

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

МАЛИНОВСКИЙ Сергей Викторович

**МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ФИНАНСОВЫХ
ИНСТРУМЕНТОВ НА ОСНОВАНИИ ПОЛУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
ОЦЕНОК**

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник факультета
ВМиК Московского государственного
университета имени М. В. Ломоносова
Назаров Леонид Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова
Питербарг Владимир Ильич

кандидат физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой управления
рисками и страхования ГУ-ВШЭ
Смирнов Сергей Николаевич

Ведущая организация: Центральный экономико-математический
институт Российской академии наук
(ЦЭМИ РАН)

Защита диссертации состоится 20 ноября 2009 года в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова <http://www.cmc.msu.ru> в разделе “Наука” – “Работа диссертационных советов” – “Д 501.001.44”.

Автореферат разослан « » октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор

Н. П. Трифонов

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Начиная с 70-х гг. XX века и по сегодняшний день теория математического моделирования финансовых инструментов протерпела бурное развитие по пути усложнения рассматриваемых моделей и в настоящее время активно использует современные результаты теории вероятностей и математической статистики, в свою очередь ставя перед этими науками новые задачи. Построением и изучением стохастических моделей финансовых инструментов в разное время занимались Ф. Блэк, М. Шоулз, Р. Мертон, О. Барндорфф-Нильсен¹, А. Н. Ширяев², П. Карр, М. Йор³, Д. Мадан, Э. Геман, Н. Шепард, Д. Даффи, Д. Лэндо и многие другие математики. Несмотря на это, множество задач, которые широкая практика применения финансовых инструментов ставит перед исследователями в данной области, все еще далеки от окончательного разрешения, о чем свидетельствует большое количество публикаций в данной области, выходящих по всему миру ежегодно.

Одними из основных математических задач в теории моделирования финансовых инструментов являются разностороннее изучение случайных процессов, используемых для описания процессов цен активов, и статистический анализ эмпирических цен активов, демонстрирующих сложные паттерны поведения. Один из наиболее сложных и перспективных классов случайных процессов, активно изучаемых сегодня применительно к моделированию финансовых инструментов, составляют процессы вида

$$Z = (Z_t)_{t \geq 0} = (X(T(t)))_{t \geq 0}, \quad (1)$$

где $X = (X_t)_{t \geq 0}$ - процесс с независимыми приращениями, а $T = (T_t)_{t \geq 0}$ - случайная замена времени⁴. Наибольший вклад в исследование процессов такого вида внесли П. Карр, Д. Мадан, Э. Геман, М. Йор⁵, О. Барндорфф-Нильсен, Н. Шепард⁶ - применительно к опционам⁷ (процесс X при этом выбирается обычно в виде процесса Леви), и Д. Даффи⁸ и Д. Лэндо⁹ - применительно к рисковым облигациям¹⁰ (X при этом является, как правило, цепью Маркова с непрерывным временем).

¹Barndorff-Nielsen O.E. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling // Scand. J. Stat., 1997, **24**, p. 1-13.

²Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.

³Geman H., Madan D., Yor M. Stochastic volatility, jumps and hidden time changes // Finance and Stochastics, 2002, **6**, 1, p. 63-90.

⁴Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

⁵Carr P., Geman H., Madan D., Yor M. Stochastic volatility for Lévy processes // Math. Finance, 2003, **13**, 3, p. 345-382.

⁶Barndorff-Nielsen O.E., Shepard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics // J. Royal Stat. Soc. B, 2001, **63**, 2, p. 167-241.

⁷Hull, J.C. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall, 2002.

⁸Duffie D., Pan J., Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions // Econometrica, 2000, **68**, 6, p. 1343-1376.

⁹Lando D. On Cox processes and credit risky securities // Rev. Derivatives Res., 1998, **2**, 2-3, p. 99-120.

¹⁰Duffie D., Singleton K. Credit risk: pricing, measurement and management. Princeton University Press, 2003.

Однако, несмотря на ряд солидных результатов в отношении распределений процессов вида (1) и представлений для цен финансовых инструментов в рамках таких моделей, по определению равных математическим ожиданиям специального вида функционалов от их траекторий, полученных вышеперечисленными учеными, лишь в данной диссертации и предшествовавших ей работах автора был предложен и реализован метод статистического оценивания процесса T по т.н. "мартингальной" мере¹¹. Результаты использования данного метода применительно к опционам поставили под сомнение одну из основных предпосылок предшествовавших исследований в данной области, а именно, что случайная замена времени является несмещенной оценкой времени календарного, и послужили толчком к рассмотрению и исследованию более общих процессов вида (1), два из которых были изучены в первой главе данной диссертации. Аналогично, применение вышеуказанного метода к рисковому облигациям дало основу для построения новой вероятностной модели облигаций, изучению которой посвящена вторая глава диссертации.

Цель работы

Целью настоящей диссертации является построение метода статистического оценивания процесса случайной замены времени в моделях опционов и рисковом облигаций, а также построение и изучение *обоснованных* моделей случайной замены времени для данных финансовых инструментов на основе полученных с его помощью результатов.

Научная новизна

Все полученные в настоящей диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые построен метод статистического анализа эмпирических цен опционов, позволяющий получать полупараметрические оценки процесса случайной замены времени. Предложены два случайных процесса, получаемые посредством случайной замены времени на основе неоднородного негауссовского процесса Орнштейна-Уленбека и на основе "экспоненциально-пуассоновского" процесса в α -устойчивом движении Леви. Построенные на основе данных процессов опционные модели отражают как выявленные посредством вышеупомянутого метода закономерности, так и ряд эмпирических свойств цен активов. Доказан ряд аналитических свойств предложенных процессов. Для построенных опционных моделей получены выражения для характеристической функции процесса доходности и цены европейского опциона "колл" как математического ожидания специального вида функционала от процесса цены в полуаналитическом виде. Получены оценки остатка ряда в выражении для преобразования Лапласа процесса случайной замены времени на основе "экспоненциально-пуассоновского" процесса. Предложен и реализован алгоритм вычисления цен опционов в предложенных моделях.

¹¹См. с. 5.

Проведенный статистический анализ демонстрирует более высокую степень соответствия предложенных моделей эмпирическим опционным структурам, нежели ряда широко известных эталонных моделей.

2. Предложены две модели рискованных облигаций на основе цепей Маркова с непрерывным временем. Первая из предложенных моделей является модификацией модели В.В. Питербарга¹². Вторая модель, являющаяся обобщением первой, строится на основе цепи Маркова со случайной заменой времени специального вида и характеризуется наличием зависимости между процессами изменения кредитных рейтингов различных эмитентов. Для данной модели получены выражения для вероятности разорения эмитента и цены рискованной облигации в элементарных функциях.

Объект исследования

Объектами исследования в данной работе являются три новых предложенных автором случайных процесса вида (1), а также статистические выборки цен торгуемых на рынке финансовых инструментов.

