными.

К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы J.R.Canon[1], Л.И. Камынина[2] и А.Ф. Чудновского[3,4]. Современное естествознание, в основном физические приложения, потребовали дальнейшего развития неклассических краевых задач и, в первую очередь, задач с нелокальными условиями. Естественность постановки задач, когда краевые условия представляют собой соотношение между значениями неизвестной функции, вычисленной в различных точках границы, отмечается в работе В.А.Стеклова[5].

Особый интерес в теории дифференциальных уравнений представляют краевые задачи с интегральными условиями, которым и посвящена данная диссертационная работа. Заметим, что из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникаю-

---

[1] *Canon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy. –Quart. Appl. Math. 1963, 21, -2, p.155-160.

[2] *Камынин Л.А.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. //ЖВМ и МФ. 1964. Т.4. №6. С. 1006-1024.

[3] *Чудновский А.Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве. // Сб. трудов АФИ. 1969. №23. С. 41-54.

[4] *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука. 1976. 352 с.

[5] *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука. 1983. 432 с.

щие при решении современных проблем физики, указывает в своей обзорной статье А.А. Самарский[6] и приводит постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывают большой практический и теоретический интерес исследования локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений из-за того, что прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям.

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка исследуются в работах М.Х. Шханукова[7]. В одной из его работ построен аналог функции Римана для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t) \qquad (*)$$

с достаточно гладкими коэффициентами. С помощью метода функции Римана решена задача Гурса, на основе которого решаются как уже известные, так и новые граничные задачи. Отметим, что в данной диссертации используется этот метод для решения нелокальных краевых задач.

Методу Римана для псевдопараболических уравнений также посвящены работы В.А. Водаховой, В.И. Жегалова, А.Н. Миронова, В.З. Канчукоева, В.И. Макеева, К.Б. Сабитова, А.В. Дорофеева, В.А. Севастьянова.

А.М. Нахушев указал примеры практического применения результатов исследования краевых задач с интегральными условиями при изучении процессов влагопереноса в пористых средах и в задачах математической биологии.

Нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка также были рассмотрены в работах А.И. Кожанова, В.З. Канчукоева, А.Ф. Напсо, а в работе А.П. Солдатова и М.Х. Шханукова построен аналог функции Римана для псевдопараболических уравнений высокого порядка и с его помощью изучены краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского.

Теории устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальным условием посвящены работы Е.И. Моисеева и Н.И. Ионкина, В.А. Ильина и Е.И. Моисеева, А.В. Гулина и В.А. Морозовой, Д.М. Довлетова, В.Л. Макарова, А.Ю. Мокина, В.А. Ионкина и Н. Зидова и др.

Цель работы. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами и разработке разностных методов их решения. Отдельно рассмотрены случаи одномерных и многомерных нелокальных краевых задач. Поставленные и исследованные в данной работе задачи характерны тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученный А.И. Кожановым[8]. В его работе рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x,t)u = q(x,t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \qquad 0 < t < T,$$

---

[6] *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. // ДУ. 1980. Т.16. №11. С. 1925-1935

[7] *Шхануков М.Х.* Об одном методе решения краевых задач для уравнения третьего порядка. – Докл. АН СССР, 1982, Т.265, №6, С. 1327-1330.

[8] *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера. // ДУ. 2004. Т.40. №6. С. 763-774.

$$u_x(1,t)=0, \quad 0<t<T,$$
$$u(x,0)=u_0(x), \; 0<x<1.$$

Заметим, что данное уравнение при $\nu>0$ есть уравнение Аллера, при $\nu=0$ – уравнение теплопроводности. Подобные задачи встречаются при изучении обратных задач, а также при изучении физических процессов с учетом эффекта памяти.

Общая методика исследования. В работе используется метод функции Римана для гиперболических уравнений третьего порядка, теория интегральных уравнений, метод априорных оценок в дифференциальной и разностной трактовках.

Научная новизна. Исследованы новые нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида с переменными коэффициентами как в одномерном, так и в многомерном случаях. Для рассматриваемых краевых задач построены разностные схемы, получены априорные оценки, откуда следует устойчивость, а также сходимость разностных схем. Для первой краевой задачи для псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами построены векторные аддитивные разностные схемы полной аппроксимации, доказана устойчивость разностных схем по начальным данным и правой части.

Научные положения, выносимые на защиту:

Доказано существование и единственность регулярных решений нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка методом функции Римана.

Получена априорная оценка для решения третьей краевой задачи с нелокальным условием, откуда следует единственность решения, а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных. Построена разностная схема и доказана устойчивость схемы по правой части и начальным данным, откуда следует сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$, где h, τ – параметры сетки.

Получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида в многомерной области, откуда следует единственность, а также устойчивость решения по начальным данным и правой части в сеточной норме $W_2^1(G)$ на слое. Для первой краевой задачи для псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами построены векторные аддитивные разностные схемы полной аппроксимации, доказана устойчивость разностных схем по начальным данным и правой части.

Доказана сходимость (в малом) итерационного процесса для решения третьей краевой задачи с нелокальным условием для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида в многомерной области.

