

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Кафедра оптимального управления

На правах рукописи

ПОТАПОВ Михаил Михайлович

**Устойчивый метод решения линейных уравнений
с некомпактными операторами и его приложения к
задачам управления и наблюдения**

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор В.А. ИЛЬИН
доктор физико-математических наук,
профессор А.С. ЛЕОНОВ
доктор физико-математических наук,
доцент Ю.М. НЕЧЕПУРЕНКО

Ведущая организация: Институт Математики и Механики
УрО РАН, г. Екатеринбург

Защита состоится « 11 » ноября 2009 г. в 15.30 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43
доктор физико-математических наук,
профессор

Е.В. ЗАХАРОВ

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время приближенные методы решения операторных уравнений, как линейных, так и нелинейных, образуют весьма представительный и вполне сложившийся раздел современной вычислительной математики. основополагающий вклад в становление и развитие этих методов применительно к уравнениям с неточными данными внесли такие выдающиеся российские математики, как А.Н.Тихонов, М.М.Лаврентьев, В.К.Иванов (см. [С1]–[С3]). Впоследствии их ученики и последователи В.А.Морозов, А.Б.Бакушинский, В.В.Васин, А.В.Гончарский, В.А.Винокуров, А.С.Леонов, А.Г.Ягола, Г.М.Вайникко, В.Г.Романов, А.М.Федотов, Ф.П.Васильев, Ю.Л.Гапоненко, А.М.Денисов, А.Л.Агеев, С.Ф.Гилязов, М.Ю.Кокурин и др., а также зарубежные коллеги С.W.Gröetsch, Н.W.Engl, М.Hanke, А.Neu-bauer, детально проработали многие теоретические и практические аспекты данного научного направления и для случая линейных уравнений вывели технику построения устойчивых приближенных решений на очень высокий уровень. В частности, в [С4]–[С7] описаны и исследованы целые классы методов регуляризации, вырабатывающие устойчивые приближения к нормальному решению при условии согласования значений регуляризирующих параметров априорным или апостериорным способом с имеющейся информацией о приближенных данных. Тем не менее, даже в этой тщательно и продуктивно исследованной области еще остаются неизученные классы задач, один из которых и стал главным объектом исследования в данной диссертации.

Внешне эти задачи имеют традиционный вид уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

с линейным ограниченным оператором $A \in L(H \rightarrow F)$, действующим в вещественных сепарабельных гильбертовых пространствах H и F . Предполагается, что уравнение (1) имеет классическое решение, т.е. f принадлежит $R(A)$ – образу пространства H при отображении A . Решение может быть неединственным, поэтому для определенности ищется *нормальное* решение u_* , имеющее минимальную H -норму. Требуется построить устойчивые приближения к u_* в условиях, когда вместо точных исходных данных A и f фактически доступны лишь некоторые их приближения $\tilde{A} \in L(H \rightarrow F)$ и $\tilde{f} \in F$. Основные отличия постановки задачи (1) в настоящей диссертации от традиционной постановки заключаются в характере априорной информации об искомом решении u_* и приближенных данных \tilde{A} и \tilde{f} , при наличии которой задача должна быть решена. Обычно уравнение (1) решается в предположе-

нии выполнения следующих условий:

$$\|\tilde{A} - A\| \leq \eta, \quad \|\tilde{f} - f\| \leq \delta, \quad (2)$$

в которых помимо самих приближенных данных \tilde{A} и \tilde{f} должны быть известны и соответствующие им уровни погрешностей η и δ . В работе [С8] показано, что при отсутствии каких-либо дополнительных сведений об искомом решении u_* одних только приближенных данных \tilde{A} , \tilde{f} без информации об уровнях погрешностей η , δ недостаточно для построения устойчивых приближенных решений, разумеется, если исходная задача (1) изначально была некорректной.

Мы отказываемся от присутствующего в (2) условия равномерной близости операторов \tilde{A} и A , т.е. снимаем требование $\eta \rightarrow 0$. При этом не обязательно знать и величину η погрешности в операторе. Заметим, что при наличии априорной информации о мере аппроксимации η_* операторов на точном решении

$$\|\tilde{A}u_* - Au_*\| \leq \eta_* \quad (3)$$

в [С6, С9] показано, что сильные приближения к u_* могут быть построены и без условия (2) равномерной близости операторов с помощью обычных регуляризирующих процедур с априорным выбором параметра регуляризации. В [С10] в случае, когда наряду с (3) имеется дополнительная информация о сильной поточечной сходимости сопряженных операторов: $\tilde{A}^* \rightarrow A^*$, указаны способы построения устойчивых приближений к u_* с помощью как априорного, так и апостериорного выбора параметра регуляризации по методу невязки. Мы предлагаем другой метод регуляризации, использующий априорную информацию иного типа, отличную от традиционных условий (2) или условия (3).

Появление этого метода было стимулировано выполнением серии работ по конечномерной аппроксимации двойственных задач граничного и зонного управления и наблюдения системами, динамика которых описывалась пространственно-одномерным волновым уравнением [1]–[6]. Во всех этих задачах точные операторы A были линейными ограниченными, но *некомпактными*, а в роли \tilde{A} выступали их *конечномерные* приближения. Как известно [С11], в такой ситуации погрешность η в операторе в принципе не может стремиться к нулю, а от априорной информации типа (3) о величине η_* погрешности на неизвестном точном решении мы принципиально отказываемся. В перечисленных работах [1]–[6] фактически была доказана сильная сходимость приближенных решений только по невязке, но не по аргументам, в роли которых выступали, в частности, управления.

С аналогичными проблемами сталкивались и другие авторы [C12]–[C18]. Выявление причин, по которым применение к решению подобных *обратных* задач стандартных разностных, проекционно-разностных или полудискретных схем конечномерной аппроксимации, обладающих свойствами устойчивости и сходимости в *прямых* задачах, не гарантирует сходимости приближенных решений *обратных* к ним задач, сыграло важнейшую роль в поиске средств борьбы с такого рода неустойчивостями. Как выяснилось, основной причиной их возникновения при дискретизации непрерывных волновых процессов является появление среди дискретных решений волн, у которых при измельчении шагов сетки укорачиваются длины и замедляются скорости распространения. Достаточно подробные обсуждения этих «паразитных» явлений представлены в обзоре E.Zuazua [C16] и в книге R.Glowinski, J.L.Lions, J.W.He [C13]. Там же можно найти и описания приемов, которые использовались для подавления этих неустойчивостей: метода регуляризации А.Н.Тихонова, метода мультисеток, метода конечных элементов со смешанными базами, введения искусственной вязкости и прямой фильтрации высокочастотных гармоник. Несмотря на внешние различия в конструкциях фактически все эти подходы направлены на подавление вредных высокочастотных осцилляций, привносимых стандартными методами дискретизации. Из перечисленных регуляризирующих подходов самым универсальным, не привязанным к типу уравнений, является метод А.Н.Тихонова, однако обоснованное его применение в естественных классах управляемости сдерживается отсутствием у оператора A свойства компактности, а, значит, и отсутствием информации о скорости стремления к нулю погрешности η в условии (2). Для обоснованного применения остальных методов необходимо детально исследовать свойства (в основном, спектральные) дискретных моделей, чтобы затем использовать их для введения дополнительных сеток или дополнительных базисных функций, определения величины искусственной вязкости или нижней границы срезаемых частот. Кстати, такая информация может быть альтернативой для (2) с известным η при выборе в методе А.Н.Тихонова значения параметра регуляризации.

Суть наших предложений заключается в том, чтобы для дискретной аппроксимации *обратных* задач использовать любые схемы, подходящие для решения *прямых* задач, не подвергая их никакой дополнительной модификации, а с вызываемыми такой дискретизацией явлениями неустойчивости решений *обратных* задач бороться с помощью дополнительной информации об их точных решениях. Именно, предлагаемый нами метод решения уравнения (1) с неточными данными работает в предположении, что искомое точное

нормальное решение u_* истокопредставимо:

$$u_* = J_H A^* v_*, \quad v_* \in F^*, \quad \|v_*\|_{F^*} \leq r, \quad (4)$$

а величина r в (4), ограничивающая норму элемента-источника v_* , известна. В (4) $A^* \in L(F^* \rightarrow H^*)$ – оператор, сопряженный к A , действующий в сопряженных гильбертовых пространствах F^* и H^* , возможное отождествление которых по Риссу с основными пространствами F и H в общем случае не производится. В приложениях привилегия таких отождествлений обычно закрепляется только за обычными или весовыми пространствами Лебега L^2 интегрируемых с квадратом функций. По этой причине в (4) и присутствует явно оператор Рисса $J_H : H^* \rightarrow H$, устанавливающий соответствующий изоморфизм. Условия (2) равномерной операторной близости замещаются более слабыми условиями сильной поточечной сходимости операторов:

$$\|\tilde{A}u - Au\|_F \rightarrow 0 \quad \forall u \in H, \quad \|\tilde{A}^*v - A^*v\|_{H^*} \rightarrow 0 \quad \forall v \in F^*. \quad (5)$$

Правая часть уравнения (1) может быть известна приближенно:

$$\|\tilde{f} - f\|_F \rightarrow 0, \quad (6)$$

а уровень погрешности в (6) может оставаться неизвестным. В (5) предполагается, что оператор \tilde{A}^* , приближающий A^* , является сопряженным к $\tilde{A} : \tilde{A}^* = (\tilde{A})^*$. Заметим, что в отличие от случая равномерной близости, которая в силу равенства норм $\|\tilde{A} - A\| = \|\tilde{A}^* - A^*\|$ имеет место сразу для обоих взаимно сопряженных операторов, ни одно из двух условий поточечной сходимости в (5), вообще говоря, не следует из другого [С11].

При наличии информации (4)–(6) приближенные решения \tilde{u} уравнения (1) предлагается искать в истокообразном виде

$$\tilde{u} = J_H \tilde{A}^* v, \quad v \in F^*, \quad \|v\|_{F^*} \leq r, \quad (7)$$

со значением r , взятым из (4). Элементы-источники v в (7) выбираются из естественных соображений минимизации уклонения

$$\|\tilde{u} - u_*\|_H^2 \stackrel{(7)}{=} \|J_H \tilde{A}^* v - u_*\|_H^2 = \|J_H \tilde{A}^* v\|_H^2 - 2\langle J_H \tilde{A}^* v, u_* \rangle_H + \|u_*\|_H^2,$$

в котором последнее слагаемое от v не зависит, а сумма первых двух с помощью теоремы Рисса и транспонирования записывается в виде квадратичного функционала $\|\tilde{A}^* v\|_{H^*}^2 - 2\langle v, \tilde{A}u_* \rangle$. В силу (5) $\tilde{A}u_* \rightarrow Au_* \stackrel{(1)}{=} f$, поэтому с учетом (6) этот функционал будет близок к функционалу

$$I(v) = \|\tilde{A}^* v\|_{H^*}^2 - 2\langle \tilde{f}, v \rangle, \quad (8)$$

содержащему только реально доступные данные. Предлагаемый метод состоит в минимизации квадратичного функционала (8) на шаре $\|v\|_{F^*} \leq r$ радиуса r в пространстве F^* . По любому ε -приближенному решению этой задачи, т.е. по любому элементу \tilde{v} , удовлетворяющему условиям

$$\tilde{v} \in F^*, \quad \|\tilde{v}\|_{F^*} \leq r, \quad I(\tilde{v}) \leq \inf_{v \in F^*, \|v\|_{F^*} \leq r} I(v) + \varepsilon, \quad (9)$$

в соответствии с (7) определяется итоговое приближение $\tilde{u} = J_H \tilde{A}^* \tilde{v}$. Этот метод, который мы будем называть *вариационным*, впервые был предложен в работах [7]–[12], а в диссертации он представлен в форме, сложившейся под влиянием рассмотренных впоследствии приложений [13]–[28].