Методы исследования

Для вычисления цен опционов в рамках построенных моделей был применен метод Карра-Мадана-Льюиса^{13,14}, основанный на использовании обобщенных преобразований Фурье процесса доходности и функции выплат опциона. Сравнительный статистический анализ предложенных моделей базируется на информационных критериях Акаике¹⁵, Шварца¹⁶ и Хэннана-Куинна¹⁷. Для получения выражений для вероятности разорения эмитента во второй из предлагаемых моделей рискованных облигаций была использована доказанная нами версия формулы Фейнмана-Каца¹⁸.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации вносят вклад в теорию случайных процессов и могут быть непосредственно применены для решения широкого круга прикладных задач, связанных с практическим использованием опционов и рискованных облигаций.

¹²Piterbarg V. Recovering risk-neutral Markov process of credit transitions from credit spreads and statistical information. Work. rep., NationsBank, 1999.

¹³Carr P., Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform // J. Comp. Finance, 1999, **2**, p. 61-73.

¹⁴Lewis A. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes // Envision Financial Systems and OptionCity.net, 2001.

¹⁵Akaike H. Information theory and an extension to the likelihood ratio principle // Proc. of the 2-nd International Symposium of Information Theory / Eds.: Petrov B.N., Csaki F. Akademiai Kiado, Budapest, 1973, p. 267-281.

¹⁶Schwartz G., Estimating the dimension of a model // Ann. Stat., 1978, **6**, 2, p. 461-464.

¹⁷Hannan E.J., Quinn B.G. The determination of the order of an autoregression // J. Royal Stat. Soc. B, 1979, **41**, 2, p. 190-195.

¹⁸Karatzas I., Shreve S.E. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, 1988.

Апробация работы и публикации

По теме диссертации опубликовано 4 печатные работы. Основные результаты диссертации докладывались на XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (секция "Математика и механика", апрель 2009 г.), на семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" Центрального экономико-математического института РАН (март-апрель 2009 г.), на семинаре Лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту ГУ ВШЭ (март 2009 г.), на семинаре "Управление кредитными рисками" Института финансов и кредита (июль 2006 г.).

Структура диссертации

Диссертация состоит из предисловия, списка обозначений и сокращений, двух глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, состоящего из 117 наименований. Введением снабжена каждая из глав в отдельности, поскольку решаемые в них задачи, хотя и тесно связаны математически, имеют различную специфику с точки зрения их практического применения. Диссертация включает в себя 9 теорем, 3 леммы, 4 рисунка и 5 таблиц. Общий объем работы составляет 117 страниц.

2 Краткое содержание диссертации

Первая глава диссертации посвящена стохастическим моделям опционов. Ключевым объектом исследования в данных моделях является процесс $S = (S_t)_{t \geq 0}$ цены базового актива, определяемый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованный с полной непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t$ - σ -алгебра, содержащая всю информацию, доступную участникам рынка к моменту $t \geq 0$.

Основные направления исследований опционных моделей включают в себя:

1) вычисление моментных характеристик процесса S и процессов, его образующих (в форме (1) - процессов X и T ¹⁹), а также процесса доходности $s = (s_t)_{t \geq 0} \equiv (\ln S_t)_{t \geq 0}$;

2) поиск эффективных с точки зрения вычисления на практике представлений для цен опционов применительно к рассматриваемой спецификации процесса S . В случае, если функция выплат²⁰ опциона $W(S_T)$ является лишь функцией цены базового актива в момент T исполнения опциона и при соблюдении ряда технических требований, изложенных на стр. 10-11 текста диссертации, цена этого

¹⁹Не вдаваясь в технические трудности, подробно рассмотренные в тексте диссертации, всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что процесс S и, в случае его наличия в модели, процесс T согласованы с полной непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{F}$.

²⁰Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities // J. Finance, 1987, **42**, 2, p. 281-300.

опциона в любой момент времени $t \in [0, T]$ задается следующей фундаментальной теоремой безарбитражного оценивания²¹:

Теорема (*)**. Пусть случайный процесс S является семимартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Тогда следующие два утверждения являются эквивалентными:

1. Рассматриваемый рынок удовлетворяет условию NFLVR (no free lunch with vanishing risk²²).

2. На фильтрованном измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ существует эквивалентная мере P вероятностная мера Q , такая, что случайный процесс

$$Z_t \equiv e^{-(r-d)t} S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

является по мере Q сигма-мартингалом. При этом для любого $t \in [0, T]$ и для любой борелевской функции $W(S_T)$ величина

$$c_t[W] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[W(S_T) | \mathcal{F}_t], \quad (2)$$

где условное математическое ожидание берется по мере Q , является справедливой ценой²³ опциона с реализуемой в момент времени T функцией выплат $W(S_T)$ в момент времени t .

Величину $c_0[W]$ мы в дальнейшем будем называть ("теоретической") ценой опциона со сроком до исполнения T и с функцией выплат $W(S_T)$ в модели S . Не ограничивая общности, мы предполагаем, что $S_0 = 1$.

Современная история развития теории опционного моделирования характеризуется быстрым ростом сложности используемых для описания динамики цен активов случайных процессов, от простого геометрического броуновского движения в модели Блэка-Шоулза (1973):

$$S(t) = \exp \left[\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right],$$

где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ есть стандартное броуновское движение относительно фильтрации $\mathbb{F}$ и $\sigma > 0$, до моделей вида (1), в которых процесс цены по "мартингальной" мере Q имеет вид

$$S(t) = e^{(r-d)t} \exp(-\Psi_X(-i)T(t) + X(T(t))),$$

где $X = (X_t)_{t \geq 0}$ есть некоторый процесс Леви, $T = (T_t)_{t \geq 0}$ - процесс случайной замены времени специального вида, а $\Psi_X(u)$ - характеристическая экспонента

²¹Через r здесь и далее обозначается непрерывно начисляемая безрисковая процентная ставка, а через d - непрерывно начисляемая ставка дивидендов по базовому активу; обе величины предполагаются неизменными во времени.

²²Delbaen F., Schachermayer W. The fundamental theorem of option pricing for unbounded stochastic processes // Mathematische Annalen, 1998, **312**, p. 215-250.

²³Данный термин понимается в том смысле, что рынок, пополненный данным опционом по цене, задаваемой соотношением (1), продолжает удовлетворять условию NFLVR.

процесса X . Наиболее распространенные в литературе примеры процессов X и T рассмотрены в разделе 1.1 диссертации.