Практическая и теоретическая значимость. Несмотря на то, что диссертационная работа носит в основном теоретический характер, ее результаты могут получить хорошую физическую интерпретацию, могут быть использованы для дальнейшей разработки теории краевых задач для псевдопараболических уравнений, а также для решения прикладных задач, описывающих процессы водно-солевого режима почвогрунтов.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 15 научных работ, которые отражают ее основные результаты. Работа [1] выполнена в соавторстве с научным руководителем М.Х. Шхануковым – Лафишевым.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы автор освещал в своих докладах на международных и всероссийских конференциях [1,5,7–10,12]: III Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2006), Труды Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2006), Труды Четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2007), Материалы I форума молодых ученых Юга России и I Всероссийской конференции молодых ученых «Наука и устойчивое развитие» (Нальчик, 2007), Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (Новосибирск, 2007), Материалы Международного конгресса студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива – 2007» (Нальчик, 2007), V Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик-Эльбрус, 2007), VI Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (Нальчик-Эльбрус, 2008).

Результаты диссертационной работы [1–15] неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах по вычислительной математике и математической физике математического факультета Кабардино-Балкарского государственного университета под руководством доктора физико-математических наук, профессора Шханукова-Лафишева М.Х. с 2005 по 2008гг.

Достоверность результатов, выводов и рекомендаций определяется корректным использованием математического аппарата, современных численных методов (сеточных методов), сравнительным анализом результатов, полученных в диссертационной работе, и вычислительными экспериментами.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 160 страниц. Список литературы содержит 105 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, приведен обзор результатов исследовании по теме диссертации, кратко изложено содержание диссертационной работы и методика исследований, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **первой главе** диссертационной работы исследованы нелокальные краевые задачи для уравнения (*). Для решения задач воспользовались методом функции Римана.

Таким образом, изучена следующая нелокальная задача.

Найти регулярное в области $D=\{(x,t):0<x<l,\,0<t<T\}$ решение $u(x,t)$ уравнения

$$L(u)\equiv u_{xxt}+d(x,t)u_t+\eta(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_x+b(x,t)u=-q(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=\beta_1(t)u(l,t)+\int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau, \quad 0\le t\le T, \qquad (2)$$

$$u_x(0,t)=0, \quad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le l, \qquad (4)$$

где коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) – (4) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$q(x,t),\ b(x,t),\ a_x(x,t),\ d_t(x,t),\ \eta_{xx}(x,t) \in C(\overline{D}),$$
$$u_0(x) \in C^2[0,l],\quad \beta_1(t),\ \rho(t,t_1) \in C[0,T],\quad 0 \le t_1 \le t. \tag{5}$$

Для уравнения (1) рассмотрены краевые задачи, где граничное условие (3) заменяется последовательно следующими условиями:

$$u_x(0,t) = \beta_2(t)u(0,t) + \mu(t),\quad \beta_2(t) \ge 0,\quad 0 \le t \le T, \tag{3a}$$
$$\Pi(0,t) = \beta_2(t)u(0,t) + \mu(t),\quad 0 \le t \le T, \tag{3b}$$
$$u_x(l,t) = 0,\quad 0 \le t \le T, \tag{3c}$$
$$-u_x(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) + \mu(t),\quad \beta_2(t) \ge 0,\quad 0 \le t \le T, \tag{3d}$$
$$-\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) + \mu(t),\quad 0 \le t \le T, \tag{3e}$$

где $\Pi(x,t) = u_{xt} + \eta(x,t)u_x$ – полный поток, $\beta_2(t),\ \mu(t) \in C[0,T]$.

Здесь под регулярным в области D решением уравнения понимается действительная функция $u(x,t)$, обладающая в D всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество.

Т е о р е м а 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) – (4) удовлетворяют условиям гладкости (5). Тогда, если $d(x,t) < 0$ для любого $(x,t) \in D$ и $\beta_1(t) \notin (0,1)$ при $0 \le t \le T$, то задача (1) – (4) имеет единственное регулярное в области D решение.

Аналогичный результат имеет место, когда условие (3) заменяется одним из условий (3a), (3b).

В случае, когда условие (3) заменяется последовательно условиями (3c), (3d), (3e) условия однозначной разрешимости имеют вид:

$$d(x,t) < 0 \text{ для любого } (x,t) \in D \text{ и } \beta_1(t) \le 1 \text{ для любого } t \in [0,T].$$

Далее в этой главе были рассмотрены следующие нелокальные задачи, для решения которых в предположении существования регулярного решения получены априорные оценки.

З а д а ч а 1.1. В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим задачу с нелокальным краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),\quad (x,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$u(0,t) = \beta_1(t)u(1,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(1,\tau)d\tau,\quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u_x(1,t) = 0,\quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

где

$$0 < c_0 \le \eta(x,t) \le c_1,\quad |\beta_1(t)| \le \beta_0 < 1 \text{ для любого } t \in [0,T],$$
$$|k(x,t)|,\ |\eta_t(x,t)|,\ |k_t(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |\rho(t,t_1)|,\ |\rho_t(t,t_1)| \le c_2, \tag{10}$$

$Q_T = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$, $c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные, $0 \le t_1 \le t$.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (6) и граничных условий (7) – (9) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости.

В дальнейшем всюду предполагается, что регулярное решение рассматриваемых задач существует, коэффициенты уравнения и граничных условий обладают достаточным количеством непрерывных производных, необходимых для обеспечения нужной по ходу изложения гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

В предположении существования регулярного решения получена априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} \le M(t)\left(\int_0^t \|f\|_0^2 \, d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right),$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (6) – (9),

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} = \|u\|^2_{L_2(0,1)} + \|u_x\|^2_{L_2(0,1)}, \quad \|u\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 u^2 dx.$$

Заметим, что полученная априорная оценка имеет место, если в задаче (6) – (9) заменить краевое условие (8) условием $u_x(0,t)=0$, $0 \le t \le T$ и если $|\beta_1(t)| \ge \beta_0 > 1$ для любого $t \in [0,T]$.