Априорная информация (4), имеющая принципиальное значение для возможности применения вариационного метода, доступна в случае, когда сопряженный оператор A^* непрерывно обратим на своем образе $R(A^*)$, т.е. имеет место оценка

$$\|A^*v\|_{H^*}^2 \geq \mu \|v\|_{F^*}^2 \quad \forall v \in F^*, \quad (10)$$

причем значение постоянной $\mu > 0$ в этой оценке должно быть известно. Тогда, если правая часть $f \in F$ уравнения (1) известна точно, то условие (4) будет выполняться со значениями $r \geq \frac{\|f\|_F}{\mu}$, а если вместо f известно некоторое приближение $\tilde{f} \in F$, то потребуется знание и соответствующего уровня погрешности: $\|\tilde{f} - f\|_F \leq \delta$. По данным \tilde{f} , δ определяется диапазон возможных значений параметра r :

$$r \geq \frac{\|\tilde{f}\|_F + \delta}{\mu}. \quad (11)$$

Разумеется, при практическом применении метода целесообразно выбирать значения r , близкие к нижней границе диапазона (11).

Условие (10) является хотя и весьма жестким, но все же не уникальным и выполняется, в частности, в задачах из работ [C12]–[C18], посвященных вычислениям. Правда, вычислительные процедуры в [C12]–[C18] организовывались по другим сценариям, в которых оценка (10) не использовалась. В главах 2–5 настоящей диссертации, посвященных приложениям вариационного метода к различным задачам управления и наблюдения для процессов колебаний, будет показано, что во всех этих приложениях оценка (10) выполняется на достаточно протяженных временных промежутках, и что важные для реализации метода значения параметра μ определяются конструктивно. Эти задачи управления и наблюдения будут записываться в форме взаимно сопряженных линейных операторных уравнений [C19] $Au = f$ и $A^*v = g$.

Уравнением $Au = f$ описывается задача отыскания управления u , переводящего систему в заданное целевое состояние f , а в форме сопряженного уравнения $A^*v = g$ записывается двойственная задача восстановления состояния v сопряженной системы по наблюдениям g за ее траекторией. Основными проблемами в задачах управления и наблюдения традиционно считаются проблемы *управляемости* и *наблюдаемости*. Под управляемостью обычно понимают возможность попадания в любую наперед заданную цель f , а под наблюдаемостью – единственность восстанавливаемого состояния v , порождающего наблюдаемый сигнал g . На операторном языке управляемость означает *существование* решения операторного уравнения $Au = f$ для любой правой части f или, другими словами, равенство $R(A) = F$. Наблюдаемость – это не что иное как *единственность* решения сопряженного уравнения $A^*v = g$ или тривиальность ядра сопряженного оператора: $N(A^*) = \{0\}$. Условие (10), являющееся основным инструментом определения важного для численных расчетов значения параметра r , влечет также и наличие обоих этих свойств: и наблюдаемости, и управляемости. Действительно, при выполнении неравенства (10) ядро сопряженного оператора тривиально: $N(A^*) = \{0\}$, что означает наблюдаемость, а его образ будет замкнут: $\overline{R(A^*)} = R(A^*)$. Тогда, как известно [С3], замкнутым будет и образ самого оператора A : $\overline{R(A)} = R(A)$, что с учетом ортогонального разложения $\overline{R(A)} \oplus N(A^*) = F$ означает равенство $R(A) = F$, т.е. наличие управляемости. По этим соображениям оценки типа (10) ниже называются *неравенствами наблюдаемости*.

Авторы, занимавшиеся проблемами управляемости и наблюдаемости (см. [С13, С16],[С20]–[С29]), обычно устанавливали сам факт наличия оценки (10) или искали наименьшее время T_* , начиная с которого, т.е. при $T > T_*$, постоянная μ становилась положительной, а оценка (10) – содержательной, и при этом не интересовались конкретными значениями μ , которые имеют первостепенное значение для численной реализации нашего вариационного метода. В связи с этим в диссертации в ряде случаев пришлось дорабатывать в конструктивном плане некоторые из неравенств наблюдаемости, полученных в [С13, С16],[С20]–[С29].

На наш взгляд, актуальность выбранной тематики обусловлена наличием реальной потребности в устойчивых методах численного решения различных уравнений в различных информационных условиях. Один из таких универсальных методов решения произвольных линейных уравнений при выполнении условий (4)–(6) предложен в диссертации. Полагая, что универсальность сама по себе является заслуживающим признания достоинством, мы сознательно воздерживаемся от каких-либо прямых сравнений нашего метода по точности, экономичности или другим критериям со специализированными

методами из [C12]–[C18], заранее признавая возможные преимущества последних по тем или иным показателям в тех конкретных задачах, на решение которых они и были ориентированы. В связи с этим в главе 6, посвященной численным экспериментам, прежде всего демонстрируются работоспособность вариационного метода и адекватность его результатов шагам сетки и уровню шума.

Цель диссертационной работы. Основными целями в диссертации являются:

1. Разработка устойчивого метода решения линейных уравнений в гильбертовых пространствах, подходящего для случая *неравномерных* возмущений в операторе, возникающих, например, при его конечномерной аппроксимации. Определение условий применимости метода, исследование свойств его сходимости и разработка вычислительного алгоритма для его практической реализации.

2. Применение данного метода к двойственным задачам управления и наблюдения для волнового уравнения и уравнения колебаний балки с переменными коэффициентами с целью построения сильно сходящихся приближенных решений. Вывод в случае их отсутствия конструктивных неравенств наблюдаемости (10) и развитие техники доказательства условий сильной поточечной сходимости (5).

3. Демонстрация практической работоспособности вариационного метода на одном из теоретически исследованных в диссертации приложений к задачам граничного Дирихле-управления для волнового уравнения.

Методы исследования. В диссертации использованы методы функционального анализа и теории операторов, методы математической физики для исследования свойств обобщенных решений уравнений с частными производными и энергетического оценивания самих решений и их производных вместе с терминальными и граничными следами. При построении конечномерных приближенных решений использовались методы конечно-разностной устойчивой аппроксимации слабых и сильных обобщенных решений соответствующих начально-краевых задач. Наконец, предложенный в работе вычислительный алгоритм итерационного типа сочетает в себе идеи метода Лагранжа из теории условной оптимизации с вычислительными методами линейной алгебры.

Научная новизна. Предложенный в работе вариационный метод является *новым методом регуляризации* линейных уравнений с истокорпредставимым нормальным решением и неточно заданным оператором, приближения к которому обладают свойством сильной *поточечной* сходимости. В работе

получен ряд новых неравенств наблюдаемости (10) с конструктивно определяемыми значениями постоянной μ и негрубыми значениями пороговых моментов управляемости-наблюдаемости для задач, двойственных к задачам с регулярными граничными управлениями в краевых условиях первого, второго и третьего рода и к задачам с регулярными зонными управлениями для волнового уравнения с переменными коэффициентами. При выводе этих неравенств наблюдаемости значительную роль сыграли предложенные автором разложения пространств целевых состояний в задачах управления в суммы специально подобранных подпространств, а также внесенные модификации в конструкцию мультипликатора. Определенную новизну несет в себе и развитая в диссертации техника построения конечномерных приближений к исходным непрерывным двойственным постановкам задач управления и наблюдения, сохраняющих отношение двойственности и обладающих нужными для применения вариационного метода свойствами сильной поточечной аппроксимации (5).

Практическая значимость. Результаты диссертации, представляющей собой теоретическое исследование, имеют широкие возможности практических приложений к задачам управления и наблюдения, а также к другим обратным задачам для линейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного типа. Некоторые из таких приложений подробно рассмотрены в самой диссертации в главах 2–5, но универсальность предлагаемого вариационного метода, пригодного для решения произвольных линейных уравнений в информационных условиях (4)–(6), потенциально расширяет область применимости далеко за пределы задач управления и наблюдения, на которых было сконцентрировано внимание в данной работе. Результаты диссертации могут также составить содержание отдельных специальных курсов лекций или отдельных разделов таких курсов для студентов факультетов физико-математического и естественно-научного профиля.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Предложен *вариационный метод* решения линейных уравнений в сепарабельных гильбертовых пространствах, устойчивый к *неравномерным* возмущениям оператора, характерным для конечномерных аппроксимаций некомпактных линейных отображений.
2. Разработан *конечношаговый алгоритм*, позволяющий решать с контролируемой точностью внутреннюю для вариационного метода задачу минимизации выпуклого квадратичного функционала на шаре методом итераций по множителю Лагранжа.

3. Для волнового уравнения и уравнения колебаний балки с переменными коэффициентами получен ряд *новых конструктивных неравенств наблюдаемости*. Эти неравенства содержат априорную информацию, необходимую для численного решения двойственных задач управления и наблюдения для таких уравнений с помощью предложенного в работе вариационного метода.
4. Для рассмотренных в работе двойственных задач граничного и зонного управления и наблюдения, описываемых уравнениями колебаний струны и балки, построены подчиняющиеся всем требованиям вариационного метода *конечномерные аппроксимации*, сохраняющие отношение двойственности, а также описаны процедуры численного решения этих задач вариационным методом, вырабатывающие *сильно сходящиеся* приближения.

Апробация работы. Все основные положения диссертации докладывались на различных международных и всероссийских конференциях, научных школах и семинарах, в том числе на международных конференциях, посвященных 90-летию и 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина в г.Москве (1998,2008), на международной конференции «Tikhonov and Contemporary Mathematics» в г.Москве (2006), на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г.Петровского в г.Москве (2007), на международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовниченко в г.Москве (2009), на всероссийских конференциях «Алгоритмический и численный анализ некорректных задач» в г.Екатеринбурге (1995,1998,2008), Воронежских математических школах «Понтрягинские чтения»(1994,2008), конференциях «Обратные и некорректно поставленные задачи» в МГУ им. М.В. Ломоносова (1995,1996,1998,2000), на российском симпозиуме с международным участием «Управление упругими колебаниями» в г.Переславле-Залесском (2006), а также многократно на Ломоносовских и Тихоновских чтениях в МГУ им. М.В. Ломоносова; на научно-исследовательских семинарах кафедры оптимального управления и кафедры математической физики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, на научно-исследовательских семинарах под руководством проф. А.Г.Яголы, проф. А.Б.Бакушинского, проф. А.В.Тихонравова (НИВЦ МГУ), под руководством проф. Г.М.Кобелькова, проф. В.И.Лебедева, проф. А.В.Фурсикова (Институт вычислительной математики РАН), под руководством проф. А.И.Прилепко (мехмат МГУ).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в **28** ра-

ботах [1]–[28], из них **12** – в изданиях, рекомендованных ВАК: [1, 3, 6, 9, 12],[14]–[16], [18]–[20],[22] и одна [21] – в рецензируемом журнале. Из **13** журнальных публикаций **10** выполнены без соавторов. Две статьи с соавторами [1, 3], выполненные на начальном этапе исследований, сыграли важную роль в развитии техники доказательства сильной поточечной сходимости (5) по значениям операторов и стимулировали разработку вариационного метода, обеспечивающего сходимость по их аргументам. В статье [14] соавтором являлась аспирантка, выполнявшая техническую часть работы под руководством автора данной диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и шести глав. Главы разбиты на параграфы, параграфы – на пункты. Нумерация теорем, лемм, и замечаний – двойная, сквозная внутри каждой главы. Нумерация формул – тройная, сквозная внутри каждого параграфа. Та же нумерация, за исключением формул, сохранена и в автореферате. Список литературы содержит **235** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, дан краткий обзор современного состояния области исследования, сформулированы основные цели работы, кратко изложено ее содержание, приведены полученные в ней результаты, являющиеся по мнению автора новыми в научном плане, и проведено обсуждение их практической значимости.