Проблема, однако, заключается в том, выбор конкретного вида процесса T в известной нам литературе всегда производится лишь из общих соображений, главное из которых - простота вычисления преобразования Лапласа этого процесса, играющего ключевую роль в вычислении цен опционов в моделях обозначенного вида. Поэтому первой рассмотренной нами задачей была задача статистического оценивания процесса T по эмпирическим данным. В качестве ее решения был предложен и реализован на практике метод анализа рыночных цен опционов, состоящий из следующих шагов:

1. Оценивание по методу наименьших квадратов параметров опционной модели на основе случайного процесса

$$S(t) = e^{(r-d)t} \exp(-\Psi_{X^m}(-i)t + X^m(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

для некоторого процесса Леви X^m , а именно, нахождение оценок $\hat{\Theta}^m(t) \in \mathbb{R}^k$ свободных параметров Θ^m процесса X^m в виде решения следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M(t)} \left[\sum_{\{K > F_j(t)\}} \left(c_{mar}(K, T_j(t); t) - S' c^m\left(\frac{K}{S'}, T_j(t); \Theta^m\right) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{\{K \leq F_j(t)\}} \left(p_{mar}(K, T_j(t); t) - S' p^m\left(\frac{K}{S'}, T_j(t); \Theta^m\right) \right)^2 \right] \longrightarrow \min_{\Theta^m \in D}, \end{aligned}$$

где

t - выбранный для анализа момент времени,

$M(t)$ - общее количество различных сроков до исполнения торгуемых в момент времени t опционов,

$T_j(t)$ - j -ый по возрастанию срок до исполнения торгуемых в момент времени t опционов,

S' - эмпирическая цена базового актива в момент времени t ,

$c_{mar}(K, T; t)$ и $p_{mar}(K, T; t)$ - эмпирические цены опционов колл и пут (соответственно) с ценой исполнения K и сроком до исполнения T в момент времени t ,

$c^m(K, T; \Theta^m)$ и $p^m(K, T; \Theta^m)$ - "теоретические" цены опционов колл и пут (соответственно) с ценой исполнения K и сроком до исполнения T при значениях свободных параметров, равных Θ^m . Определяются из соотношения (2) при $W(S_T) \equiv \max(S_T - K, 0)$ для опциона колл и $W(S_T) \equiv \max(K - S_T, 0)$ для опциона пут, для процесса S вида (3),

$D \subseteq \mathbb{R}^k$ - область допустимых значений параметров Θ^m ,

$F_j(t)$ - форвардная цена базового актива с датой поставки $t + T_j(t)$ в момент времени t ²⁴.

²⁴Hull, J.C. Options, futures, and other derivatives. Prentice Hall, 2002.

Описанная процедура оценивания параметров модели является общепринятой в теории опционного моделирования²⁵.

2. Полученная на первом этапе метода оценка $\hat{\Theta}^m(t)$ параметров модели фиксируется, а в качестве свободных параметров рассматриваются сроки до исполнения торгуемых опционов²⁶:

$$\begin{aligned}\hat{T}^m(t) &\equiv \left(\hat{T}_j^m(t)\right)_{j=1}^{M(t)} = \arg \min_{0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{M(t)}} G(T_1, T_2, \dots, T_{M(t)}; t), \\ G(T_1, T_2, \dots, T_{M(t)}; t) &= \sum_{j=1}^{M(t)} \left[\sum_{\{K > F_j(t)\}} \left(c_{mar}(K, T_j(t); t) - S' c^m\left(\frac{K}{S'}, T_j; \hat{\Theta}^m(t)\right) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\{K \leq F_j(t)\}} \left(p_{mar}(K, T_j(t); t) - S' p^m\left(\frac{K}{S'}, T_j; \hat{\Theta}^m(t)\right) \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Несмотря на то, что оптимизация в данной задаче выполняется по открытому множеству $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{M(t)}$, минимум целевой функции в ней на практике всегда достигается, т.к. промежутки времени между "торгуемыми" сроками исполнения, как правило, относительно велики, а эмпирические опционные структуры имеют весьма специальный, "регулярный" вид.

Целью второго этапа, как и всего метода в целом, является выявление систематических закономерностей в ошибках, допускаемых моделями на основе процессов Леви без замены времени, с целью использования полученных результатов для построения новых, обоснованных моделей случайной замены времени.

Предложенный метод можно рассматривать как процедуру последовательной оценки параметров полупараметрической модели на основе процесса Леви с детерминированной заменой времени с процессом цены следующего вида:

$$S(u; t) = e^{(r-d)u} \exp \left[-\Psi_{X^m}(-i) \tilde{T}(u; t) + X^m \left(\tilde{T}(u; t) \right) \right], \quad u \in [0, T_{M(t)}(t)],$$

$$\tilde{T}(u; t) = \tilde{T}_j(t) + \frac{\tilde{T}_{j+1}(t) - \tilde{T}_j(t)}{T_{j+1}(t) - T_j(t)} (u - T_j(t)),$$

$$u \in (T_j(t), T_{j+1}(t)), \quad j = \overline{0, M(t) - 1},$$

где $T_0(t) \equiv \tilde{T}_j(t) \equiv 0$, а величины $0 < \tilde{T}_1(t) < \tilde{T}_2(t) < \dots < \tilde{T}_{M(t)}(t)$ являются свободными параметрами модели наряду с Θ^m . Результаты *одновременной* оценки всех параметров данной модели демонстрируют закономерности, аналогичные полученным при помощи вышеописанного двухшагового метода, однако

²⁵См., напр., Carr P., Wu L. The finite moment log stable process and option pricing // J. Finance, 2003, **58**, 2, p. 753-778.

²⁶Несмотря на то, что оптимизация в данной задаче выполняется по открытому множеству $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{M(t)}$, минимум целевой функции в ней на практике всегда достигается, т.к. промежутки времени между "торгуемыми" сроками исполнения, как правило, относительно велики, а эмпирические опционные структуры имеют весьма специальный, "регулярный" вид.

последний отличают большая наглядность и, как правило, значительно меньшая вычислительная сложность.

Оценку $\hat{T}^m(t)$ естественно называть полупараметрической (а описанный метод ее получения - полупараметрическим методом), поскольку данная оценка зависит от выбора вида базового процесса X^m , но не зависит от какой-либо параметрической спецификации процесса случайной замены времени.

Получаемые с помощью описанного метода результаты естественно рассматривать в терминах оценок "уровня деловой активности" вида

$$\hat{v}^m(u; t) = \frac{\hat{T}_{j+1}^m(t) - \hat{T}_j^m(t)}{T_{j+1}(t) - T_j(t)}, \quad u \in [T_j(t), T_{j+1}(t)), \quad j = \overline{0, M(t) - 1}.$$

Данные функции были вычислены на основе эмпирических цен опционов на индекс S&P500 для двенадцати различных дат (моментов времени t) и, с целью выявления наиболее общих закономерностей, для трех различных базовых процессов X^m , широко используемых в литературе по опционному моделированию: процесса Мертона, гамма-дисперсионного процесса и процесса

$$X_t^S \stackrel{def}{=} \sigma L_t^{\alpha, -1}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\sigma > 0$ и $(L_t^{\alpha, -1})_{t \geq 0}$ есть стандартное α -устойчивое движение Леви с показателем скошенности $\beta = -1$ ²⁷. Во всех 36 описанных случаях полученные результаты наглядно демонстрируют одну и ту же общую закономерность: ожидаемый в будущем уровень деловой активности является существенно (до двух раз) более высоким в ближайшие промежутки времени (измеряемые единицами суток и недель), нежели в более отдаленные, причем сходимость к долгосрочному среднему наступает на временном горизонте в 3-6 месяцев²⁸.

Данные результаты послужили толчком к построению и изучению новых опционных моделей на основании процессов случайной замены времени, не принадлежащих к классу несмещенных оценок календарного времени, т.е. процессов, удовлетворяющих соотношению $\mathbb{E}T(t) = t$, $t \in \mathbb{R}_+$, каковое соотношение, как правило, принималось в качестве естественной предпосылки в предшествующих работах.