З а д а ч а 1.2. Для уравнения (6) в цилиндре $\overline{Q}_T$ рассматривается задача

$$k(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \beta_1(t)u(1,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

где

$$0 < c_0 \le \eta(x,t) \le c_1, \quad 0 < c_2 \le k(x,t) \le c_3,$$
$$|\eta_t(x,t)|, \ |k_t(x,t)|, \ |r(x,t)|, \ |q(x,t)|, \ |\beta_1(t)|, \ |\rho(t,t_1)|, \ |\rho_t(t,t_1)| \le c_4, \tag{14}$$
$$c_i, \ i = \overline{0,4} \text{ – положительные постоянные, } 0 \le t_1 \le t.$$

В предположении существования регулярного решения получена априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} + \|u_x\|^2_{2,Qt} \le M(t)\left(\int_0^t \|f\|_0^2 \, d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right), \quad \|u_x\|^2_{2,Qt} = \int_0^t \|u_x\|_0^2 \, d\tau,$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (6), (11) – (13).

З а д а ч а 1.3. Для уравнения (6) в цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T\}$ рассматривается следующая задача

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T, \tag{15}$$

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{16}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{17}$$

где $0 < c_0 \le \eta(x,t) \le c_1$, $|\eta_t(x,t)|, \ |k(x,t)|, \ |r(x,t)|, \ |q(x,t)|, \ |\beta_1(t)|, \ |\rho(t,t_1)| \le c_2$,

$\Pi(x,t) = k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\eta(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$ – полный поток, например, влаги через сечение в единицу времени, c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные, $0 \le t_1 \le t$.

В предположении существования регулярного решения получена априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M(t)\left(\int_0^t \|f\|_0^2\, d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (6), (15) – (17).

Из априорной оценки следует единственность решения рассматриваемой задачи, а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

Во **второй главе** данной работы рассматривается третья краевая задача для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида с нелокальным условием.

В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим задачу с нелокальным краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \qquad (18)$$

$$\Pi(0,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T, \qquad (19)$$

$$-\Pi(l,t) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (20)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (21)$$

где

$$r(0,t) = r_0 \le 0,\ r(l,t) = r_N \ge 0, \quad 0 < c_0 \le \eta(x,t) \le c_1, \quad 0 < c_2 \le k(x,t) \le c_3, \qquad (22)$$

$$|r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |\eta_t|,\ |k_x|,\ |r_x|,\ |\beta_1(t)|,\ |\beta_2(t)|,\ |\rho(t,t_1)| \le c_4,$$

$Q_T = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$, c_i, $i = \overline{0,4}$ – положительные постоянные, $0 \le t_1 \le t$.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (18) и граничных условий (19) – (21) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы. Заметим, что при построении разностных схем требуется более высокая гладкость решения и коэффициентов уравнения.

В прямоугольной области D для уравнения (1) рассмотрим задачу (19) – (21), где коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (19) – (21) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$q(x,t),\ b(x,t),\ a_x(x,t),\ d_t(x,t),\ \eta_{xx}(x,t) \in C(\overline{D}),$$

$$u_0(x) \in C^2[0,l], \quad \beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \rho(t,t_1),\ \mu(t) \in C[0,T], \quad 0 \le t_1 \le t. \qquad (23)$$

$D = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ – область, в которой ищется решение рассматриваемой задачи. $\Pi(x,t) = u_{xt} + \eta(x,t)u_x$ – полный поток.

Методом функции Римана данная задача редуцируется к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена в работе М.Х. Шханукова.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (19) – (21) удовлетворяют условиям гладкости (23). Тогда, если $d(x,t) < 0$ для любого $(x,t)\in D$, то задача (1), (19) – (21) имеет единственное регулярное в области D решение.

Далее в предположении существования регулярного решения задачи (18) – (21) получена следующая априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|u_x\|^2_{2,Qt}\le M(t)\left(\int_0^t\left(\|f\|_0^2+\mu^2(\tau)\right)d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (18) – (21).

Из априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (18) – (21), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

В качестве одного из способов решения нелокальной краевой задачи (18) – (21) рассмотрим итерационный метод, который сводит решение нелокальной краевой задачи к решению последовательности локальных задач.

Итерационный процесс будем строить следующим образом:

$$\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial t}=L\overset{s+1}{u}+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{24}$$

$$\overset{s+1}{\Pi}(0,t)=\beta_1(t)\overset{s}{u}(l,t)+\int_0^t\rho(t,\tau)\overset{s}{u}(l,\tau)d\tau,\quad 0\le t\le T, \tag{25}$$

$$-\overset{s+1}{\Pi}(l,t)=\beta_2(t)\overset{s+1}{u}(l,t)-\mu(t),\quad 0\le t\le T, \tag{26}$$

$$\overset{s+1}{u}(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le l, \tag{27}$$

где

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u,$$

$$0<c_0\le\eta(x,t)\le c_1,\ 0<c_2\le k(x,t)\le c_3,$$

$$\left|\eta_t(x,t)\right|,\ \left|r(x,t)\right|,\ \left|q(x,t)\right|,\ \left|\beta_1(t)\right|,\ \left|\beta_2(t)\right|,\ \left|\rho(t,t_1)\right|\le c_4, \tag{28}$$

$c_i,\ i=\overline{0,4}$ – положительные постоянные, $0\le t_1\le t.$

s = 0, 1, 2, … – итерационный индекс. В качестве нулевого приближения $\overset{0}{u}$ можно взять, например, значение решения в начальный момент времени $u_0(x)$.