В **главе 1** в § 1.1 представлен центральный результат диссертации – вариационный метод и приведено доказательство его сходимости. Этот метод применяется к линейным уравнениям (1) при условиях (4)–(6) и по существу уже описан в (7)–(9). Следуя тексту диссертации, внесем лишь одно изменение в область вариации элементов-источников v , которая в предварительном описании (7)–(9) совпадала со всем сопряженным пространством F^* . Приложения подсказывают, что разумнее сузить эту область до риссовского прообраза \tilde{F}^* некоторого (на практике конечномерного) подпространства \tilde{F} пространства F , содержащего образ приближенного оператора:

$$\tilde{F}^* = J_F^{-1}(\tilde{F}), \quad \text{где } R(\tilde{A}) \subset \tilde{F} \subset F,$$

и уже в \tilde{F}^* выделить шар $B(r)$ радиуса r :

$$B(r) = \{v \in \tilde{F}^* \mid \|v\|_{F^*} \leq r\}. \quad (12)$$

Приближения \tilde{u} к нормальному решению u_* уравнения (1) будем искать в истокообразном виде

$$\tilde{u} = J_H \tilde{A}^* \tilde{v}, \quad \tilde{v} \in B(r), \quad (13)$$

а элементы-источники \tilde{v} в (13) должны быть ε -оптимальными решениями следующей квадратичной задачи минимизации на шаре $B(r)$:

$$\tilde{v} \in B(r), \quad I(\tilde{v}) \leq \min_{v \in B(r)} I(v) + \varepsilon, \quad I(v) = \|\tilde{A}^*v\|_{H^*}^2 - 2\langle \tilde{f}, v \rangle. \quad (14)$$

Теорема 1.1. [9, 12] Пусть выполняется условие истокопредставимости (4) и приближения \tilde{u} выбираются по правилам (12)–(14). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|\tilde{u} - u_*\|_H^2 \leq (\|\tilde{A}^*v_*\|_{H^*}^2 - \|A^*v_*\|_{H^*}^2) + 2r \left(3\|Au_* - \tilde{A}u_*\|_F + 2\|\tilde{f} - f\|_F \right) + \varepsilon. \quad (15)$$

Если $\varepsilon \rightarrow 0$ и приближенные данные \tilde{A} , \tilde{A}^* , \tilde{f} удовлетворяют условиям аппроксимации (5), (6), то из (15) следует сильная сходимость

$$\|\tilde{u} - u_*\|_H \rightarrow 0. \quad (16)$$

Замечание 1.1. Как видно из оценки (15), сильная сходимость (16) получается и в случае, когда аппроксимационные условия (5) выполняются не всюду на H и F^* , а только на точном нормальном решении u_* и его источнике v_* . Однако ввиду того, что оба этих элемента *неизвестны*, мы предпочитаем сохранить запись этих условий в формально более сильном, но зато и более реалистичном виде (5).

Замечание 1.2. Соображения, приводящие к конструкции квадратичного функционала вида (8) указывают на тесную связь предложенного вариационного метода (12)–(14) решения уравнения (1) с методом квазирешений В.К.Иванова [СЗ] для сопряженного уравнения $A^*v = u_*$, правда, в не совсем стандартной ситуации, поскольку правая часть u_* этого уравнения сама является неизвестной.

Замечание 1.4. При наличии неравенства наблюдаемости (10) с известной постоянной $\mu > 0$ вариационный метод можно применять и к сопряженному уравнению $A^*v = g$. Дело в том, что из неравенства наблюдаемости (10) в предположении существования решения v следуют единственность этого решения, его истокопредставимость и оценка для нормы источника: $v = J_F^{-1}Au_*$, $\|u_*\|_H \leq \frac{\|g\|_{H^*}}{\mu}$, что позволяет определять значение радиуса шара r в случае приближенно заданной правой части g : если $\tilde{g} \in H^*$, $\|\tilde{g} - g\|_{H^*} \leq \delta$, то $r \geq \frac{\|\tilde{g}\|_{H^*} + \delta}{\mu}$.

Выпуклая задача квадратичной минимизации (12)–(14) может быть решена различными методами за конечное число шагов, количество которых можно рассчитать заранее по заданному в (14) уровню точности ε . В частности, для этих целей подходит стандартный метод проекции градиента [СЗ0], однако при численных расчетах мы использовали другой, на наш взгляд, более эффективный и экономичный метод итерационного типа, предложенный в [12] и описанный в § 1.2. Этот метод основан на правиле множителей Лагранжа и на важном свойстве непрерывной монотонной зависимости от λ норм

$\|\tilde{v}(\lambda)\|_{F^*}$ элементов $\tilde{v}(\lambda)$, являющихся единственными решениями уравнения Эйлера для функции Лагранжа $I(v) + \lambda(\|v\|_{F^*}^2 - r^2)$ при каждом фиксированном $\lambda > 0$:

$$\left(J_F^{-1} \tilde{A} J_H \tilde{A}^* + \lambda I \right) v = J_F^{-1} \tilde{Q} \tilde{f}, \quad v \in F^*, \quad \lambda > 0, \quad (17)$$

где $\tilde{Q} : F \rightarrow \tilde{F}$ – оператор ортогонального проектирования.

Алгоритм

Шаг 1. Выбираются два параметра $\tilde{\lambda}_0 > 0$ и $\tilde{\varepsilon} > 0$ (теоретически оба они должны стремиться к нулю).

Шаг 2. Полагаем в уравнении (17) $\lambda = \tilde{\lambda}_0$ и находим его решение $\tilde{v}_0 = \tilde{v}(\tilde{\lambda}_0)$. Если $\|\tilde{v}_0\|_{F^*} \leq r + \tilde{\varepsilon}$, то на выход алгоритма подаем элемент $\tilde{v} = \tilde{v}_0$ и останавливаем вычисления.

Шаг 3. Если $\|\tilde{v}_0\|_{F^*} > r + \tilde{\varepsilon}$, то итерационным методом (дихотомии, Ньютона или др.) находим некоторое $\lambda > \lambda_0$ из условий:

$$r - \tilde{\varepsilon} \leq \|\tilde{v}(\lambda)\|_{F^*} \leq r + \tilde{\varepsilon}.$$

Затем находим соответствующее этому λ решение $\tilde{v} = \tilde{v}(\lambda)$ уравнения (17) и останавливаем алгоритм.

Гарантированная оценка погрешности ε в (14) через параметры $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\varepsilon}$ описанного алгоритма была получена в [12]. В диссертации в теореме 1.2 выводится усовершенствованный вариант этой оценки:

$$\varepsilon \leq \max \left\{ 2r^2 \tilde{\lambda}_0, \frac{4r(\|\tilde{A}\|^2 r + \|\tilde{f}\|_F)}{r - \tilde{\varepsilon}} \tilde{\varepsilon} \right\}. \quad (18)$$

Из (18) видно, что ε -погрешность в (14) имеет тот же порядок малости, что и параметры алгоритма $\tilde{\lambda}_0$ и $\tilde{\varepsilon}$.

В § 1.3 излагается математический аппарат, используемый в главах 2–4 при выводе конструктивных неравенств наблюдаемости (10). За основу берутся банаховы конструкции для сумм $X + Y$ и пересечений $X \cap Y$ пространств X, Y из [С31] и модифицируются для того, чтобы в случае гильбертовых пространств X, Y их сумма $X + Y$ и пересечение $X \cap Y$ оставались гильбертовыми. Пусть H – гильбертово пространство, отождествленное по Риссу со своим сопряженным, а X, Y – гильбертовы пространства, каждое из которых непрерывно и всюду плотно вкладывается в H . В таком случае организуются обычные канонические вложения [С32]:

$$X \subset H \simeq H^* \subset X^*, \quad Y \subset H \simeq H^* \subset Y^*. \quad (19)$$

Определение 1. Пересечением $X \cap Y$ называется гильбертово пространство, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно и X и Y ; скалярное произведение в $X \cap Y$ определяется по правилу

$$\langle f, g \rangle_{X \cap Y} = \frac{1}{2} \langle f, g \rangle_X + \frac{1}{2} \langle f, g \rangle_Y \quad \forall f, g \in X \cap Y. \quad (20)$$

Определение 2. Суммой $X + Y$ называется гильбертово пространство, состоящее из элементов $z \in H$, представимых в виде $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$. Скалярное произведение в $X + Y$ вводится по правилу

$$\langle z^1, z^2 \rangle_{X+Y} = 2 \langle x_*^1, x_*^2 \rangle_X + 2 \langle y_*^1, y_*^2 \rangle_Y \quad \forall z^1, z^2 \in X + Y, \quad (21)$$

где $x_*^i \in X$, $y_*^i \in Y$, $i = 1, 2$, – единственные решения следующей задачи квадратичной минимизации с линейным ограничением:

$$\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \rightarrow \inf, \quad x \in X, y \in Y, \quad x + y = z,$$

соответствующие значениям $z = z^i$, $i = 1, 2$.

Нормировочные множители в (20) и в (21) выбраны с таким расчетом, чтобы в случае совпадения пространств $X = Y$ совпадали бы и нормы: $\|f\|_{X \cap X} = \|f\|_X$, $\|z\|_{X+X} = \|z\|_X$. В случае гильбертовых пространств со скалярными произведениями (20),(21) справедливо следующее отношение двойственности, аналогичное [С31].

Теорема 1.3. Пусть X, Y, H – гильбертовы пространства, для которых имеют место непрерывные и всюду плотные вложения (19). Тогда справедливо равенство $(X + Y)^* = X^* \cap Y^*$, понимаемое в смысле полного изоморфизма гильбертовых пространств.

В следующей теореме устанавливается связь между операторами Рисса $J_X : X^* \rightarrow X$, $J_Y : Y^* \rightarrow Y$ и $J_{X+Y} : (X + Y)^* \rightarrow X + Y$.

Теорема 1.4. Пусть выполняются условия теоремы 1.3. Тогда

$$J_{X+Y} = \frac{1}{2}(J_X + J_Y).$$

Далее описываются два варианта разложений в сумму конкретного функционального пространства $H^1(0, l)$, которые используются в следующих главах при рассмотрении задач с граничными и зонными управлениями и наблюдениями для волнового уравнения. Роль базового гильбертова пространства H будет играть пространство $L_\rho^2(0, l)$ измеримых интегрируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $x \in [0, l]$ функций со скалярным произведением $\langle f, g \rangle_{L_\rho^2(0, l)} = \int_0^l \rho(x) f(x) g(x) dx$, в котором весовая функция $\rho(x) \in$

$C^1[0, l]$, $\rho(x) > 0$. Пространство $L^2_\rho(0, l)$ и сопряженное к нему пространство $(L^2_\rho(0, l))^*$ будем отождествлять по Риссу: $(L^2_\rho(0, l))^* \simeq L^2_\rho(0, l)$. Под $H^1(0, l)$ понимается соболевское пространство $H^1(0, l) = \{f(x) \in L^2(0, l) \mid f'(x) \in L^2(0, l)\}$. В первом разложении в роли X и Y будут выступать подпространства $X = H^1(\overset{\circ}{0}, l) = \{f(x) \in H^1(0, l) \mid f(0) = 0\}$, $Y = H^1(0, \overset{\circ}{l}) = \{f(x) \in H^1(0, l) \mid f(l) = 0\}$, наделенные одинаковыми скалярными произведениями

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\overset{\circ}{0}, l)} = \langle f, g \rangle_{H^1(0, \overset{\circ}{l})} = \int_0^l k(x) f'(x) g'(x) dx \quad (22)$$

с весовой функцией $k(x) \in C^1[0, l]$, $k(x) > 0$. Оба пространства $H^1(\overset{\circ}{0}, l)$ и $H^1(0, \overset{\circ}{l})$ являются гильбертовыми, каждое из них непрерывно и всюду плотно вкладывается в $L^2_\rho(0, l)$ и

$$H^1(0, l) = H^1(\overset{\circ}{0}, l) + H^1(0, \overset{\circ}{l}). \quad (23)$$

Из теоремы 1.3 следует отношение двойственности

$$(H^1(0, l))^* = (H^1(\overset{\circ}{0}, l) + H^1(0, \overset{\circ}{l}))^* = (H^1(\overset{\circ}{0}, l))^* \cap (H^1(0, \overset{\circ}{l}))^*. \quad (24)$$

В теореме 1.5 приведен вид скалярного произведения в пространстве $H^1(0, l)$, индуцированного разложением (23).