В качестве одной из таких моделей была рассмотрена и исследована модель на основе следующего случайного процесса:

$$S^{IOU}(t) = e^{(r-d)t} \exp [\mu_{X^S} T^{IOU}(t) + X^S(T^{IOU}(t))], \quad (4)$$

$$X^S(t) = \sigma L_t^{\alpha, -1}, \quad (5)$$

$$T^{IOU}(t) = \int_0^t v^{IOU}(u) du, \quad (6)$$

²⁷Samorodnitsky G., Taqqu M. Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance. N.Y.: Chapman & Hall, 1994.

²⁸Данные результаты и возможные объяснения демонстрируемой ими закономерности приведены на с 36-37 диссертации.

$$v^{IOU}(t) = p + \xi_0 e^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k e^{-\gamma(t-t_k)}, \quad (7)$$

где

$N = (N_t)_{t \geq 0}$ - пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$;

$$\xi_0 \sim \Gamma\left(\frac{\lambda}{\gamma}, b\right) \iff f_{\xi_0}(x) = \begin{cases} \frac{b^{\frac{\lambda}{\gamma}}}{\Gamma(\frac{\lambda}{\gamma})} x^{\frac{\lambda}{\gamma}-1} e^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$t_k, k \in \mathbb{N}$ - точки скачков процесса N , упорядоченные по возрастанию;

$\xi_k, k \in \mathbb{N}$ - случайные величины с условными плотностями следующего вида:

$$f_{\xi_k}(x|t_k = t) = \begin{cases} be^{\theta t} \exp[-be^{\theta t} x], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$b > 0, \theta > 0$, при этом случайная величина ξ_0 не зависит от процесса N и случайных величин $\xi_k, k \in \mathbb{N}$, а случайные величины $\xi_k, k \in \mathbb{N}$, при фиксированной траектории процесса N независимы в совокупности;

$(L_t^{\alpha, -1})_{t \geq 0}$ - стандартное α -устойчивое движение Леви с показателем скошенности $\beta = -1$, независимое от процесса v^{IOU} ;

$$p > 0, \gamma > 0, \sigma > 0, 1 < \alpha < 2, \mu_{X^S} = \frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Определяемый соотношением (5) базовый процесс X^S был введен в практику опционного моделирования и изучен П. Карром и Л. Ву²⁹. Процесс же T^{IOU} , как и порождающий его процесс v^{IOU} , являются новыми; выбор процесса v^{IOU} в указанном виде обусловлен его экстремальными энтропийными свойствами, подробно рассмотренными на с. 39-40 диссертации. Как показывает предложение 1 диссертации, процесс v^{IOU} является решением *неоднородного негауссовского уравнения Орнштейна-Уленбека*³⁰, вследствие чего построенной модели был присвоен идентификатор LS-IOU (от "log-stable" - "лог-устойчивый" - по названию модели на основе процесса X^S без замены времени и "inhomogeneous Ornstein-Uhlenbeck [process]" - "неоднородный [процесс] Орнштейна-Уленбека").

Был получен ряд общих аналитических свойств процесса S^{IOU} , образующих его процессов v^{IOU} и T^{IOU} , а также процесса

$$s^{IOU} = (s_t^{IOU})_{t \geq 0} = (\ln S_t^{IOU})_{t \geq 0}, \quad (8)$$

устанавливаемых следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть случайные процессы (v_t^{IOU}) , (T_t^{IOU}) , (S_t^{IOU}) и (s_t^{IOU}) определены согласно соотношениям (4), (6), (7), (8). Тогда для любых $s \geq 0$ и $t \geq 0$ справедливы следующие соотношения:

²⁹Carr P., Wu L. The finite moment log stable process and option pricing // J. Finance, 2003, **58**, 2, p. 753-778.

³⁰Следует отметить, что *однородные* процессы Орнштейна-Уленбека были введены в опционное моделирование О. Барндорфф-Нильсеном и Н. Шепардом и сравнительно хорошо изучены (см. Barndorff-Nielsen O.E., Shepard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics // J. Royal Stat. Soc. B, 2001, **63**, 2, p. 167-241).

$$\begin{aligned}
1. \mathbb{E} v^{IOU}(t) &= \begin{cases} p + \frac{\lambda}{b\gamma} e^{-\gamma t} + \frac{\lambda e^{-\gamma t} (e^{(\gamma-\theta)t} - 1)}{(\gamma-\theta)b}, & \gamma \neq \theta, \\ p + \frac{\lambda}{b} e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{\gamma} + t \right), & \gamma = \theta. \end{cases} \\
2. cov(v^{IOU}(s), v^{IOU}(t)) &= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-(s+t)\gamma}}{b^2} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{e^{2(\gamma-\theta)v} - 1}{\gamma-\theta} \right], & \gamma \neq \theta, \\ \frac{\lambda e^{-(s+t)\gamma}}{b^2} \left[\frac{1}{\gamma} + 2v \right], & \gamma = \theta, \end{cases} \\
\text{где } v &= \min(s, t). \\
3. cov(v^{IOU}(s), T^{IOU}(t)) &= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\gamma s}}{\gamma b^2} \left(1 - e^{-\gamma t} + \frac{2(e^{(\gamma-2\theta)v} - 1)}{\gamma-2\theta} - e^{-\gamma t} \frac{e^{2(\gamma-\theta)v} - 1}{\gamma-\theta} \right), & \gamma \neq \theta, \gamma \neq 2\theta, \\ \frac{\lambda e^{-\gamma s}}{\gamma b^2} \left(1 - e^{-\gamma t} + \frac{2(e^{(\gamma-2\theta)v} - 1)}{\gamma-2\theta} - 2ve^{-\gamma t} \right), & \gamma = \theta, \\ \frac{\lambda e^{-\gamma s}}{\gamma b^2} \left(1 - e^{-\gamma t} + 2v - e^{-\gamma t} \frac{e^{2(\gamma-\theta)v} - 1}{\gamma-\theta} \right), & \gamma = 2\theta. \end{cases} \\
4. \mathbb{E} s^{IOU}(t) &= \begin{cases} (r-d)t + \frac{\lambda \sigma^\alpha}{\gamma b \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left(\frac{1-e^{-\theta t}}{\theta} + e^{-\gamma t} \frac{1-e^{(\theta-\gamma)t}}{\theta-\gamma} \right), & \gamma \neq \theta, \\ (r-d)t + \frac{\lambda t \sigma^\alpha}{\gamma b \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left(\frac{1-e^{-\theta t}}{\theta t} - e^{-\gamma t} \right), & \gamma = \theta. \end{cases} \\
\mathbb{E} (s^{IOU}(t))^k &= \infty, \quad k = 2, 3, \dots, \quad t \neq 0.
\end{aligned}$$

Следующие две теоремы в совокупности устанавливают еще одно важное аналитическое свойство процесса S^{IOU} , а именно, практически применимое представление цены европейского опциона "колл" в рамках модели LS-IOU, т.е. математического ожидания функционала от процесса S^{IOU} , определяемого соотношением (2).