В предположении существования регулярного решения получена следующая оценка погрешности метода (24) – (27)

$$\max_{0\le t\le T}\|\overset{s+1}{u}-u\|^2_{W_2^1(0,l)}\le\left(T^2M(T)\right)^{s+1}\max_{0\le t\le T}\|\overset{0}{u}-u\|^2_{W_2^1(0,l)}.$$

Из этой оценки следует, что при $T^2M(T)<1$ итерационный метод (24) – (27) сходится в норме $W_2^1(0,l)$. Сходимость итерационного процесса может быть обеспечена за счет малости времени T, то есть сходимость будет только в малом. Очевидно, что исходную задачу на каждой итерации можно решать обычным методом прогонки.

Для решения задачи (18) – (21) применим метод конечных разностей. В замкнутой области $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=\{(x_i,t_j),\ x\in\overline{\omega}_h,\ t\in\overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,...,N,\ Nh=l\},\quad \overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,...,m,\ m\tau=T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (18) – (21) поставим в соответствие разностную схему:

$$y_{t,i} = \tilde{\Lambda}(\bar{t})y_i^{(\sigma)} + (\gamma y_{\bar{x}})_{xt,i} + \varphi_i, \qquad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{29}$$

$$a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} + (\gamma_1 y_{x,0})_t = \beta_1 y_N^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j} y_{s,N}^{(\sigma)} + \frac{h}{2}(y_{t,0} + d_0 y_0^{(\sigma)} - \varphi_0), \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{30}$$

$$-(a_N \chi_N y_{\bar{x}N}^{(\sigma)} + (\gamma\, y_{\bar{x}})_{t,N}) = \beta_2 y_N^{(\sigma)} - \mu + \frac{h}{2}(y_{t,N} + d_N y_N^{(\sigma)} - \varphi_N), \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{31}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{32}$$

где $\tilde{\Lambda}(\bar{t})y_i^{(\sigma)} = \chi_i (a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$

$\chi_i = 1 - R_i \approx \dfrac{1}{1+R_i}, \quad R_i = \dfrac{h\,|\,r_i\,|}{2k_{i-0.5}}$ – разностное число Рейнольдса,

$$\chi_0 = \begin{cases} 1 + \dfrac{hr_0}{2k_{0.5}}, & если \quad r_0 > 0, \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{h\,|\,r_0\,|}{2k_{0.5}}}, & если \quad r_0 \le 0, \end{cases} \qquad \chi_N = \begin{cases} 1 + \dfrac{h\,|\,r_N\,|}{2k_{N-0.5}}, & если \quad r_N < 0, \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{h\,|\,r_N\,|}{2k_{N-0.5}}}, & если \quad r_N \ge 0, \end{cases}$$

$$b^\pm = \tilde{r}^\pm + O(h^2), \quad k\tilde{r}^\pm = r^\pm, \quad r = r^+ + r^-, \quad |\,r\,| = r^+ - r^-.$$

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (18) – (21), y_i^j – решение разностной задачи (29) – (32), тогда обозначим через $z = y - u$ погрешность аппроксимации. Подставляя $y = z + u$ в (29) – (32) и считая $u(x,t)$ заданной функцией, получим задачу для z и покажем, что схема (29) – (32) сходится и имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ на слое:

$$z_{t,i} = \chi_i (a z_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + (\gamma z_{\bar{x}})_{xt,i} + b_i^+ a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} - d_i z_i^{(\sigma)} + \psi_i, \tag{33}$$

$$a_1\chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + (\gamma_1 z_{x,0})_t = \beta_1 z_N^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j} z_{s,N}^{(\sigma)} + \frac{h}{2}(z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)}) - \nu_1, \tag{34}$$

$$-(a_N \chi_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + (\gamma\, z_{\bar{x}})_{t,N}) = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + \frac{h}{2}(z_{t,N} + d_N z_N^{(\sigma)}) - \nu_2, \tag{35}$$

$$z(x,0) = 0. \tag{36}$$

При выполнении условий гладкости

$$k(x,t) \in C^{3,2}(\overline{Q}_T), \quad \eta(x,t) \in C^{3,3}(\overline{Q}_T), \quad r(x,t),\ q(x,t),\ f(x,t) \in C^{2,2}(\overline{Q}_T), \tag{37}$$

где $C^{n,m}(\overline{Q}_T)$ – класс функций, имеющих непрерывные на $\overline{Q}_T$ производные до порядка n по x и до порядка m по t включительно, с помощью разложения по формуле Тейлора убеждаемся, что разностная схема (33) – (36), в силу построения оператора $\tilde{\Lambda}$, имеет погрешности аппроксимации $\psi_i = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ на решении исходной задачи, если выполнены условия (37) при каждом фиксированном t.

При $\sigma = 0.5$ для решения задачи (33) – (36) при малом $\tau \le \tau_0$ получена априорная оценка

$$|\,[z^{j+1}]\,|^2 + \|\, z_{\bar{x}}^{j+1}]\,|^2 + \sum_{j'=0}^{j} |\,[\left(z^{j'+1} + z^{j'}\right)_{\bar{x}}]\,|^2\, \tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \left(|\,[\psi^{j'}]\,|^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\right)\tau.$$

Из этой априорной оценки следует справедливость следующей теоремы

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия (22), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий решение разностной задачи (29) – (32) при малом $\tau \le \tau_0(c_0,\ c_1, c_2)$ сходится к решению дифференциальной задачи (18) – (21) в смысле нормы $|[z]|^2_{(1)} = \ |[z^{j+1}]|^2 \ + \| z^{j+1}_{\bar{x}}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} |[(z^{j'+1} + z^{j'})_{\bar{x}}]|^2 \ \tau$ на каждом слое так, что справедлива оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_{(1)} \le M(h^2 + \tau^2),$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Отметим, что нелокальное условие в граничном условии приводит к нарушению трехдиагональной структуры матрицы коэффициентов разностной схемы. Поэтому для решения полученной системы разностных уравнений можно использовать либо итерационные методы решения, либо метод окаймления, позволяющий, в данном случае, свести решение системы линейных уравнений с "нарушенной" трехдиагональной структурой матрицы коэффициентов к решению двух систем с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

В **третьей главе** диссертации рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида с переменными коэффициентами в многомерной области.