Второе из нужных нам разложений строится следующим образом. По произвольному разбиению отрезка $[0, l]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$ на n частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, определяются два подпространства $\overset{\circ}{H}^1_{even}(0, l) = \{f(x) \in H^1(0, l) \mid f(x_{2i}) = 0, 0 \leq 2i \leq n\}$, $\overset{\circ}{H}^1_{odd}(0, l) = \{f(x) \in H^1(0, l) \mid f(x_{2i-1}) = 0, 1 \leq 2i-1 \leq n\}$, наделенные одинаковыми скалярными произведениями $\langle f, g \rangle_{\overset{\circ}{H}^1_{even}(0, l)} = \langle f, g \rangle_{\overset{\circ}{H}^1_{odd}(0, l)} = \int_0^l k(x) f'(x) g'(x) dx$. Оба они будут гильбертовыми, причем

$$H^1(0, l) = \overset{\circ}{H}^1_{even}(0, l) + \overset{\circ}{H}^1_{odd}(0, l), \quad (25)$$

а тогда по теореме 1.3

$$\left(\overset{\circ}{H}^1_{even}(0, l) + \overset{\circ}{H}^1_{odd}(0, l) \right)^* = \left(\overset{\circ}{H}^1_{even}(0, l) \right)^* \cap \left(\overset{\circ}{H}^1_{odd}(0, l) \right)^*.$$

Теорема 1.6. *Скалярное произведение в пространстве $H^1(0, l)$, индуцированное разложением (25), вычисляется по правилу*

$$\langle f, g \rangle_{H^1(0, l)} = \int_0^l k(x) f'(x) g'(x) dx + \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_{i-1})+f(x_i))(g(x_{i-1})+g(x_i))}{K(x_i)-K(x_{i-1})}, \quad K(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)}.$$

Результаты первой главы, относящиеся к вариационному методу, опубликованы в [7]–[12]. Свойства разложений (23),(25) использовались в [16]–[28].

В **главе 2** рассматриваются приложения вариационного метода к задачам Дирихле-управления и двойственным к ним задачам Нейман-наблюдения для волнового уравнения с переменными коэффициентами. Именно с этих задач в [1] начались попытки автора построить устойчивый вычислительный алгоритм для отыскания их приближенных решений, которые привели к появлению вариационного метода. Материалы, представленные в первых двух параграфах главы 2, являются модифицированной и более подробной версией, первоначально изложенной в [9]. Третий параграф посвящен случаю более регулярных граничных управлений и написан по материалам авторских публикаций [16]–[18],[21, 23]. В § 2.4 рассматриваются задачи граничного Дирихле-управления с так называемыми частичными целями, когда в целевой паре $f = (f^0(x), f^1(x))$ задается только одна из компонент: либо терминальное состояние $f^0(x)$, либо терминальная скорость $f^1(x)$, а вторая компонента может оставаться произвольной.

Задача с двусторонними Дирихле-управлениями имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(x) y_{tt} &= (k(x) y_x)_x, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ y|_{x=0} &= u_0(t), \quad y|_{x=l} = u_1(t), & 0 < t < T, & \\ y|_{t=0} &= 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < l. & \end{aligned} \quad (26)$$

Значения $T > 0$, $l > 0$ и коэффициенты уравнения $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$, $\rho(x), k(x) \in C^1[0, l]$, предполагаются заданными. Требуется выбором граничных управлений $u = u(t) = (u_0(t), u_1(t))$ перевести систему (26) в заданное целевое состояние $f = f(x) = (f^0(x), f^1(x))$:

$$y|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \quad (27)$$

В двойственной задаче наблюдения фазовая траектория $p = p(t, x)$ является решением того же дифференциального уравнения с обратным течением времени и однородными граничными условиями того же типа:

$$\begin{aligned} \rho(x) p_{tt} &= (k(x) p_x)_x, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ p|_{x=0} &= 0, \quad p|_{x=l} = 0, & 0 < t < T, & \\ p|_{t=T} &= v^0(x), \quad y_t|_{t=T} = -v^1(x), & 0 < x < l. & \end{aligned} \quad (28)$$

Объектом наблюдения являются граничные значения производных по x :

$$g_0(t) = k p_x|_{x=0}, \quad g_1(t) = -k p_x|_{x=l}, \quad 0 < t < T, \quad (29)$$

а целью наблюдения – восстановление конечного состояния $v = v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ процесса (28) по дополнительной информации (29) о значениях функций $g = g(t) = (g_0(t), g_1(t))$.

Задачи управления (26),(27) и наблюдения (28),(29) записываются в форме взаимно сопряженных уравнений с линейными ограниченными операторами, действующими в сопряженных гильбертовых пространствах:

$$Au = f, \quad A \in L(H \rightarrow F), \quad Au = (y(T, x), y_t(T, x)), \quad (30)$$

$$A^*v = g, \quad A^* \in L(F^* \rightarrow H^*), \quad A^*v = (k(0) p_x(t, 0), -k(l) p_x(t, l)). \quad (31)$$

Здесь $H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$, $F = L^2_\rho(0, l) \times H^{-1}(0, l)$, где $H^{-1}(0, l) = (H^1_0(0, l))^*$ – пространство, сопряженное к пространству Соболева

$$H^1_0(0, l) = \{f(x) \in L^2_\rho(0, l) \mid \exists f'(x) \in L^2_\rho(0, l), f(0) = 0, f(l) = 0\},$$

наделенному скалярным произведением вида (22). Пространства $L^2(0, T)$ и $L^2_\rho(0, l)$ отождествляются по Риссу со своими сопряженными, а для пространств $H^1_0(0, l)$ и $H^{-1}(0, l)$ организуется обычное вложение [С32] $H^1_0(0, l) \subset L^2_\rho(0, l) \simeq (L^2_\rho(0, l))^* \subset H^{-1}(0, l)$. При этом восстанавливаемые состояния v и наблюдаемые сигналы g в задаче (28),(29) окажутся элементами пространств $F^* = H^1_0(0, l) \times L^2_\rho(0, l)$ и $H^* = H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$. Сведения о свойствах слабых и сильных обобщенных решений дифференциальных задач (26) и (28), подтверждающие корректность определений (30),(31), взяты из [С33]–[С36]. В случае уравнений с постоянными коэффициентами задачи управления и наблюдения могут быть решены аналитически в различных функциональных классах. В этом направлении в последнее время большую и плодотворную работу выполнили В.А.Ильин, Е.И.Моисеев, Л.Н.Знаменская и др. (см. [С37]–[С39] и цитированную там литературу); при этом во многих случаях были получены исчерпывающие результаты. Для рассматриваемого в диссертации случая переменных коэффициентов подобные аналитические конструкции вряд ли возможны и вместо них предлагаются приближенные решения, построенные с помощью вариационного метода (12)–(14). Его применение требует знания радиуса r шара $B(r)$, а основным источником такой информации является неравенство наблюдаемости (10). Оценка типа (10) несложно получается с помощью техники, предложенной Л.Ф.Но в [С24] для задач с пространственно-локализованными (зонными) управлениями. Здесь мы приводим эту оценку прежде всего с целью предъявления явного значения постоянной μ и без претензий на новизну, хотя, с другой стороны, не располагаем сведениями об источниках, в которых мог бы содержаться такой результат.

Возьмем точку $\xi \in [0, l]$ и введем мультипликатор $m(x) = m(x, \xi)$:

$$\begin{aligned} m'(x) &= 1 + a(x)m(x), \quad 0 < x < l, \quad m(\xi) = 0, \\ a(x) &= \min \left\{ -\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}, \frac{k'(x)}{k(x)} \right\} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \xi, \\ a(x) &= \max \left\{ -\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}, \frac{k'(x)}{k(x)} \right\} \quad \text{при } \xi \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (32)$$

Дифференциальную задачу (32) можно решить аналитически:

$$m(x) = m(x, \xi) = \int_{\xi}^x \exp \left(\int_s^x a(\eta) d\eta \right) ds. \quad (33)$$

Обозначим через $T_*(\xi)$ величину

$$T_*(\xi) = 2 \max_{0 \leq x \leq l} \left(|m(x, \xi)| \sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}} \right), \quad (34)$$

и положим

$$\xi_* = \operatorname{argmin}_{\xi \in [0, l]} T_*(\xi), \quad T_* = T_*(\xi_*), \quad m_*(x) = m(x, \xi_*). \quad (35)$$

Значение T_* играет роль порогового момента, начиная с которого, т.е. при $T > T_*$ у систем (26),(27) и (28),(29) появляются свойства управляемости и наблюдаемости.

Теорема 2.1. Пусть значение порогового момента T_* определено в (35). Тогда для решения p сопряженной задачи (28) при $T > T_*$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|A^*v\|_{H^*}^2 &= \int_0^T (|k(0)p_x(t, 0)|^2 + |k(l)p_x(t, l)|^2) dt \geq \\ &\geq \mu \int_0^l (k(x)|(v^0)'(x)|^2 + \rho(x)|v^1(x)|^2) dx = \mu \|v\|_{F^*}^2 \\ \forall v &= (v^0(x), v^1(x)) \in H_0^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\text{где } \mu = \frac{T-T_*}{M}, \quad M = \max \left\{ \frac{|m_*(0)|}{k(0)}, \frac{|m_*(l)|}{k(l)} \right\}.$$

Замечание 2.1. Если коэффициенты дифференциального уравнения постоянны: $\rho(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$, то $\xi_* = l/2$, $m_*(x) = x - l/2$, $M = |m_*(0)| = m_*(l) = l/2$, и пороговый момент управляемости-наблюдаемости будет равен своему оптимальному значению $T_* = l$, а постоянная μ из оценки (36) будет равна

$$\mu = \frac{2(T-l)}{l}. \quad (37)$$

Из (32)–(36) видно, что и в случае переменных коэффициентов значение μ может быть найдено конструктивно: либо аналитически, либо численно.

В случае односторонних управлений $u = u_0(t) \in H = L^2(0, T)$, когда правый конец $x = l$ закреплен, т.е. $u_1(t) = 0$, пространство F целевых функций и сопряженное к нему пространство F^* не изменятся, а пространство наблюдаемых граничных сигналов $g = g_0(t)$ станет равным $H^* = H = L^2(0, T)$. В новую постановку задачи наблюдения войдут старые условия (28) вместе с новым условием одностороннего Нейман-наблюдения $g_0(t) = k p_x|_{x=0}$, замещающим прежние двусторонние соотношения (29), а под значением сопряженного оператора вместо (31) надо будет понимать $A^*v = k(0) p_x(t, 0)$. Мультипликатор $m(x) = m(x, \xi)$ будет выбираться по тому же правилу (32), только теперь параметр ξ не оптимизируется, как в (35), а просто полагается равным $\xi = l$. Значения соответствующего мультипликатора $m_0(x) = m(x, l)$ окажутся отрицательными, а на правом конце $m_0(l) = 0$. Пороговый момент управляемости-наблюдаемости станет равным $T_0 = 2 \max_{0 \leq x \leq l} \left(|m_0(x)| \sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}} \right)$. В теореме 2.2 доказано, что в задаче (28) с левосторонним Нейман-наблюдением при $T > T_0$ справедливо неравенство наблюдаемости (10) со значением $\mu = \mu_0 = \frac{T-T_0}{M_0}$, где $M_0 = \frac{|m_0(0)|}{k(0)}$.

Замечание 2.2. В случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$ при выборе $\xi = l$ будем иметь $m_0(x) = x - l$, $T_0 = 2l$, $M_0 = |m_0(0)| = l$, $\mu_0 = \frac{(T-2l)}{l}$, в частности, значение порогового момента $T_0 = 2l = 2T_*$ удваивается по сравнению со случаем двусторонних управлений и наблюдений.