Теорема 2. Пусть процесс (T_t^{IOU}) определен согласно соотношениям (6)-(7). Тогда при любом $t > 0$ преобразование Лапласа $L_{T^{IOU}(t)}(s)$ данного процесса сходится в области

$$D_t = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > -\frac{b\gamma}{1 - e^{-\gamma t}} \right\}$$

и при любом $s \in D_t$ справедливо следующее соотношение:

$$L_{T^{IOU}(t)}(s) = \exp(-spt) \left[1 + \frac{s(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma b} \right]^{-\frac{\lambda}{\gamma}} \exp[\lambda t (h(s, t) - 1)],$$

где

$$h(s, t) \equiv \int_0^1 \frac{dx}{1 + \frac{s}{\gamma b} e^{\theta t(x-1)} (1 - e^{-\gamma t x})}.$$

Теорема 3. Пусть $c^{IOU}(K, T)$ - цена европейского опциона "колл" с ценой исполнения $K = e^k$ и сроком до исполнения $T > 0$ в модели LS-IOU. Пусть β - произвольное число из интервала $(0, \tilde{\beta} - 1)$, где $\tilde{\beta}$ есть единственное неотрицательное решение уравнения

$$y^\alpha - y = -\frac{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}{\sigma^\alpha} \frac{b\gamma}{1 - e^{-\gamma T}}.$$

Тогда для величины $c^{IOU}(K, T)$ справедливо следующее соотношение:

$$c^{IOU}(K, T) = \frac{\exp(-\beta k)}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} \psi_T^{IOU}(v) dv,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_T^{IOU}(v) &= \frac{e^{-rT} \varphi_{s^{IOU}(T)}(v - (\beta + 1)i)}{\beta^2 + \beta - v^2 + i(2\beta + 1)v}, \\ \varphi_{s^{IOU}(T)}(u) &= \exp(iu(r - d)T) L_{T^{IOU}(T)}(-iu\mu^S - \Psi^S(u)), \\ \Psi^S(u) &= -\frac{(\sigma|u|)^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} e^{i\alpha \arg(iu)}. \end{aligned}$$

Доказательство последней из теорем основывается на методе обобщенных преобразований Фурье Карра-Мадана-Льюиса^{31,32}.

Статистическое тестирование модели LS-IOU по эмпирическим ценам опционов (с. 58-63) выявило следующее:

1) данная модель успешно объясняет обнаруженную при помощи вышеописанного метода оценивания процесса случайной замены времени эмпирическую закономерность, что одновременно верифицирует и модель, и метод;

2) данная модель превосходит ряд широко применяемых "эталонных" моделей по качеству приближения эмпирических опционных структур, как абсолютному, измеряемому среднеквадратической ошибкой модели на выбранную дату, так и относительному, принимающему во внимание число свободных параметров сравниваемых моделей.

Формальное сравнение предложенной модели с аналогами основывается на статистике отношения правдоподобия

$$\tilde{I}_0 = \frac{\ln \mathcal{L}_A(e_A; \Theta^A) - \ln \mathcal{L}_B(e_B; \Theta^B)}{\sqrt{N} \sigma_{AB}^2},$$

где

$$\mathcal{L}_A(e_A; \Theta^A) \equiv \prod_{k=1}^N f_A(e_{A,k}; \Theta^A)$$

и

$$\mathcal{L}_B(e_B; \Theta^B) \equiv \prod_{k=1}^N f_B(e_{B,k}; \Theta^B)$$

есть функции правдоподобия "ошибок измерения" сравниваемых моделей (обозначенных литерами А и В), N - количество "измерений" (т.е. опционов на рассматриваемую дату), а

$$\sigma_{AB}^2 \stackrel{def}{=} \mathbf{D} [\ln f_A(e_{A,1}; \Theta^A) - \ln f_B(e_{B,1}; \Theta^B)].$$

³¹Carr P., Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform // J. Comp. Finance, 1999, **2**, p. 61-73.

³²Lewis A. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes // Envision Financial Systems and OptionCity.net, 2001.

Как известно³³, при справедливости основной гипотезы H_0 :

$$\mathbb{E} [\ln f_A (e_{A,1}; \Theta^A) - \ln f_B (e_{B,1}; \Theta^B)] = 0,$$

т.е. при эквивалентности моделей в смысле правдоподобия, выполняется

$$\tilde{I}_0 \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad N \longrightarrow \infty.$$

Помимо статистики $\hat{I}_0$ (статистики $\tilde{I}_0$, модифицированной путем замены неизвестной величины σ_{AB}^2 на ее оценку $\hat{\sigma}_{AB}^2$):

$$\hat{I}_0 = \frac{\ln \mathcal{L}_A (e_A; \Theta^A) - \ln \mathcal{L}_B (e_B; \Theta^B)}{\sqrt{N} \hat{\sigma}_{AB}^2},$$

$$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{\sum_{k=1}^N \left(X_k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \right)^2}{N - 1},$$

$$X_k \stackrel{def}{=} \ln f_A (e_{A,k}; \Theta^A) - \ln f_B (e_{B,k}; \Theta^B), \quad k = \overline{1, N},$$

в проведенном анализе были использованы еще три статистики:

$$\hat{I}_1 = \frac{AIC_A - AIC_B}{\sqrt{N} \hat{\sigma}_{AB}^2}, \quad \hat{I}_2 = \frac{SIC_A - SIC_B}{\sqrt{N} \hat{\sigma}_{AB}^2}, \quad \hat{I}_3 = \frac{HQIC_A - HQIC_B}{\sqrt{N} \hat{\sigma}_{AB}^2},$$

где через AIC, SIC и HQIC обозначены информационные критерии Акаике, Шварца и Хэннана-Куинна соответственно. Данные статистики позволяют учесть разницу в количестве свободных параметров сравниваемых моделей.

В качестве эталонов для сравнения были взяты модели Блэка-Шоулза (BS)³⁴, Мертона (M)³⁵ и гамма-дисперсионная модель (VG)³⁶ - хорошо изученные и широко применяемые на практике модели, а также модель LS на основе процесса X^S без замены времени³⁷, обобщением которой является предложенная нами модель. Результаты вычисления вышеперечисленных статистик для модели LS-IOU в качестве модели А и каждой из эталонных моделей в качестве модели В наглядно представлены в нижеприведенной таблице.

	$\hat{I}_0$		$\hat{I}_1$		$\hat{I}_2$		$\hat{I}_3$	
BS	12	0	12	0	12	0	12	0
M	12	0	12	0	12	0	12	0
VG	12	0	12	0	12	0	12	0
LS	12	0	12	0	11	1	11	0

³³Vuong Q. Likelihood ratio rests for model selection and non-nested hypotheses // Econometrica, 1989, **57**, 2, p. 307-333.

³⁴Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy, 1973, **81**, 3, p. 637-654.

³⁵Merton R.C. Option pricing when underlying asset returns are discontinuous // J. Financial Economics, 1976, **3**, 1, p. 125-144.

³⁶Madan D., Carr P., Chang E. The Variance Gamma process and option pricing // Eur. Finance Rev., 1998, **2**, 1, p. 79-105.

³⁷Carr P., Wu L. The finite moment log stable process and option pricing // J. Finance, 2003, **58**, 2, p. 753-778.