В параграфе 3.1. рассматривается первая начально-краевая задача для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида в многомерной области.

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1,\ x_2, ..., x_p):\ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = \overline{1, p}\}$ с границей Г, $\overline{G} = GU\varGamma$ рассматривается первая начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{38}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \varGamma, \quad 0 \le t \le T, \tag{39}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{40}$$

где
$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\eta_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \le \eta_\alpha\ (x,t) \le c_1, \qquad 0 < c_2 \le k_\alpha\ (x,t) \le c_3, \tag{41}$$

$$\left|k_{\alpha x_\alpha}(x,t)\right|,\ \left|\eta_{\alpha t}(x,t)\right|,\ \left|r_\alpha(x,t)\right|,\ \left|r_{\alpha x_\alpha}(x,t)\right|,\ \left|q_\alpha(x,t)\right| \ \le c_4,$$

$Q_T = G \times [0 < t \le T]$, $c_i, i = \overline{0,4}$ – положительные постоянные, $\alpha = 1,2,..., p.$

В предположении существования регулярного решения получена следующая априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(G)} + \|u_{\ x}\|^2_{2,Qt} \le M(t)\left(\int_0^t \|f\|_0^2\ d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right),$$

где M(t) – зависит только от входных данных задачи (38) – (40).

Из априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (38) – (40), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(G)$.

В замкнутой области $\overline{Q}_T$ вводится равномерная сетка:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},\quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ \ j = 0,1,\ldots,m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (38) – (40) поставим в соответствие разностную схему с весами, порядка аппроксимации $O(|h|^2 + \tau^{m_\sigma})$:

$$y_t = \tilde{\Lambda}(\bar{t})y^{(\sigma)} + \delta\, y + \varphi,\qquad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{42}$$

$$y|_{\gamma_h} = 0,\qquad y(x,0) = u_0(x), \tag{43}$$

где $\tilde{\Lambda}(\bar{t}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{\Lambda}_\alpha(\bar{t})$, $\tilde{\Lambda}_\alpha(\bar{t})y^{(\sigma)} = \chi_\alpha (a_\alpha y^{(\sigma)}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha^{+} a_\alpha^{+1} y^{(\sigma)}_{x_\alpha} + b_\alpha^{-} a_\alpha y^{(\sigma)}_{\bar{x}_\alpha} - d_\alpha y^{(\sigma)}$,

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha,\quad \delta_\alpha y = (\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha t},\quad y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y,\quad \hat{y} = y^{j+1},\quad y = y^j,$$

$$\chi_\alpha = \frac{1}{1+R_\alpha},\quad R_\alpha = \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{2k_\alpha}$$ – разностное число Рейнольдса,

Имеет место следующая

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия (41), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (42), (43) при малом $\tau \le \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка

$$\| y^{j+1} \|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j} |[(y^{j'+1} + y^{j'})_{\bar{x}}]|^2\ \tau \le M\left(\sum_{j'=0}^{j} \|\varphi^{j'}\|^2 \tau + \| y^0 \|^2_{W_2^1(G)} \right)$$

на каждом временном слое, где M – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Таким образом, доказана устойчивость решения разностной задачи (42) – (43) по начальным данным и правой части в смысле нормы $|[y]|^2_{(1)} = |[y^{j+1}]|^2 + \| y^{j+1}_{\bar{x}}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} |[(y^{j'+1} + y^{j'})_{\bar{x}}]|^2\ \tau$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (38) – (40), y_i^j – решение разностной задачи (42) – (43), тогда обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации. Подставляя $y_i^j = z_i^j + u_i^j$ в (42)–(43) и считая $u(x_i, t_j)$ заданной функцией, получим для z задачу:

$$z_t = \tilde{\Lambda}(\bar{t})z^{(\sigma)} + \delta\, z + \psi, \tag{44}$$

$$z|_{\gamma_h} = 0,\qquad z(x,0) = 0, \tag{45}$$

где $\psi_i = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = O(|h|^2 + \tau^{m_\sigma})$ – погрешность аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном t, в силу построения оператора $\tilde{\Lambda}$.

Применяя полученную априорную оценку к задаче для погрешности, получим оценку

$$\| z^{j+1} \|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j} | [(z^{j'+1} + z^{j'})_{\bar{x}}] |^2 \tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \| \psi^{j'} \|^2 \tau .$$

Из априорной оценки следует сходимость схемы (44) – (45) со скоростью $O(|h|^2 + \tau^{m_\sigma})$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + ... + h_p^2$.

Для задачи (38)-(40) рассмотрим векторные аддитивные схемы, где $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $0 < c_0 \le k_\alpha(x) \le c_1$.

Задачу (38) – (40) перепишем в виде абстрактной задачи Коши

$$\frac{du}{dt} + Au + Au_t = f(t), \tag{46}$$

$$u(0) = u_0,$$

где $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, $\quad A_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)$.