В § 2.2 с помощью вариационного метода на базе конечно-разностных аппроксимаций стоятся приближенные решения задач граничного Дирихле-управления и двойственных к ним задач Нейман-наблюдения. Для этого на отрезках $[0, T]$ и $[0, l]$ вводятся равномерные сетки с шагами $\tau = T/M$ по t и $h = l/N$ по x и узлами $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, M$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Задача (26) аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{aligned} \rho y_{\bar{t}t} &= (k y_{\bar{x}})_x, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & j &= 1, 2, \dots, M-1, \\ y|_{i=0} &= u_0, & y|_{i=N} &= u_1, & j &= 1, 2, \dots, M-1, \\ y|_{j=0} &= 0, & y_t|_{j=0} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (38)$$

Задаче (28) сопоставляется ее разностный аналог

$$\begin{aligned} \rho p_{\bar{t}t} &= (k p_{\bar{x}})_x, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & j &= 1, 2, \dots, M-1, \\ p|_{i=0} &= 0, & p|_{i=N} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, M-1, \\ p|_{j=M} &= v^0, & p_{\bar{t}}|_{j=M} &= -v^1, & i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (39)$$

Как и в [9], для дискретизации обеих дифференциальных задач выбраны классические явные разностные схемы [С40], для устойчивости которых тре-

буется выполнение условий согласования шагов сетки:

$$0 < c_1 \leq \frac{\tau}{h} \leq \alpha c_2, \quad c_2 = \min_{1 \leq i \leq N} \min \left\{ \sqrt{\frac{\rho_i}{k_i}}, \sqrt{\frac{\rho_{i-1}}{k_i}} \right\}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (40)$$

Значения коэффициентов можно вычислять по простым правилам, например, $\rho_i = \rho(x_i)$, $k_i = k(x_i - \frac{h}{2})$, $i = 1, 2, \dots, N$. На базе дискретных конструкций (38),(39) строятся конечномерные взаимно сопряженные отображения $\tilde{A} = A_{\tau h}$, $\tilde{A}^* = A_{\tau h}^*$, действующие в тех же пространствах, что и исходные операторы A , A^* . На вход оператора \tilde{A} подаются произвольные функции

$$u = (u_0(t), u_1(t)) \in H \equiv L^2(0, T) \times L^2(0, T).$$

По этим функциям строятся сеточные граничные управления $u = (u_0, u_1)$,

$$u_0^j = \frac{1}{\tau} \int_{t_j - \frac{\tau}{2}}^{t_j + \frac{\tau}{2}} u_0(t) dt, \quad u_1^j = \frac{1}{\tau} \int_{t_j - \frac{\tau}{2}}^{t_j + \frac{\tau}{2}} u_1(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (41)$$

Они подставляются в граничные условия разностной задачи (38) и по ее решению y определяются значения

$$\tilde{A}u = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^M e_i(x), \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{i},i}^M \delta(x - x_i)h \right) \in F = L_\rho^2(0, l) \times H^{-1}(0, l), \quad (42)$$

где $e_i(x)$ – функции-«ступеньки», равные 1 при $x \in [x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}]$ и нулю в остальных точках числовой прямой, а $\delta(x - x_i)$ – δ -функции Дирака, сосредоточенные в узлах сетки x_i . Оператор \tilde{A}^* применяется к произвольной паре $v = (v^0(x), v^1(x)) \in F^* \equiv H_0^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l)$. Сначала он преобразует ее в сеточную пару $v = (v^0, v^1)$,

$$v_i^0 = v^0(x_i), \quad v_i^1 = \frac{1}{\rho_i h} \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \rho(x) v^1(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (43)$$

Затем решается задача (39) с дискретными данными v^0, v^1 и по ее решению p определяется принадлежащее $H^* = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$ выходное значение

$$\tilde{A}^*v = \left(\sum_{j=1}^{M-1} k_1 p_{\bar{x},1}^j e_j(t), \sum_{j=1}^{M-1} (-k_N p_{\bar{x},N}^j) e_j(t) \right), \quad (44)$$

где $e_j(t)$ – функции-«ступеньки» переменной t .

В леммах 2.1–2.3 устанавливаются важные для применимости вариационного метода свойства взаимной сопряженности операторов \tilde{A} и \tilde{A}^* и свойства

(5) их сильной поточечной сходимости. В качестве подпространства \tilde{F} берем

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= L_h \times H_h^{-1}, & L_h &= \text{span}\{e_1(x), \dots, e_{N-1}(x)\}, \\ H_h^{-1} &= \text{span}\{\delta(x - x_1), \dots, \delta(x - x_{N-1})\}.\end{aligned}\tag{45}$$

Теорема 2.3. [9] Пусть $T > T_*$, где T_* взято из (35), и выполняется условие (40), а приближенные данные $\tilde{f} \in F$ близки к точным в смысле (6). Тогда в задаче управления (26), (27) приближения \tilde{u} , построенные по правилам (12)–(14), (41)–(45), будут сильно сходиться при $\tau, h, \varepsilon \rightarrow 0$ к нормальному решению u_* задачи управления: $\|\tilde{u} - u_*\|_H \rightarrow 0$.

Во второй части этой теоремы сформулировано аналогичное утверждение о сходимости приближенных решений двойственной задачи наблюдения (28), (29). В теореме 2.4 содержатся аналогичные теореме 2.3 утверждения о сильной сходимости приближенных решений задач с односторонними управлениями и наблюдениями из $H = H^* = L^2(0, T)$.

В § 2.3 рассматриваются двойственные задачи Дирихле-управления и Нейман-наблюдения в других функциональных пространствах. На этот раз граничные управления будут выбираться из пространства Соболева $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ и им будут соответствовать более регулярные обобщенные решения $y = y(t, x)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, введенного в работах В.А.Ильина [С34, С35]. Именно в этом классе для волнового уравнения с постоянными коэффициентами В.А.Ильин и Е.И.Моисеев выполнили большую часть своих исследований по отысканию явных аналитических выражений для нормальных граничных управлений на достаточно протяженных временных промежутках [С34, С35, С37, С38]. В случае переменных коэффициентов применимость вариационного метода существенным образом зависит от наличия неравенства наблюдаемости (10) с известным значением $\mu > 0$. При переходе к более гладкому классу граничных управлений снижается регулярность решений p двойственной задачи наблюдения, а, как известно, свойства единственности, к усиленным разновидностям которых относится оценка (10), в менее регулярных и более широких классах доказывать сложнее. В связи с этим в число основных результатов диссертации из § 2.3 в отличие от § 2.1 помимо результатов сходимости приближенных решений включаются также и полученные конструктивные неравенства наблюдаемости для задач как в односторонней, так и в двусторонней постановке. Заметим, что при выводе неравенств наблюдаемости случаи односторонних и двусторонних управлений из $H^1(0, T)$ оказываются уже не столь аналогичными, как в случае управлений из $L^2(0, T)$. Результат для односторонних задач сформулирован в теореме 2.5. В более

сложном случае двусторонних управлений существенно используется теорема 2.5 в комбинации с разложением пространства целевых состояний $H^1(0, l)$ в сумму (23) и с отношением двойственности (24).

Граничные управления $u = (u_0(t), u_1(t))$ из $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ являются непрерывными на отрезке $[0, T]$ функциями, поэтому в постановке (26) задачи управления их значения при $t = 0$ для согласования с однородными начальными условиями выбираются из подмножества

$$u = (u_0(t), u_1(t)) \in H = H^1(\overset{\circ}{0}, T) \times H^1(\overset{\circ}{0}, T), \quad (46)$$

с компонентами $H^1(\overset{\circ}{0}, T) = \left\{ f(t) \in H^1(0, T) \mid f(0) = 0 \right\}$, которые являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\overset{\circ}{0}, T)} = \int_0^T f'(t)g'(t) dt. \quad (47)$$

Значения операторов управления A и наблюдения A^* сохраняют вид (30),(31), а изменяются пространства, в которых они действуют. Пространство H управлений уже описано в (46),(47), а пространство F и сопряженные к ним пространства будут такими: $F = H^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l)$, $F^* = L_\rho^2(0, l) \times (H^1(0, l))^*$, $H^* = (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^* \times (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*$.

Теорема 2.6. [18, 21] Пусть значение порогового момента T_* определено в (35). Тогда для решения p задачи (28) при $T > T_*$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|A^*v\|_{H^*}^2 &= \|k(0) p_x(\cdot, 0)\|_{(H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*}^2 + \|k(l) p_x(\cdot, l)\|_{(H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*}^2 \geq \\ &\geq \mu \left(\|v^0\|_{L_\rho^2(0, l)}^2 + \|v^1\|_{(H^1(0, l))^*}^2 \right) = \mu \|v\|_{F^*}^2 \end{aligned}$$

с тем же самым значением постоянной μ , что и в (36).

Изменение функциональных пространств в непрерывных моделях (26)–(29) отразится на конструкциях их приближенных решений. Разностные схемы (38),(39) и условия согласования шагов сетки (40) не меняются. Приближенный оператор \tilde{A} граничные управления (46) превращает в дискретные $u = (u_0, u_1)$ по правилу (отличному от (41)): $u_0^j = u_0(t^j)$, $u_1^j = u_1(t^j)$, $j = 1, 2, \dots, M$, и через соответствующее решение y разностной схемы (38) преобразует в

$$\tilde{A}u = \left(\sum_{i=0}^N y_i^M \varphi_i(x), \sum_{i=1}^{N-1} y_{\tilde{t}, i}^M e_i(x) \right) \in F = H^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l), \quad (48)$$

где функции-«шапочки» $\varphi_i(x)$ – это базисные сплайны первого порядка, равные $1 - \frac{|x-x_i|}{h}$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и нулю в остальных точках числовой прямой, а функции-«ступеньки» $e_i(x)$ уже появлялись выше в (42). На вход приближенного оператора наблюдения \tilde{A}^* подается произвольная пара $(v^0(x), v^1(x)) \in F^* = L^2_\rho(0, l) \times (H^1(0, l))^*$. Она подвергается дискретной трансформации по правилу (отличному от (43)):

$$v_i^0 = \frac{1}{\rho_i h} \langle v^0, e_i \rangle = \frac{1}{\rho_i h} \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \rho(x) v^0(x) dx, \quad v_i^1 = \frac{1}{\rho_i h} \langle v^1, \varphi_i \rangle, \quad (49)$$

и по соответствующему решению разностной схемы (39) формируется выход

$$\begin{aligned} \tilde{A}^* v &= (g_0, g_1) \in H^* = (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^* \times (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*, \\ g_0 &= \sum_{j=1}^{M-1} k_1 p_{x,1}^j \delta(t - t^j) \tau + \langle v^1, \varphi_0 \rangle \delta(t - t^M), \\ g_1 &= - \sum_{j=1}^{M-1} k_N p_{x,N}^j \delta(t - t^j) \tau + \langle v^1, \varphi_N \rangle \delta(t - t^M). \end{aligned} \quad (50)$$

Подпространство \tilde{F}^* вариаций источников v имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}^* &= J_F^{-1} \tilde{F} = L_h \times (H_h^1)^*, \quad R(\tilde{A}) \subset \tilde{F} = H_h^1 \times L_h \subset F, \\ (H_h^1)^* &= J_{H^1(0,l)}^{-1} H_h^1, \quad H_h^1 = \text{span}\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_N(x)\}, \\ L_h &= \text{span}\{e_1(x), \dots, e_{N-1}(x)\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Сформулируем теорему сходимости в части, относящейся к задаче управления. В тексте диссертации в формулировку этой теоремы включено также и аналогичное утверждение о приближенных решениях задачи наблюдения.

Теорема 2.8. [16, 18] *Пусть выполняется условие управляемости и наблюдаемости $T > T_*$ со значением T_* из (35) и условие согласования шагов сетки (40), а приближения \tilde{f} близки к f в смысле (6). Тогда приближенные управления \tilde{u} , построенные по правилам (12)–(14), (48)–(51), будут сильно в $H = H^1(\overset{\circ}{0}, T) \times H^1(\overset{\circ}{0}, T)$ сходиться при $\tau, h, \varepsilon \rightarrow 0$ к нормальному решению u_* задачи управления (26), (27), (46).*

В § 2.4 рассматриваются задачи с односторонними и двусторонними Дирихле-управлениями из пространства Соболева $H^1(\overset{\circ}{0}, T)$, в которых в заданный конечный момент T управляемую систему требуется перевести либо в состояние $f^0(x)$ с неважно какой скоростью $f^1(x)$, либо в момент T требуется вывести систему на скоростной режим $f^1(x)$, не заботясь при этом о ее фазовой позиции $f^0(x)$. Именно такие постановки обсуждались в работе [18].