В каждой двойной ячейке на пересечении строки, соответствующей некоторой эталонной модели, и столбца, соответствующего статистике $\hat{I}_i$, левое число равно количеству дат из рассматриваемого набора данных, когда гипотеза H_0 отвергается критерием на основе статистики $\hat{I}_i$ в пользу гипотезы H_1 :

$$\mathbb{E} [\ln f_A (e_{A,1}; \Theta^A) - \ln f_B (e_{B,1}; \Theta^B)] > 0,$$

при уровне значимости 0,01, а правое число - количеству дат, когда гипотеза H_0 отвергается критерием на основе статистики $\hat{I}_i$ в пользу гипотезы H_2 :

$$\mathbb{E} [\ln f_A (e_{A,1}; \Theta^A) - \ln f_B (e_{B,1}; \Theta^B)] < 0,$$

при том же уровне значимости³⁸. Как видно представленная модель практически полностью доминирует эталонные модели как по абсолютному, так и по относительному качеству приближения эмпирических опционных структур.

Модель LS-IOW отличается высокой "аналитичностью", высоким качеством приближения эмпирических опционных структур, а также реалистичностью процессов "деловой активности" v и цены базового актива S (что включает в себя не только соответствие описанной выше эмпирической закономерности, но и учет ряда характерных свойств поведения цен активов на практике - в первую очередь, явления кластеризации волатильности). Однако поскольку одним из важнейших с практической точки зрения свойств модели является малое количество ее свободных параметров, мы задались целью построить случайный процесс, реалистично описывающий поведение цен активов, модель на основе которого, при высокой степени "аналитичности" и качестве приближения эмпирических данных, характерных для модели LS-IOW, имела бы лишь четыре свободных параметра.

Результатом данного исследования (кратко описанного на с. 65-66) стала модель, процесс цены по "мартингальной" мере в которой имеет вид:

$$S^{EP}(t) = e^{(r-d)t} \exp [\mu_{X^S} T^{EP}(t) + X^S(T^{EP}(t))], \quad (9)$$

$$X^S(t) = \sigma L_t^{\alpha, -1},$$

$$T^{EP}(t) = \int_0^t v^{EP}(u) du, \quad (10)$$

$$v^{EP}(t) = p + qb^{N(t)}, \quad (11)$$

где $p > 0$, $q > 0$, $\sigma > 0$, $b \in (0, 1)$, $\alpha \in (1, 2)$, $\mu_{X^S} = \frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}$, $N = (N_t)_{t \geq 0}$ - пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, а $(L_t^{\alpha, -1})$ есть, как и прежде, стандартное α -устойчивое движение Леви с показателем скошенности $\beta = -1$ ³⁹. Несмотря на то, что формально число параметров данной модели равно шести, существенными из них являются лишь пять и, более того, их число может быть

³⁸Результаты для уровней значимости 0,05 и 0,1 демонстрируют аналогичные закономерности.

³⁹Замене времени в данной модели был присвоен идентификатор "EP" - от "exponential Poisson [process]" - "экспоненциально-пуассоновский [процесс]", по виду процесса v^{EP} , а модели в целом - идентификатор "LS-EP".

сведено к четырем без какого-либо существенного влияния на качество приближения эмпирических опционных структур (с. 78).

Следующая теорема, аналогичная теореме 1, устанавливает ряд аналитических свойств случайных процессов v^{EP} , T^{EP} , S^{EP} и

$$s^{EP} = (s_t^{EP})_{t \geq 0} = (\ln S_t)_{t \geq 0}. \quad (12)$$

Теорема 4. Пусть случайные процессы (v_t^{EP}) , (T_t^{EP}) , (S_t^{EP}) и (s_t^{EP}) определены согласно соотношениям (9)-(12). Тогда $\forall s \geq 0$, $\forall t \geq 0$ справедливы следующие соотношения:

1. $\mathbb{E} v^{EP}(t) = p + q e^{\lambda t(b-1)}$.
2. $\text{cov}(v^{EP}(s), v^{EP}(t)) = q^2 e^{\lambda(s+t)(b-1)} [e^{\lambda v(b-1)^2} - 1]$,
где $v = \min(s, t)$.
3. $\text{cov}(v^{EP}(s), T^{EP}(t)) = \begin{cases} q^2 \left[\left(\frac{t-s}{2} e^{\lambda(t-s)(b-1)} + \frac{t}{2} \right) e^{\lambda s(b^2-1)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{s}{2} - \frac{t}{2} (e^{\lambda t(b-1)} + 1) \right) e^{\lambda s(b-1)} \right], & s \leq t, \\ \frac{q^2 t e^{\lambda(s-t)(b-1)}}{2} [e^{\lambda t(b^2-1)} - e^{2\lambda t(b-1)}], & s > t. \end{cases}$
4. $\mathbb{E} s^{EP}(t) = (r - d)t + \frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} [pt + \frac{qt}{2} (e^{\lambda t(b-1)} + 1)]$.
- $\mathbb{E} (s^{EP}(t))^k = \infty$, $k = 2, 3, \dots$, $t \neq 0$.

Следующие две теоремы в совокупности устанавливают практически применимое представление для цены европейского опциона "колл" в рамках построенной модели - математического ожидания функционала от процесса S^{EP} , определяемого соотношением (2).

Теорема 5. Для любого $t \geq 0$ преобразование Лапласа

$$L_{T^{EP}(t)}(s) \equiv \mathbb{E} \exp(-s T^{EP}(t))$$

случайной величины $T^{EP}(t)$ сходится во всей комплексной плоскости и $\forall s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$, удовлетворяет следующему соотношению:

$$L_{T^{EP}(t)}(s) = e^{-(sp+\lambda)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} L_n(s),$$

где

$$L_n(s) = \begin{cases} e^{-qst}, & n = 0, \\ e^{-qstb^n} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \exp[-qst(1-b)b^{k-1}]}{qst(1-b)b^{k-1}}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 6. Пусть $c^{EP}(K, T)$ - цена европейского опциона "колл" с ценой исполнения $K = e^k$ и сроком до исполнения $T > 0$ в модели LS-EP. Тогда $\forall \beta > 0$ для величины $c^{EP}(K, T)$ справедливо следующее соотношение:

$$c^{EP}(K, T) = \frac{\exp(-\beta k)}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} \psi_T^{EP}(v) dv, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_T^{EP}(v) &= \frac{e^{-rT} \varphi_{s^{EP}(T)}(v - (\beta + 1)i)}{\beta^2 + \beta - v^2 + i(2\beta + 1)v}, \\ \varphi_{s^{EP}(T)}(u) &= \exp(iu(r - d)T) L_{T^{EP}(T)}(-iu\mu^S - \Psi^S(u)), \\ \Psi^S(u) &= -\frac{(\sigma|u|)^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} e^{i\alpha \arg(iu)}.\end{aligned}$$

Практическое применение полученных результатов связано с вычислением функционального ряда в выражении (13), для чего были получены следующие две оценки, позволяющие производить это вычисление с любой наперед заданной точностью.