Краевые условия учитываются включением $u(t) \in D(A)$, где $D(A)$ – область определения оператора *A*. Вместо одного скалярного решения $u(t)$ вводится вектор решений $U(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_p(t))$.

Вместо задачи (46) рассмотрим систему однотипных подзадач:

$$\frac{du_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta u_\beta + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta u_{\beta t} = f(t), \tag{47}$$

$$u_\alpha(0) = u_0, \ \alpha = 1,2,..., p.$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а 5. Задача (47), полученная в результате перехода от скалярного решения задачи (46) к вектор-решению $U(t)$, поставлена корректно, причем $u_\alpha(t) = u(t)$, $\alpha = 1,2,..., p$ для любых $t \in [0,T]$ и справедлива оценка

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \| u_{\alpha t} \|^2_{2,Q_t} + \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha \right\|_0^2 \le M \left(\| f(t) \|^2_{2,Q_t} + \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha(0) \right\|_0^2 \right),$$

где $\| u \|_0^2 = \int_G u^2 dx$, $\quad \| u \|^2_{2,Q_t} = \int_0^t \| u \|_0^2 d\tau.$

Для приближенного решения задачи (47) будем использовать трехслойную векторную аддитивную схему

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta^h y_{n+1}^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta^h y_n^{(\beta)} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta^h y_{t,n}^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta^h y_{t,n-1}^{(\beta)} = \varphi_{n+1}, \tag{48}$$

$$y_0^{(\alpha)} = u_0,$$

где y_n – приближенное решение на момент времени $t_n = n\tau$, τ – шаг равномерной сетки по времени, $n = 0,1,...$. A_β^h – дискретный аналог оператора *A*. Будем считать, что задача (46) дополнена еще одним условием

$$y^{(\alpha)}(\tau) = \tilde{u}_1(x), \quad \alpha = 1,2,..., p, \ \tilde{u}_1(x) = u_0(x) + \tau u_1(x), \ u_1(x) = u_t(x,0).$$

Значение $u_t(x,0)$ ищем исходя из дифференциального уравнения (38).

Итак справедлива следующая

Теорема 6. Пусть для неявных схем $\left(E+\tau A_\alpha\right)y_{n+1}^{(\alpha)}+\tau A_\alpha y_{\bar{t},n+1}^{(\alpha)}=y_n^{(\alpha)}+\tau\varphi_{n+1}^{(\alpha)}$ верна оценка

$$\| y_{n+1}^{(\alpha)} \|\leq\| y_n^{(\alpha)} \|+\tau\| \varphi_{n+1}^{(\alpha)} \|.$$

Тогда векторная аддитивная схема (48) устойчива по начальным данным и правой части и для разностных решений верны оценки

$$\| y_{n+1}^{(\alpha)} \|\leq\| y_n^{(\alpha)} \|+\tau\| u_1(x) \|+\tau\sum_{k=1}^{n}\tau\left\| \frac{\varphi_{k+1}^{(\alpha)}-\varphi_k^{(\alpha)}}{\tau} \right\|,\ n=0,1,\ldots,\ \alpha=1,2,\ldots,p.$$

В параграфе 3.2. для уравнения (38) рассматривается третья краевая задача

$$\Pi_{-\alpha}(x,t)=\beta_{-\alpha}(x,t)u(x,t)-\mu_{-\alpha}(x,t),\quad \text{при}\quad x_\alpha=0,\quad 0\leq t\leq T, \tag{49}$$

$$-\Pi_{+\alpha}(x,t)=\beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t)-\mu_{+\alpha}(x,t),\quad \text{при}\quad x_\alpha=l_\alpha,\quad 0\leq t\leq T, \tag{50}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{51}$$

где

$$0<c_0\leq\eta_\alpha(x,t)\leq c_1,$$

$$|k_\alpha(x,t)|,\ |\eta_{\alpha t}(x,t)|,\ |r_\alpha(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)|,\ |\beta_{-\alpha}(x,t)|,\ |\beta_{+\alpha}(x,t)|\leq c_2, \tag{52}$$

$$\Pi_\alpha(x,t)=k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \text{ – полный поток,}$$

$c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные, $\alpha=1,2,\ldots,p.$

В предположении существования регулярного решения получена следующая априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^1(G)}^2\leq M(t)\left(\int_0^t\left(\|f\|_0^2+\int_{G'}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)dx'\right)d\tau+\|u_0(x)\|_{W_2^1(G)}^2\right),$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (38), (49) – (51).

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (38), (49) – (51) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O(|h|+\tau)$:

$$y_{\bar{t}}=\Lambda(\tilde{t})y+\varphi,\qquad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{53}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}+(\gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0})_{\bar{t}}=\beta_{-\alpha}y_0-\mu_{-\alpha},\qquad x_\alpha=0, \tag{54}$$

$$-(a_{+\alpha}y_{\bar{x},N_\alpha}+(\gamma_{+\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\bar{t},N_\alpha})=\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}-\mu_{+\alpha},\qquad x_\alpha=l_\alpha, \tag{55}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{56}$$

где

$$\Lambda(\tilde{t})=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\tilde{t}),$$

$$\Lambda_\alpha(\tilde{t})y_{(\alpha)}=(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}+(\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha,\bar{t}}+r_\alpha^+y_{x_\alpha}+r_\alpha^-y_{\bar{x}_\alpha}-d_\alpha y.$$