Нам представляется интересным продемонстрировать те изменения, которые произойдут в постановках двойственных задач наблюдения, в неравенствах наблюдаемости, а также в значениях входящих в эти неравенства пороговых моментов управляемости-наблюдаемости и постоянных μ . В теореме 2.9 представлено неравенство наблюдаемости для задач с односторонними управлениями и наблюдениями. Задаче с двусторонними Дирихле-управлениями из пространства (46) и единственным целевым условием

$$y|_{t=T} = f^0(x), \quad 0 < x < l, \quad \text{где } f^0(x) \in F = H^1(0, l), \quad (52)$$

соответствует оператор управления $Au = y(T, x)$, $A \in L(H \rightarrow F)$. Действие сопряженного к нему оператора наблюдения A^* описывается дифференциальной задачей (28) с нулевым конечным состоянием $v^0(x) = 0$ и искомой конечной скоростью $v = v^1(x) \in F^* = (H^1(0, l))^*$. Этот оператор действует по правилу

$$A^*v = (k(0)p_x(t, 0), -k(l)p_x(t, l)) \in H^* = (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^* \times (H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*. \quad (53)$$

В задаче управления с другой целевой установкой

$$y_t|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l, \quad \text{где } f^1(x) \in F = L^2_\rho(0, l), \quad (54)$$

оператор управления действует по правилу $Au = y_t(T, x)$, $A \in L(H \rightarrow F)$, а сопряженный к нему оператор наблюдения – по правилу (53), но с другим функциональным пространством F^* в роли области определения: $v = v^0(x) \in F^* = L^2_\rho(0, l)$.

Теорема 2.10. [18] Пусть значение T_* определено в (35). Тогда для обеих задач (26), (52) и (26), (54) при $T > \frac{T_*}{2}$ справедливо неравенство

$$\|A^*v\|_{H^*}^2 = \|k(0)p_x(\cdot, 0)\|_{(H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*}^2 + \|k(l)p_x(\cdot, l)\|_{(H^1(\overset{\circ}{0}, T))^*}^2 \geq \mu \|v\|_{F^*}^2, \\ \text{где } \mu = \frac{T - \frac{T_*}{2}}{M}, \quad M = \max \left\{ \frac{|m_*(0)|}{k(0)}, \frac{|m_*(l)|}{k(l)} \right\},$$

для произвольных элементов $v = v^1 \in F^* = (H^1(0, l))^*$ в случае цели (52) и произвольных $v = v^0 \in F^* = L^2_\rho(0, l)$ в случае цели (54).

Утверждения родственных теорем 2.6 и 2.10 фактически отличаются только значением порогового момента, который в задачах с ослабленными целями (52) или (54) вдвое короче, чем в задаче с полным целевым набором (27). Те изменения, которые наблюдаются при переходе к задачам с частичными целями, столь естественны, что мы решили не выходить в диссертации за рамки затронутой в [18] проблематики и не обсуждать подобные постановки ни для

задач из § 2.1 с менее регулярными граничными Дирихле-управлениями из $L^2(0, T)$, ни в последующих главах для задач с управлениями и наблюдениями других типов, а также и вопросы аппроксимации таких задач.

В главе 3 вариационный метод применяется к задачам граничного управления и наблюдения для волнового уравнения с переменными коэффициентами и краевыми условиями второго и третьего рода. Задача с двусторонними управлениями и целевыми условиями (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(x) y_{tt} &= (k(x) y_x)_x, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ -k y_x + \sigma_0 y |_{x=0} &= u_0(t), & k y_x + \sigma_1 y |_{x=l} &= u_1(t), & \quad 0 < t < T, \\ y |_{t=0} &= 0, & y_t |_{t=0} &= 0, & \quad 0 < x < l. \end{aligned} \quad (55)$$

Двойственная к ней задача наблюдения описывается системой

$$\begin{aligned} \rho(x) p_{tt} &= (k(x) p_x)_x, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ -k p_x + \sigma_0 p |_{x=0} &= 0, & k p_x + \sigma_1 p |_{x=l} &= 0, & \quad 0 < t < T, \\ p |_{t=T} &= v^0(x), & p_t |_{t=T} &= -v^1(x), & \quad 0 < x < l, \end{aligned} \quad (56)$$

с дополнительной граничной информацией вида

$$p |_{x=0} = g_0(t), \quad p |_{x=l} = g_1(t), \quad 0 < t < T.$$

Граничные коэффициенты $\sigma_0, \sigma_1 \geq 0$ считаются заданными и могут обращаться в ноль вместе или по отдельности. Тем самым мы не исключаем в (55), (56) возможности, когда одно из краевых условий или оба они являются граничными условиями второго рода (Неймана). Заметим, что случаи подобных «вырождений», как правило, приводят лишь к техническим упрощениям, а самым трудным с точки зрения вывода неравенств наблюдаемости оказывается случай с односторонними управлениями и наблюдениями, когда оба значения σ_0 и σ_1 строго положительны. Для уравнений с постоянными коэффициентами $\rho(x)$ и $k(x)$ и граничными управлениями в условиях второго и третьего рода ряд аналитических результатов получен в работах В.А.Ильина, Е.И.Моисеева, Л.Н.Знаменской, А.А.Никитина, А.А.Кулешова [С37]–[С39], [С41]. С позиций точной управляемости и минимизации соответствующего порогового момента такие задачи для дифференциальных уравнений с младшими членами и в многомерном случае исследовались в [С25], однако далеко не все результаты из [С25] настолько конструктивны, чтобы можно было по ним определять и значения постоянной μ , важные для нас с вычислительной точки зрения.

В § 3.1 в теореме 3.1 представлен вариант неравенства наблюдаемости для задачи (56) в случае, когда в исходной задаче (55) управления выбираются

из нерегулярного класса $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H = (H^1(0, T))^* \times (H^1(0, T))^*$, а цели (27) – из согласованного с ними по степени гладкости пространства $f = (f^0(x), f^1(x)) \in F = L^2_\rho(0, l) \times (H^1(0, l))^*$. В диссертации это неравенство представлено в виде, несколько измененном по сравнению с первоначальной версией, опубликованной в [6], и выбранном с учетом опыта, приобретенного позже в [19]–[22]. При этом, как и в главе 2, существенную роль играют предложенные Л.Ф.Но [С24] конструкции мультипликаторов в задачах зонного управления с переменными коэффициентами.

В § 3.2 рассматривается более сложный для вывода неравенств наблюдаемости случай задачи (55), (27) с более регулярными управлениями и целями: $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$, $f = (f^0(x), f^1(x)) \in F = H^1(0, l) \times L^2_\rho(0, l)$. В этом случае оператор управления A действует по правилу (30), а оператор наблюдения – по правилу $A^*v = (p(t, 0), p(t, l))$, $0 < t < T$, $A^* \in L(F^* \rightarrow H^*)$, $F^* = L^2_\rho(0, l) \times (H^1(0, l))^*$, $H^* = H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$.

Теорема 3.2. [20, 22] *Пусть момент T_* определен в (35). Тогда для решения p сопряженной системы (56) при $T > T_*$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|A^*v\|_{H^*}^2 &= \int_0^T \left(p^2(t, 0) + p^2(t, l) \right) dt \geq \\ &\geq \mu \left(\int_0^l \rho(x) |v^0(x)|^2 dx + \|v^1\|_{(H^1(0, l))^*}^2 \right) = \mu \|v\|_{F^*}^2 \quad \forall v = (v^0, v^1) \in F^*, \end{aligned}$$

в которой $\mu = (T - T_*)/M > 0$, $M = \max\{M_0, M_1\}$, $M_0 = \rho(0)|m_*(0)| + \frac{T^2}{2} \left(\sigma_0 \left(1 + \sigma_0 \frac{|m_*(0)|}{k(0)} \right) \right)$, $M_1 = \rho(l)m_*(l) + \frac{T^2}{2} \left(\sigma_1 \left(1 + \sigma_1 \frac{m_*(l)}{k(l)} \right) \right)$.

Далее рассматривается случай односторонних управлений, когда в (55) $u_1(t) \equiv 0$. В этом случае неравенства наблюдаемости доказываются отдельно в теореме 3.3 для больших, а в теореме 3.4 для малых значений коэффициента $\sigma_1 > 0$ на ненаблюдаемом конце $x = l$. Из этих результатов в теореме 3.5 конструируется неравенство наблюдаемости для случая произвольных $\sigma_1 > 0$. В случае постоянных $\rho(x)$, $k(x)$ значения пороговых моментов в теоремах 3.3 и 3.4 оказываются лишь асимптотически оптимальными при $\sigma_1 \rightarrow +\infty$ и $\sigma_1 \rightarrow 0$, когда правое граничное условие приближается по типу к условию Дирихле и Неймана соответственно. Для умеренных значений σ_1 значение порогового момента заметно отклоняется от оптимального, а структура постоянной μ усложняется, не теряя при этом конструктивности.

В § 3.3 с помощью вариационного метода строятся приближенные решения двойственных задач управления и наблюдения для нерегулярных управлений $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H = (H^1(0, T))^* \times (H^1(0, T))^*$ в теореме 3.6 и для регулярных управлений $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$ в теореме 3.7.

В обоих случаях рассматриваются задачи двустороннего типа, в которых постоянные μ имеют более простую конструкцию. Здесь для краткости ограничимся описанием приближенных решений только задачи с регулярными управлениями. Управляемую систему (55) аппроксимируем разностной схемой (38), в которой граничные условия заменены на

$$-k y_x + \sigma_0 y |_{i=0} = u_0, \quad k y_{\bar{x}} + \sigma_1 y |_{i=N} = u_1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (57)$$

Сопряженной системе (56) сопоставим разностный аналог (39) с однородными граничными условиями

$$-k p_x + \sigma_0 p |_{i=0} = 0, \quad k p_{\bar{x}} + \sigma_1 p |_{i=N} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (58)$$

На вход оператора \tilde{A} поступают произвольные управления $u = (u_0(t), u_1(t)) \in L^2(0, T) \times L^2(0, T)$, которые перерабатываются в пару сеточных функций $u = (u_0, u_1)$ по правилу (41) и через решение y разностной задачи (38) с граничными условиями (57) преобразуются в значение $\tilde{A}u$ вида (48). Присутствующие в (48) угловые значения y_0^M, y_N^M , формально не определяемые разностной схемой, определяются из условий

$$-k_1 y_{x,0}^M + \sigma_0 y_0^M = 0, \quad y_{\bar{x},N}^M + \sigma_1 y_N^M = 0.$$

Оператор \tilde{A}^* применяется к произвольной паре $v = (v^0, v^1) \in F^* = L_\rho^2(0, l) \times (H^1(0, l))^*$. Сначала он преобразует ее в сеточную пару (v^0, v^1) по правилу (49) за исключением двух крайних компонент вектора дискретной скорости, для которых действует особое правило

$$v_1^1 = \frac{1}{\rho_1 h} \left\langle v^1, \frac{k_1}{k_1 + h\sigma_0} e_0^{(1)} + e_1^{(1)} \right\rangle, \quad v_{N-1}^1 = \frac{1}{\rho_{N-1} h} \left\langle v^1, e_{N-1}^{(1)} + \frac{k_N}{k_N + h\sigma_1} e_N^{(1)} \right\rangle.$$

Затем решается разностная задача (39) с граничными условиями (58) и формируется итоговое значение

$$\tilde{A}^* v = \left(\sum_{j=1}^{M-1} p_0^j e_j(t), \sum_{j=1}^{M-1} p_N^j e_j(t) \right) \in H^* = H = L^2(0, T) \times L^2(0, T). \quad (59)$$

В качестве подпространства, по которому будут варьироваться истокообразующие элементы v , выбирается \tilde{F}^* вида (51).

Теорема 3.7. [22] Пусть выполняется условие управляемости и наблюдаемости $T > T_*$ со значением T_* из (35) и условие согласования шагов сетки (40), а приближения \tilde{f} близки к f в смысле (6). Тогда приближенные управления \tilde{u} , построенные по правилам (12)–(14), (48), (51), (59) будут сильно в $H = L^2(0, T) \times L^2(0, T)$ сходиться при $\tau, h, \varepsilon \rightarrow 0$ к нормальному решению u_* задачи управления (55), (27).

В главе 4 рассматриваются задачи управления того же вида, что и в [С24]:

$$\begin{aligned} \rho(x) y_{tt} &= (k(x) y_x)_x + Bu(t, x), & (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \\ y|_{x=0} &= 0, & y|_{x=l} = 0, & 0 < t < T, \\ y|_{t=0} &= 0, & y_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < l, \end{aligned} \quad (60)$$

с зонными управлениями, однородными граничными условиями Дирихле и целями (27). Областью приложения управляющих воздействий $u = u(t, x)$ является содержащаяся в Q зона $\Omega = (0, T) \times \omega$ прямоугольной формы, ограниченная по x промежутком $\omega = (l_1, l_2)$ с заданными границами $0 < l_1 < l_2 < l$. На части $Q \setminus \Omega$ прямоугольника Q , находящейся за пределами зоны Ω , оператор B доопределяет значения $u(t, x)$ нулями.