Теорема 7. Пусть для некоторых $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$, $n^* \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \Gamma(n^*, C\lambda t) \left| \frac{L_{n^*}^*(s)}{C^{n^*}} \right| < \varepsilon e^{-C\lambda t}, \\ n^* \geq -\log_b(qt(1-b)|s|), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \\ C &= \sqrt{6}e.\end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{n=n^*}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} L_n(s) \right| \leq \varepsilon.$$

Теорема 8. Пусть для некоторых $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, $s \neq 0$, $n^* \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \Gamma(n^*, D\lambda t) \left| \frac{L_{n^*}^*(s)}{D^{n^*}} \right| < \varepsilon e^{-e\lambda t}, \\ n^* \geq -\log_b(qt(1-b)|s|), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \\ D &= e.\end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{n=n^*}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} L_n(s) \right| \leq \varepsilon.$$

Вторая из этих оценок является более сильной, однако заведомо справедлива лишь в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 0$, поэтому с целью эффективного применения этих оценок на практике был исследован вопрос и получено правило оптимального выбора из этих двух оценок при вычислении интеграла в выражении (14) (см. с. 76-77).

Статистический анализ, аналогичный описанному выше применительно к модели LS-IOU, выявил схожую с моделью LS-IOU степень превосходства модели LS-EP над эталонными моделями в плане относительного качества приближения эмпирических опционных структур; сравнение же двух представленных моделей между собой демонстрирует превосходство модели LS-EP, обусловленное, главным образом, меньшим числом свободных параметров.

Вторая глава диссертации посвящена стохастическим моделям рискованных облигаций, при этом основное внимание уделяется рынкам облигаций, обладающих кредитными рейтингами. Моделированию при этом подлежит процесс изменения кредитного рейтинга облигации, естественным математическим описанием которого является конечная цепь Маркова (заданная на удовлетворяющем обычным условиям стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ и согласованная с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), каждое из состояний которой соответствует определенному кредитному рейтингу.

При стандартных технических предположениях, изложенных во введении ко второй главе, выражение для цены рискованной облигации вида (2) (с поправкой на то, что базовой переменной в этом случае является кредитный рейтинг эмитента) принимает следующий вид:

$$\nu(t, T^*) = p(t, T^*) \left[1 - (1 - \delta) P_t^Q(\tau \leq T^*) \right],$$

где $\nu(t, T^*)$ есть цена рискованной облигации со сроком погашения T^* в момент времени t ⁴⁰, $p(t, T^*)$ - цена аналогичной безрисковой облигации, δ - "ставка возврата" по рискованной облигации, предполагаемая задаваемой внешним образом константой, а величина $P_t^Q(\tau \leq T^*)$ есть условная вероятность разорения эмитента облигации (описываемого марковским моментом τ) до момента погашения облигации T^* по сигма-алгебре $\mathcal{F}_t$ и по эквивалентной исходной мере P "мартингальной мере" Q .

Предлагаемые нами модели основываются на трех известных моделях из вышеописанного класса: модели Питербарга⁴¹, модели Джэрроу-Лэндо-Тернбулла⁴² и модели Лэндо⁴³. Первая из предлагаемых нами моделей, которую мы называем основной, является незначительной модификацией модели Питербарга (которая в авторском описании не вполне корректно определена) и строится следующим образом.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассматривается вспомогательная

⁴⁰Все рассматриваемые нами облигации предполагаются бескупонными и имеющими номинал, равный 100.

⁴¹Piterbarg V. Recovering risk-neutral Markov process of credit transitions from credit spreads and statistical information. Work. rep., NationsBank, 1999.

⁴²Jarrow R.A., Lando D., Turnbull S.M. A Markov model for the term structure of credit risk spreads // Rev. Financial Studies, 1997, 10, 2, p. 481-523.

⁴³Lando D. On Cox processes and credit risky securities // Rev. Derivatives Res., 1998, 2, 2-3, p. 99-120.

цепь Маркова $Y_b = (Y_b(t))_{t \geq 0}$, согласованная с полной непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$. Цепь Маркова $X = (X_b(t))_{t \geq 0}$, описывающая динамику изменения кредитного рейтинга эмитента, с n состояниями, каждое из которых соответствует своему кредитному рейтингу (при этом n -ное состояние, и только оно, соответствует состоянию банкротства и является поглощающим), задается в виде

$$X_b(t) \equiv Y_b(T(t)), \quad (15)$$

$$T(t) = \begin{cases} t_{i-1}^* + \frac{t_i^* - t_{i-1}^*}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1}), & t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = \overline{1, N}, \\ t_N^* + t - t_N, & t \in [t_N, +\infty), \end{cases} \quad (16)$$

где $t_0 = t_0^* = 0$, $\{t_i\}_{i=1}^N$ - множество сроков до погашения торгуемых в рассматриваемых момент времени (полагаемый нулевым) облигаций, а положительные величины $t_1^* < t_2^* < \dots < t_N^*$ - свободные параметры модели. При этом предполагается, что по мере P цепь X_b является однородной с инфинитезимальной матрицей Λ_X^P , а по эквивалентной "мартингальной" мере Q - неоднородной с инфинитезимальной матрицей

$$\Lambda^{X,Q}(t) = T'(t) \Lambda^{X,P}, \quad t \geq 0,$$

где функция $T'(t)$ в точках $t_0, t_1, \dots, t_N$ полагается доопределенной по непрерывности справа. При этом с целью сокращения числа свободных параметров модели на элементы матриц $\Lambda^{X,P}$ и $\Lambda^{X,Q}(t)$ накладывается дополнительное ограничение

$$\lambda_{ij}^{X,Q}(t) \equiv \lambda_{ij}^{X,P} = 0, \quad \{|i - j| > 1\} \cap \{j \neq n\},$$

обоснование которого приводится на с. 96-97 диссертации. В качестве основной фильтрации модели $\mathbb{F}$ выбирается фильтрация $\mathbb{G}_T = (\mathcal{G}_{T_t})_{t \geq 0}$.

Вычисление условной вероятности разорения эмитента с рейтингом i в момент времени $t \in [0, T^*]$ в основной модели не составляет труда:

$$P_t^Q(\tau \leq T^*) = [\exp[\Lambda^{X,P}(T(T^*) - T(t))]]_{in}.$$

Данная величина легко может быть вычислена при помощи стандартных численных алгоритмов, эффективно реализованных во многих языках программирования.

Описанная модель проста, отличается сравнительно высоким качеством приближения эмпирических временных структур⁴⁴ при малом количестве свободных параметров и высоко "аналитична", т.е. допускает эффективно вычисляемые на практике представления для цен рискованных облигаций. Тем не менее, ее критическим недостатком является независимость процессов изменения кредитных рейтингов различных эмитентов, каждый из которых описывается независимой копией цепи Маркова вида (15), между собой. Данный недостаток исправляет следующая модель (которую мы называем обобщенной), путем перехода от детерминированной замены времени в цепи Маркова к случайной.

⁴⁴См. с. 82.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ⁴⁵ рассматривается согласованная с полной непрерывной справа фильтрацией $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ однородная цепь Маркова $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с n состояниями, каждое из которых соответствует кредитному рейтингу с тем же номером (при этом n -ное состояние и только оно соответствует банкротству эмитента). Предполагается, что инфинитезимальная матрица Λ цепи X является матрицей простой структуры с сингулярным разложением

$$\Lambda = ADA^{-1}, \quad (17)$$

где $D = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \}$, $\lambda_n = 0$.