Имеет место следующая

Теорема 7. Пусть выполнены условия (52), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения разностной задачи (53) – (56) при малом $\tau\leq\tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ справедлива априорная оценка

$$\| y^j \|_{W_2^1(G)}^2\leq M\left(\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\mu_1^{j'2}+\mu_2^{j'2}\right)\tau+\| y^0 \|_{W_2^1(G)}^2\right)$$

на каждом временном слое в сеточной норме $W_2^1(G)$, где М – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Таким образом, доказана устойчивость решения разностной задачи (53) – (56) по начальным данным и правой части в сеточной норме $W_2^1(G)$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (38), (49) – (51), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (53) – (56). Обозначим через $z_i^j=y_i^j-u_i^j$ погрешность аппроксимации. Тогда, подставляя $y=z+u$ в (53) – (56), получим задачу для z:

$$z_{\bar t}=\Lambda(\tilde t)z+\psi,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau} \tag{57}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}z_{x_\alpha,0}+(\gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}z_{x_\alpha,0})_{\bar t}=\beta_{-\alpha}z_0-\nu_{-\alpha},\qquad x_\alpha=0, \tag{58}$$

$$-(a_{+\alpha}z_{\bar x,N_\alpha}+(\gamma_{+\alpha}z_{\bar x_\alpha})_{\bar t,N_\alpha})=\beta_{+\alpha}z_{N_\alpha}-\nu_{+\alpha},\qquad x_\alpha=l_\alpha, \tag{59}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{60}$$

где $\psi=O(|h|+\tau)$, $\nu_{-\alpha}=O(|h|+\tau)$, $\nu_{+\alpha}=O(|h|+\tau)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (38), (49) – (51).

Применяя полученную априорную оценку к решению задачи (57) – (60), получаем

$$\|z^j\|^2_{W_2^1(G)}\le M\sum_{j'=1}^{j}\left(\|\psi^{j'}\|^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\right)\tau,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из априорной оценки следует сходимость схемы (57) – (60) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $W_2^1(G)$.

В параграфе 3.3 для уравнения (38) рассматривается нелокальная краевая задача

$$\Pi_{-\alpha}(0,x',t)=\beta_{-\alpha}(0,x',t)u(l_\alpha,x',t)+\int_0^t\rho(t,\tau)u(l_\alpha,x',\tau)d\tau,\quad 0\le t\le T, \tag{61}$$

$$-\Pi_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)=\beta_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)u(l_\alpha,x',t)-\mu_{+\alpha}(l_\alpha,x',t),\quad 0\le t\le T, \tag{62}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{63}$$

где

$$0<c_0\le\eta_\alpha(x,t)\le c_1, \tag{64}$$

$$|k_\alpha(x,t)|,\ |\eta_{\alpha t}(x,t)|,\ |r_\alpha(x,t)|,\ |q_\alpha(x,t)|,\ |\beta_{-\alpha}(x,t)|,\ |\beta_{+\alpha}(x,t)|,\ |\rho(t,t_1)|\le c_2,$$

c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные, $\quad 0\le t_1\le t,\quad \alpha=1,2,\ldots,p.$

В предположении существования регулярного решения получена следующая априорная оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(G)}\le M(t)\left(\int_0^t\left(\|f\|_0^2+\int_{G'}\mu^2dx'\right)d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right),$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (38), (61) – (63).

В качестве одного из способов решения нелокальной краевой задачи (38), (61) – (63) рассмотрим итерационный метод, который сводит решение нелокальной краевой задачи к решению последовательности локальных задач.

Итерационный процесс для задачи (38), (61) – (63) будем строить следующим образом:

$$\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial t} = L\overset{s+1}{u} + f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{65}$$

$$\overset{s+1}{\Pi}_{-\alpha}(0,x',t) = \beta_{-\alpha}(0,x',t)\overset{s}{u}(l_\alpha,x',t) + \int_0^t \rho(t,\tau)\overset{s}{u}(l_\alpha,x',\tau)d\tau, \quad 0\le t\le T, \tag{66}$$

$$-\overset{s+1}{\Pi}_{+\alpha}(l_\alpha,x',t) = \beta_{+\alpha}(l_\alpha,x',t)\overset{s+1}{u}(l_\alpha,x',t) - \mu_{+\alpha}(l_\alpha,x',t), \quad 0\le t\le T, \tag{67}$$

$$\overset{s+1}{u}(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{G}, \tag{68}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$ – итерационный индекс. В качестве нулевого приближения $\overset{0}{u}$ можно взять, например, значение решения в начальный момент времени $u_0(x)$.

В предположении существования регулярного решения получена следующая оценка погрешности метода (65) – (68):

$$\max_{0\le t\le T}\|\overset{s+1}{u} - u\|^2_{W_2^1(G)} \le \left(T^2M(T)\right)^{s+1}\max_{0\le t\le T}\|\overset{0}{u} - u\|^2_{W_2^1(G)}.$$

Из оценки следует, что при $T^2M(T)<1$ итерационный метод (65) – (68) сходится в норме $W_2^1(G)$. Сходимость итерационного процесса может быть обеспечена за счет малости времени *T*, то есть сходимость будет только в малом.