В § 4.1 выводятся конструктивные неравенства наблюдаемости для управлений из нерегулярных классов

$$u \in H = (H^1(\Omega))^* \quad \text{и} \quad u \in H = L^2(0, T; (H^1(\omega))^*).$$

Таким управлениям соответствуют целевые состояния $f = (f^0(x), f^1(x)) \in L^2_\rho(0, l) \times H^{-1}(0, l)$. Сопряженная система имеет вид (28), а в роли наблюдений выступают значения ее решения $p(t, x)$ в зоне Ω . Оператор наблюдения $A^* \in L(F^* \rightarrow H^*)$, $F^* = H^1_0(0, l) \times L^2_\rho(0, l)$, действует по правилу

$$A^*v = (B^*p)(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

с участием оператора сужения B^* , сопряженного к оператору продолжения B из (60). При этом в случае $u \in (H^1(\Omega))^*$ имеем $B^* : H^1(Q) \rightarrow H^* = H^1(\Omega)$, а если $u \in L^2(0, T; (H^1(\omega))^*)$, то $B^* : L^2(0, T; H^1_0(0, l)) \rightarrow H^* = L^2(0, T; H^1(\omega))$. Конструктивное неравенство наблюдаемости в случае, когда $u \in (H^1(\Omega))^*$, фактически было получено в [С24], а в статье [3] и в диссертации в теореме 4.1 оно приводится для удобства последующего применения вариационного метода. В более сложном случае, когда $u \in L^2(0, T; (H^1(\omega))^*)$, Л.Ф.Но в [С24] удалось сохранить значение порогового момента T_* , но значение μ перешло при этом из категории известных в категорию существующих, чего было вполне достаточно для достижения главной цели Л.Ф.Но – доказательства точной управляемости. В теореме 4.2 для случая $u \in L^2(0, T; (H^1(\omega))^*)$ получено неравенство наблюдаемости, в котором значение постоянной μ определяется конструктивно и зависит от параметра $\alpha > 0$. Этот параметр теоретически может быть сколь угодно малым и играет роль скачка в точках разрыва $x = l_1$ и $x = l_2$ предложенного нами мультипликатора. От параметра α зависит также и пороговый момент $T_*(\alpha)$, причем при $\alpha \rightarrow 0$ значение $T_*(\alpha)$ будет стремиться к оптимальному значению, которое в случае постоянных коэффициентов равно $T_*(0) = 2 \max\{l_1, l - l_2\}$. Стоит, однако, заметить,

что при $\alpha \rightarrow 0$ наряду с оптимистичным поведением значения порогового момента наблюдается и негативное явление $\mu(\alpha) \rightarrow 0$, поэтому при выполнении практических вычислений во избежание потери устойчивости не следует брать α слишком малым.

В § 4.2 конструктивное неравенство наблюдаемости выводится для слабых решений системы, сопряженной к задаче (60) с регулярными управлениями $u(t, x) \in L^2(\Omega)$, при которых пространством целевых функций становится $F = H_0^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l)$. Здесь нам пришлось использовать и разрывный мультипликатор, и процедуру сглаживания нерегулярных решений $p(t, x)$, и специальное разложение (25) для пространства $H_0^1(0, l)$ целевых состояний $f^0(x)$. Соответствующий результат сформулирован в теореме 4.3, в которой зависимость постоянной μ от параметра α не теряет конструктивности, а ее усложнения по сравнению с теоремой 4.2 имеют чисто технический характер.

В § 4.3 с помощью вариационного метода строятся приближенные решения задач (60), (27) с зонными управлениями из $(H^1(\Omega))^*$, а также двойственных к ним задач зонного наблюдения. Как уже отмечалось, вывод неравенств наблюдаемости усложняется по мере сужения класса управлений, которое сопровождается расширением множества решений сопряженной системы, но после того, как эти неравенства уже получены (в теоремах 4.1–4.3), принципиальной разницы в сложности конструкций вырабатываемых вариационным методом приближений и в доказательствах их сходимости не наблюдается. Поэтому во избежание излишних повторов для демонстрации возможностей вариационного метода в главе 4 был выбран только один из трех классов задач с самым широким пространством управлений $(H^1(\Omega))^*$. Для аппроксимации задачи управления выбираем разностную схему (38) с однородными граничными условиями и слагаемым Bu в правой части разностного уравнения, в котором оператор B продолжает сеточное управление u нулем за пределы зоны Ω . В отличие от (38) дополняем сетку по переменной t узлами с номерами $j = -1$ и $j = M + 1$. Для простоты предполагаем, что граничные точки зоны l_1 и l_2 попадают в узлы сетки: $l_1 = i_1 \cdot h$, $l_2 = i_2 \cdot h$. На вход приближенному оператору управления \tilde{A} подается произвольный функционал $u \in (H^1(\Omega))^*$. Он преобразуется в сеточное управление по правилу

$$w_i^j = \frac{1}{\tau h} \langle u, \varphi_i(x) \varphi_j(t) \rangle, \quad i = i_1, \dots, i_2, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

где $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(t)$ – функции-«шапочки», затем решается разностная задача для y и определяется выход $\tilde{A}u \in F = L_\rho^2(0, l) \times H^{-1}(0, l)$, отличающийся от (42) только тем, что в место y_i^M и $y_{\bar{i}, i}^M$ на этот раз берутся значения y_i^{M+1} и $y_{\bar{i}, i}^{M+1}$ со следующего слоя. Сопряженный оператор \tilde{A}^* применяется к произвольной паре $v = (v^0(x), v^1(x)) \in F^* = H_0^1(0, l) \times L_\rho^2(0, l)$, которая

подвергается дискретизации по правилу (43), затем решается разностная задача для p и определяется значение $\tilde{A}^*v \in H^* = H^1(\Omega)$ в форме билинейного сплайна

$$\tilde{A}^*v = \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=0}^M p_i^j \varphi_i(x) \varphi_j(t), \quad (t, x) \in \Omega.$$

В качестве фигурирующего в методе подпространства \tilde{F} берется (45), а источники v , генерирующие приближенные управления \tilde{u} , будут варьироваться по множеству $\tilde{F}^* = J_F^{-1} \tilde{F} = H_{h_0}^1 \times L_h$, где $H_{h_0}^1 = \text{span}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N-1}(x)\}$, $L_h = \text{span}\{e_1(x), \dots, e_{N-1}(x)\}$. В теореме 4.4 показано, что при выполнении условия управляемости-наблюдаемости вида $T > T_*$, в котором пороговое значение T_* определяется конструктивно, приближенные управления \tilde{u} , вырабатываемые вариационным методом, при $\tau, h, \varepsilon \rightarrow 0$ сходятся по норме пространства $(H^1(\Omega))^*$ к единственному нормальному решению u_* задачи управления. При тех же условиях имеет место и сильная в F^* сходимости приближенных решений \tilde{v} двойственной задачи наблюдения.

Результаты, представленные в теоремах 4.2–4.4, опубликованы в форме докладов на конференциях [24, 26, 27]; их журнальные версии находятся в печати. В работе [3], написанной до появления вариационного метода, были получены предварительные результаты о сильной поточечной сходимости вида (5) в задачах зонного управления и наблюдения для уравнения с постоянными коэффициентами.

В **главе 5** демонстрируются возможности вариационного метода применительно к двойственным задачам граничного управления и наблюдения для дифференциального уравнения второго порядка по времени и четвертого порядка по пространству, описывающего процесс поперечных колебаний стержня (балки) и известного также под названиями «система Петровского» [С22, С25] или «уравнение Эйлера-Бернулли» [С28]. Присутствие в уравнении производных высокого порядка открывает широкие возможности для выбора граничных условий различных типов в различных комбинациях. Не имея намерений охватить сколь-либо систематически даже малую их часть, мы ограничиваемся в диссертации обсуждением только двух вариантов постановок в рамках опубликованных работ [13]–[15].

В § 5.1 рассматривается задача граничного управления смещением и изгибающим моментом на левом конце отрезка («вторая система Петровского») по

терминологии [C22, C25]) для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
y_{tt} + y_{xxxx} &= 0, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\
y|_{x=0} &= u_0(t), & y|_{x=l} &= 0, & \quad 0 < t < T, \\
-y_{xx}|_{x=0} &= u_1(t), & y_{xx}|_{x=l} &= 0, & \quad 0 < t < T, \\
y|_{t=0} &= 0, & y_t|_{t=0} &= 0, & \quad 0 < x < l.
\end{aligned} \tag{61}$$

Граничные управления $u = (u_0(t), u_1(t))$ должны обеспечить перевод системы (61) в заданное целевое состояние (27), а оператор управления A действует по правилу (30), только в других пространствах. Действие оператора наблюдения A^* описывается сопряженной системой с обратным течением времени, с таким же дифференциальным уравнением и такими же, только однородными, граничными условиями, что и в (61), и финальными условиями

$$p|_{t=T} = v^0(x), \quad p_t|_{t=T} = -v^1(x), \quad 0 < x < l. \tag{62}$$

Значения сопряженного оператора вычисляются по правилу

$$A^*v = (-p_{xxx}|_{x=0}, p_x|_{x=0}), \quad 0 < t < T.$$

В задаче наблюдения требуется восстановить конечное состояние $v = (v^0, v^1)$ в (62) по известным значениям $g = (g_0(t), g_1(t))$, где $g_0(t) = p_x|_{x=0}$, $g_1(t) = -p_{xxx}|_{x=0}$. Задачи управления и наблюдения ставятся в пространствах

$$\begin{aligned}
u &\in H = L^2(0, T) \times (H^1(0, T))^*, & f &\in F = H^{-1}(0, l) \times V^*, \\
v &\in F^* = V \times H_0^1(0, l), & g &\in H^* = L^2(0, T) \times H^1(0, T),
\end{aligned}$$

где $V = \{f(x) \in H^3(0, l) \cap H_0^1(0, l) \mid f''(0) = f''(l) = 0\}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g \rangle_V = \int_0^l f'''(x)g'''(x) dx$. Неравенство наблюдаемости (10) в этих пространствах с явным выражением для μ представлено в теореме 5.1.

Для аппроксимации обоих непрерывных процессов используются явные трехслойные разностные схемы с пятиточечным шаблоном по x и согласованными шагами сетки: $c_1 h^2 \leq \tau \leq \frac{h^2}{4}$, $c_1 = \text{const} > 0$. Приближенный оператор управления \tilde{A} , действуя на пару функций $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H$, превращает ее в дискретную пару $u_0^j = \frac{1}{\tau} \int_{t^j - \frac{\tau}{2}}^{t^j + \frac{\tau}{2}} u_0(t) dt$, $u_1^j = \frac{1}{\tau} \langle u_1, \varphi_i \rangle$, $j = 0, 1, \dots, M$, а затем через соответствующее сеточное решение y преобразует в выход

$$\tilde{A}u = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{M+1} \delta(x - x_i)h, \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{t}, i}^{M+1} \delta(x - x_i)h \right) \in F = H^{-1}(0, l) \times V^*. \tag{63}$$

Приближенный оператор наблюдения \tilde{A}^* применяется к паре функций $v = (v^0(x), v^1(x)) \in F^*$, дискретизирует их по одинаковому правилу $v_i^0 = v^0(x_i)$, $v_i^1 = v^1(x_i)$, $i = 1, \dots, N-1$, после чего решается сеточная задача для p и определяется выход

$$\tilde{A}^*v = \left(-\sum_{j=0}^M p_{x\bar{x}x,0}^j e_j(t), \sum_{j=0}^M p_{x,0}^j \varphi_j(t) \right) \in H^* = L^2(0, T) \times H^1(0, T). \quad (64)$$

С учетом (63) в качестве подпространства \tilde{F} берем (см. (45)) $\tilde{F} = H_h^{-1} \times H_h^{-1}$. В теореме 5.2 доказывается сильная сходимость приближенных решений задачи управления (61),(27) и двойственной к ней задачи наблюдения, построенных с помощью вариационного метода (12)–(14) на базе конечномерных взаимно сопряженных конструкций (63),(64). Материалы § 5.1 опубликованы в [13, 14].