На основании введенной при построении основной модели функции $T(t)$, на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ рассматривается случайный процесс $\tilde{T} = (\tilde{T}_t)_{t \geq 0}$ следующего вида:

$$\tilde{T}_t = \int_0^t \frac{1 + \rho v(s)}{1 + \rho \eta} dT(s), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\rho > 0$, а $v = (v_t)_{t \geq 0}$ - процесс "квадратного корня" Феллера, т.е. сильное решение стохастического дифференциального уравнения

$$dv_t = \kappa(\eta - v_t)dt + \lambda\sqrt{v_t}dB_t,$$

$v(0) = \eta$, $\kappa > 0$, $\eta > 0$, $\lambda > 0$, $2\kappa\eta \geq \lambda^2$.

Процесс изменения кредитного рейтинга эмитента в основной модели задается в виде

$$X_g(t) \equiv X(\tilde{T}(t)), \quad t \geq 0.$$

Структура основной фильтрации модели $\mathbb{F}$ описана на с. 99-100 диссертации.

В случае, если эмитентов на рынке более одного, каждому из них соответствует независимая копия процесса X , а процесс $\tilde{T}$ является общим для всех эмитентов⁴⁶.

Построенная модель является принципиальным обобщением модели Лэндо, процесс изменения рейтинга эмитента в которой описывается при помощи процесса Кокса с процессом интенсивности, представляющим собой аффинный диффузионный процесс (с. 89-92). Особо отметим, что процесс случайной замены времени $\tilde{T}$ в обобщенной модели строится на основе функции $T(t)$, которая является, фактически, полупараметрической оценкой данного процесса на основании эмпирической временной структуры.

Основной результат второй главы диссертации устанавливает следующая теорема, где через T обозначен "существенный" временной горизонт модели t_N , а через τ , как и прежде, момент банкротства эмитента:

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 \mid X_g(t) = n \}.$$

⁴⁵Построение кредитного процесса в обобщенной модели осуществляется сразу по "мартингальной" мере Q .

⁴⁶Отметим, что такой подход не только позволяет учесть в модели зависимости между процессами изменения рейтингов различных эмитентов, но и напрямую отражает эмпирический феномен существенной зависимости интенсивностей "кредитных процессов" эмитентов от одного или нескольких общих "факторов банкротства".

Теорема 9. Для условной вероятности разорения к моменту времени T в обобщенной модели справедливо следующее соотношение:

$$P(\tau \leq T | X_g(0) = i) = \sum_{k=1}^n A_{ik} (A^{-1})_{kn} I_k,$$

$$I_k = \begin{cases} \exp\left(\frac{\lambda_k T(T)}{1+\rho\eta} - (A_1(0)\eta + B_1(0))\right), & \lambda_k \neq 0, \\ 1, & \lambda_k = 0, \end{cases}$$

где матрица A и величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ определены в соотношении (17), а функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$, определенные на отрезке $[t_0, t_1]$, вместе с функциями $A_2(t)$, $B_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, ..., $A_N(t)$, $B_N(t)$, $t \in [t_{N-1}, t_N]$, удовлетворяют в своих областях определения следующим соотношениям:

$$A_i(t) = \frac{v_i \exp((u_i V - v_i)t) - \frac{v_i - X_i V}{u_i - X_i} u_i \exp((u_i V - v_i)t_i)}{V \exp((u_i V - v_i)t) - \frac{v_i - X_i V}{u_i - X_i} \exp((u_i V - v_i)t_i)},$$

$$B_i(t) = \frac{\kappa\eta}{V} \left(\ln \left[V \exp((u_i V - v_i)t) - \frac{v_i - X_i V}{u_i - X_i} \exp((u_i V - v_i)t_i) \right] - \ln \frac{V u_i - v_i}{u_i - X_i} - (u_i V - v_i)t_i \right) + Y_i,$$

$i = \overline{1, N}$, где

$$X_i = A_{i+1}(t_i), \quad Y_i = B_{i+1}(t_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad X_N = Y_N = 0,$$

вместе с константами

$$V = \frac{\lambda^2}{2},$$

$$u_i = \frac{-2h_i}{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 2\lambda^2 h_i}},$$

$$v_i = \frac{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 2\lambda^2 h_i}}{2},$$

$$h_i = -\frac{\lambda_k \rho}{1 + \rho\eta} \frac{t_i^* - t_{i-1}^*}{t_i - t_{i-1}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Данная теорема легко может быть обобщена на случай произвольного срока погашения облигации $T^* \in [0, T]$; этот, более общий результат не приводится по причине его громоздкости.

Данная теорема выражает условную вероятность разорения эмитента до срока погашения облигации в элементарных функциях, что является как теоретически значимым результатом, так и критически важным с практической точки зрения свойством модели, позволяющем эффективно применять ее на практике.

Доказательство сформулированной теоремы основывается на следующей доказываемой нами версии формулы Фейнмана-Каца:

Лемма. Пусть $T > 0$. Предположим, что функции $f(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $k(t, x) : [0, T] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными и $f(x) \geq 0$, $x \in (0, +\infty)$. Предположим также, что функция $u(t, x) : [0, T] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $C^{1,2}([0, T] \times (0, +\infty))$, т.е. функции $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ определены и непрерывны на множестве $(0, T) \times (0, +\infty)$ и могут быть непрерывно продолжены в множество $[0, T] \times [0, +\infty)$. Предположим, что функция $u(t, x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2}\lambda^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \kappa(\eta - x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - k(t, x) u(t, x), \\ u(T, x) = f(x), \quad x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad (t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty),$$

и удовлетворяет условию полиномиального роста

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t, x)| \leq M \left(1 + \|x\|^{2\mu}\right), \quad x \in (0, +\infty),$$

при некоторых $M > 0$, $\mu \geq 1$. Тогда при $\forall (t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty)$

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[f(v_T) \exp \left(- \int_t^T k(s, v_s) ds \right) \right].$$

3 Список публикаций автора по теме диссертации

1. Малиновский С.В., Назаров Л.В. Марковская модель временной структуры рисков облигаций // Вестник Московского университета, серия 15 (Вычислительная математика и кибернетика), 2005, 3, с. 44-52.
2. Malinovskii S.V., Nazarov L.V. A Markov model for the term structure of risky bonds with dependent rating-migration processes // Journal of Mathematical Sciences, 2005, **146**, 4, p. 6022-6032.
3. Малиновский С.В., Назаров Л.В. Модели стохастической замены времени для опционов на основе полупараметрических оценок // Вестник Тверского государственного университета, серия: Прикладная математика, 2009, **8**, 1, с. 87-101.
4. Малиновский С.В. Модели случайной замены времени для финансовых инструментов на основании полупараметрических оценок // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" / Отв. ред. Алешковский И.А., Костылев П.Н., Андреев А.И. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2009. - [Адрес ресурса в сети интернет: <http://www.lomonosov-msu.ru/2009/>]. ISBN 978-5-317-02774-2.