Для решения задачи (38), (61) – (63) применим метод конечных разностей. Тогда на сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O(|h|+\tau)$:

$$y_{\bar t} = \Lambda(\tilde t)y + \varphi, \qquad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{69}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0} + (\gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha,0})_{\bar t} = \beta_{-\alpha}y_{N_\alpha} - \sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}\overset{s}{y}_N\bar\tau, \qquad x_\alpha = 0, \tag{70}$$

$$-(a_{+\alpha}y_{\bar x,N_\alpha} + (\gamma_{+\alpha}y_{\bar x_\alpha})_{\bar t,N_\alpha}) = \beta_{+\alpha}y_{N_\alpha} - \mu_{+\alpha}, \qquad x_\alpha = l_\alpha, \tag{71}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{72}$$

где
$$\Lambda(\tilde t) = \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(\tilde t),$$

$$\Lambda_\alpha(\tilde t)y_{(\alpha)} = (a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha} + (\gamma_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha,\bar t} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\bar x_\alpha} - d_\alpha y.$$

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (38), (61) – (63), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (69) – (72). Тогда, подставляя $y=z+u$ в (69) – (72), получим задачу для *z*:

$$z_{\bar t} = \Lambda(\tilde t)z + \psi, \quad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{73}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}z_{x_\alpha,0} + (\gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)}z_{x_\alpha,0})_{\bar t} = \beta_{-\alpha}z_{N_\alpha} - \sum_{s=0}^{j}\rho_{s,j}\overset{s}{z}_N\bar\tau - \nu_{-\alpha}, \qquad x_\alpha = 0, \tag{74}$$

$$-(a_{+\alpha}z_{\bar x,N_\alpha} + (\gamma_{+\alpha}z_{\bar x_\alpha})_{\bar t,N_\alpha}) = \beta_{+\alpha}z_{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, \qquad x_\alpha = l_\alpha, \tag{75}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x\in\overline{\omega}_h, \tag{76}$$

где $\psi = O(|h|+\tau)$, $\nu_{-\alpha} = O(|h|+\tau)$, $\nu_{+\alpha} = O(|h|+\tau)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (38), (61) – (63).

Для решения задачи (73) – (76) справедлива следующая априорная оценка

$$\| z^j \|^2_{W_2^1(G)} \le M \sum_{j'=1}^{j} \left(\| \psi^{j'} \|^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2} \right) \tau . \qquad (77)$$

Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 8. Пусть выполнены условия (64), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий решение разностной задачи (69) – (72) при малом $\tau \le \tau_0(c_0,\ c_1,\ c_2)$ сходится к решению дифференциальной задачи (38), (61) – (63) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $W_2^1(G)$ так, что справедлива априорная оценка

$$\| z^j \|^2_{W_2^1(G)} \le M \sum_{j'=1}^{j} \left(\| \psi^{j'} \|^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2} \right) \tau ,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Автор выражает глубокую благодарность и искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Шханукову-Лафишеву Мухамеду Хабаловичу за предложенную тематику исследований, постоянную помощь и внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. *Шхануков-Лафишев, М.Х., Бештоков, М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка. / М.Х. Шхануков-Лафишев, М.Х. Бештоков // Труды Третьей Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара.: Изд-во СамГТУ, 2006. –С. 62-65.
2. *Бештоков, М.Х.* Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. / М.Х. Бештоков // Тематический сборник научных трудов "Математическое моделирование и краевые задачи". –Нальчик, 2006. –С. 4-8.
3. *Бештоков, М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка. / М.Х. Бештоков // Сборник научных трудов молодых ученых. –Нальчик, 2006. –С. 339-341.
4. *Бештоков, М.Х.* О сходимости разностной схемы нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. / М.Х. Бештоков // Известия КБНЦ РАН. –Нальчик, 2006. №2. (16). –С. 86-93.
5. *Бештоков, М.Х.* Нелокальные краевые задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа. / М.Х. Бештоков // III Международная конференция. Материалы. "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". –Нальчик, 2006. –С. 64-66.
6. *Бештоков, М.Х.* О сходимости разностных схем для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в многомерной

области. / М.Х. Бештоков // Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике. –Владикавказ, 2007. –С. 106-114.
7. *Бештоков, М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка. / М.Х. Бештоков // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения". –Новосибирск, 2007. –С. 92-93.
8. *Бештоков, М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. / М.Х. Бештоков // Материалы Международного конгресса студентов, аспирантов и молодых ученых "Перспектива – 2007". –Нальчик, 2007. –Т2. –С. 167-169.
9. *Бештоков, М.Х.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих первую начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения в многомерной области. / М.Х. Бештоков // Материалы I форума молодых ученых Юга России и I Всероссийской конференции молодых ученых "Наука и устойчивое развитие". –Нальчик, 2007. –С. 137-141.
10. *Бештоков, М.Х.* Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка в многомерной области. / М.Х. Бештоков // Труды Четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". –Самара.: Изд-во СамГТУ, 2007. –С. 35-37.
11. *Бештоков, М.Х.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для псевдопараболического уравнения третьего порядка в многомерной области. / М.Х. Бештоков // V Школа молодых ученых. Материалы. "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". –Нальчик-Эльбрус, 2007. –С. 24-27.
12. *Бештоков, М.Х.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для уравнения гиперболического типа в многомерной области с нелокальным краевым условием. / М.Х. Бештоков // Известия КБНЦ РАН. – Нальчик, 2007. №3 (19). –С. 88-96.
13. *Бештоков, М.Х.* Нелокальные краевые задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа. / М.Х. Бештоков // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. –Нальчик, 2007. –Т.9. №1. –С. 22-25.
14. *Бештоков, М.Х.* Метод функции Римана и разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа. / М.Х. Бештоков // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. – Ростов, 2007. №5. –С. 6-9.
15. *Бештоков, М.Х.* О сходимости итерационного процесса для псевдопараболического уравнения третьего порядка общего вида с нелокальным условием. / М.Х. Бештоков // VI Школа молодых ученых. Материалы. "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". –Нальчик-Эльбрус, 2008. –С. 192-193.