В § 5.2 рассматривается задача с двусторонними граничными управлениями в старших производных для уравнения с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \rho(x) y_{tt} + (k(x) y_{xx})_{xx} &= 0, & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ -k(x) y_{xx} \big|_{x=0} &= 0, & k(x) y_{xx} \big|_{x=l} &= 0, & \quad 0 < t < T, \\ -(k(x) y_{xx})_x \big|_{x=0} &= u_0(t), & (k(x) y_{xx})_x \big|_{x=l} &= u_1(t), & \quad 0 < t < T, \\ y \big|_{t=0} &= 0, & y_t \big|_{t=0} &= 0, & \quad 0 < x < l, \end{aligned} \quad (65)$$

и целевыми установками вида (27). По проблемам точной управляемости для задач вида (65),(27) нам какие-либо результаты других авторов неизвестны. В двойственной задаче наблюдения процесс описывается системой того же вида (65), но с обратным течением времени, однородными граничными условиями и конечными условиями

$$p \big|_{t=T} = -v^0(x), \quad p_t \big|_{t=T} = v^1(x), \quad 0 < x < l. \quad (66)$$

Наблюдаемыми сигналами являются граничные значения самого решения:

$$g = (g_0(t), g_1(t)), \quad g_0(t) = p(t, 0), \quad g_1(t) = p(t, l), \quad 0 < t < T,$$

а искомыми являются функции $v = (v^0(x), v^1(x))$ из (66). Задачи управления и наблюдения рассматриваются в пространствах

$$\begin{aligned} u \in H &= (H^1(0, T))^* \times (H^1(0, T))^*, & f \in F &= L_\rho^2(0, l) \times (H^2(0, l))^*, \\ v \in F^* &= H^2(0, l) \times L_\rho^2(0, l), & g \in H^* &= H^1(0, T) \times H^1(0, T). \end{aligned}$$

Соответствующее этим классам неравенство наблюдаемости вида (10) с явным выражением для постоянной μ получено в теореме 5.3.

Для аппроксимации также, как и в § 5.1, используется явная трехслойная разностная схема с пятиточечным шаблоном по x и соответствующими поправками как в самой схеме, так и в условиях согласования шагов сетки, вызванными неоднородностью коэффициентов $\rho(x)$ и $k(x)$. Приближенный оператор управления \tilde{A} применяется к паре функций $u = (u_0(t), u_1(t)) \in H$ и сначала преобразует их в сеточные функции $u_0^j = \frac{1}{\tau} \langle u_0, \varphi_j(t) \rangle$, $u_1^j = \frac{1}{\tau} \langle u_1, \varphi_j(t) \rangle$, $j = 0, 1, \dots, M$, а затем по соответствующему сеточному решению y формирует выход

$$\tilde{A}u = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^{M+1} e_i(x), \sum_{i=1}^{N-1} y_{t,i}^{M+1} \delta(x - x_i) h \right) \in F = L^2_\rho(0, l) \times (H^2(0, l))^*. \quad (67)$$

Приближенный оператор наблюдения \tilde{A}^* действует на пару функций $v = (v^0(x), v^1(x)) \in F^*$, превращая их сначала в сеточную пару $v_i^0 = v^0(x_i)$, $v_i^1 = \frac{1}{h} \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} v(x) dx$, $i = 1, \dots, N - 1$, а потом по соответствующему решению p разностной задачи определяется выход

$$\tilde{A}^*v = \left(\sum_{j=0}^M p_0^j \varphi_j(t), \sum_{j=0}^M p_N^j \varphi_j(t) \right) \in H^* = H^1(0, T) \times H^1(0, T). \quad (68)$$

В данном случае в качестве \tilde{F} с учетом (67) берется в точности подпространство, определенное в (45). В теореме 5.4 доказывается сильная сходимость приближенных решений задачи управления (65),(27) и двойственной к ней задачи наблюдения, вырабатываемых вариационным методом (12)–(14) с привлечением конечномерных взаимно сопряженных отображений (67),(68). Материалы § 5.2 опубликованы в [15].

Заметим, что приведенные в теоремах 5.1 и 5.3 неравенства наблюдаемости далеки от совершенства, поскольку присутствующие в них пороговые моменты отделены от известного для таких задач оптимального значения, равного нулю [С25, С28]. С другой стороны, нам неизвестны неравенства наблюдаемости с конструктивно определяемыми μ , в которых пороговый момент принимал бы свое оптимальное нулевое значение.

В **главе 6** на простых тестовых примерах демонстрируются практические возможности вариационного метода применительно к задачам граничного Дирихле-управления для волнового уравнения с постоянными коэффициентами по схеме, описанной в главе 2. Ввиду того, что сами вычисления при применении вариационного метода как к задачам управления, так и к задачам наблюдения, организуются по однотипным схемам, рассматриваются только задачи управления. В § 6.1 тестируются задачи с управлениями из

$L^2(0, T)$, а в § 6.2 – с более регулярными управлениями из пространства Соболева $H^1(\overset{\circ}{0}, T)$. В обоих случаях при подборе тестов с заранее известными точными нормальными решениями мы пользовались приведенными в [С38] готовыми аналитическими конструкциями. Приближенные управления, построенные с помощью вариационного подхода, обозначаются через \tilde{u} и называются VM-управлениями (VM = Variational Method). Они будут сравниваться по точности с численными результатами, полученными при конечномерной аппроксимации задачи управления с учетом факта истокопредставимости ее нормального решения: $u_* = J_H A^* v_*$, $v_* \in F^*$, но без привлечения имеющейся дополнительной априорной информации о норме источника: $\|v_*\|_{F^*} \leq r$, $r \geq \frac{\|\tilde{f}\|_{F+\delta}}{\mu}$. Такие приближенные управления мы будем называть DHUM-управлениями (DHUM = Discrete Hilbert Uniqueness Method) и обозначать через \tilde{u}_\diamond . Выбранное название объясняется тем, что конструкция DHUM-управлений \tilde{u}_\diamond является конечномерной копией конструкции HUM-управлений Ж.-Л.Лионса [С22] (HUM = Hilbert Uniqueness Method). Выполненное тестирование показало, что с помощью DHUM не удается найти удовлетворительные по точности приближения к нормальному граничному управлению u_* даже в отсутствии шума (это отмечалось ранее и в [С12, С16]), в то время как VM выдает устойчивые результаты, приближающиеся к u_* при сгущении сетки и уменьшении амплитуды шума. Для иллюстрации приведем результаты одного из тестовых примеров, в которых качественно отражаются все основные закономерности, проявившиеся и в других численных экспериментах. Именно, рассмотрим задачу (26),(27) с постоянными коэффициентами $\rho(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$ и двусторонними Дирихле-управлениями из $L^2(0, T)$ на пространственном отрезке длины $l = 1$, временном промежутке $T = 3/2 > T_* = 1$ сверхкритической длины и целевыми функциями $f = (f_0(x), f^1(x))$,

$$f^0(x) = -\pi |\cos(\pi x)|, \quad f^1(x) = -3\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Нормальным управлением, переводящим в такую цель, будет $u_* = (u_0(t), u_1(t))$,

$$u_{*0}(t) = \pi \sin(\pi t), \quad u_{*1}(t) = \pi \sin(\pi t), \quad 0 < t < 3/2, \quad (69)$$

а норма соответствующего ему элемента-источника $v_* = (v_*^0(x), v_*^1(x))$, $v_*^0(x) = -\sin(\pi x)$, $v_*^1(x) = 0$, будет равна $\|v_*\|_{F^*} = \pi/\sqrt{2}$, что позволяет применять VM на шаре радиуса $r = 3 > \pi/\sqrt{2}$. По значениям нормы целевого элемента $\|f\|_F = \pi\sqrt{5}$ и параметра $\mu \stackrel{(37)}{=} 1$ с помощью (11) можно подобрать и другое подходящее для VM значение $r = 10 > \pi\sqrt{5}$. В расчетах мы брали оба указанных значения $r = 3$ и $r = 10$. Варьировались шаги сетки τ , h и уровень

искусственного шума, добавляемого к точным целевым функциям. Отслеживались значения относительных погрешностей по управлению $\frac{\|\tilde{u}-u_*\|_H}{\|u_*\|_H}$ и $\frac{\|\tilde{u}_\diamond-u_*\|_H}{\|u_*\|_H}$, а также количество итераций по переменной λ , необходимых для отыскания VM-управлений. Некоторые из типичных результатов расчетов представлены в следующей таблице и проиллюстрированы на графиках. В таблице символ u означает либо DHUM-управление \tilde{u}_\diamond либо VM-управление \tilde{u} в зависимости от метода, а зашумленная цель обозначена через \tilde{f} . Как видно из (69), компоненты $u_{*0}(t)$ и $u_{*1}(t)$ точного оптимального управления совпадают, поэтому на графиках отображены только левосторонние составляющие управлений $\tilde{u}_{\diamond 0}(t)$, $\tilde{u}_0(t)$ и $u_{*0}(t)$.

	Метод	r	$\frac{\ \tilde{f}-f\ _F}{\ f\ _F}$	$\frac{\ u-u_*\ _H}{\ u_*\ _H}$	Число итер. по λ
1.	DHUM		0	5.8785	
2.	VM	3	0	0.00665	1
3.	VM	10	0	0.00665	1
4.	DHUM		0.01007	19.0811	
5.	VM	3	0.01007	0.02385	11
6.	VM	10	0.01007	0.03820	16
7.	DHUM		0.10086	165.496	
8.	VM	3	0.10086	0.15534	7
9.	VM	10	0.10086	0.18954	11

Таблица. Результаты DHUM и VM для $l = 1$, $T = 3/2$, $h = 1/100$ и $\tau/h = 15/16$.

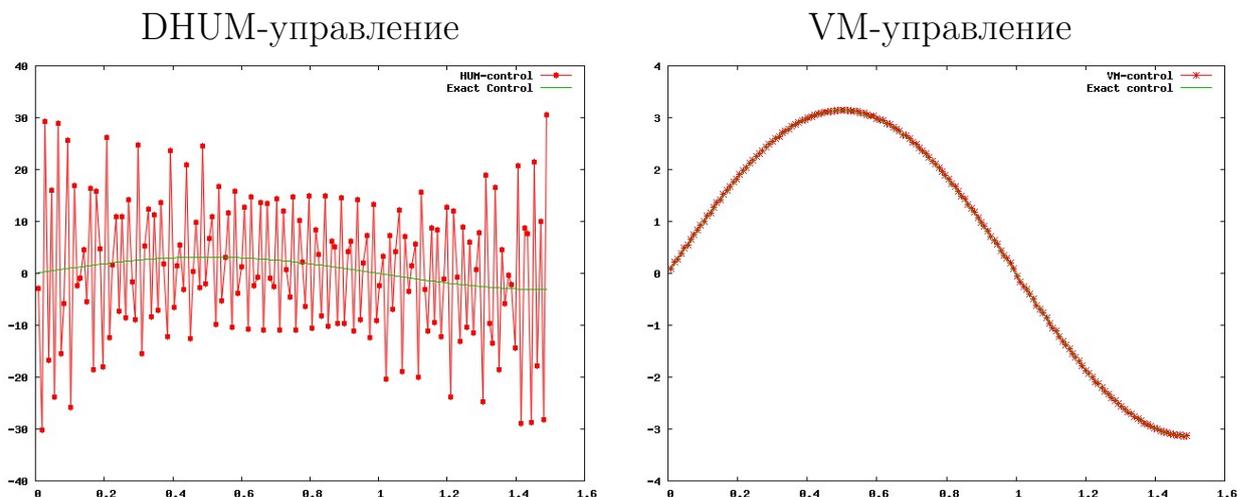


Рис. 1. Графики приближенных управлений при $h = 1/100$, $\tau/h = 15/16$, $r = 3$ в отсутствие шума. Иллюстрации к строкам 1 и 2 таблицы.

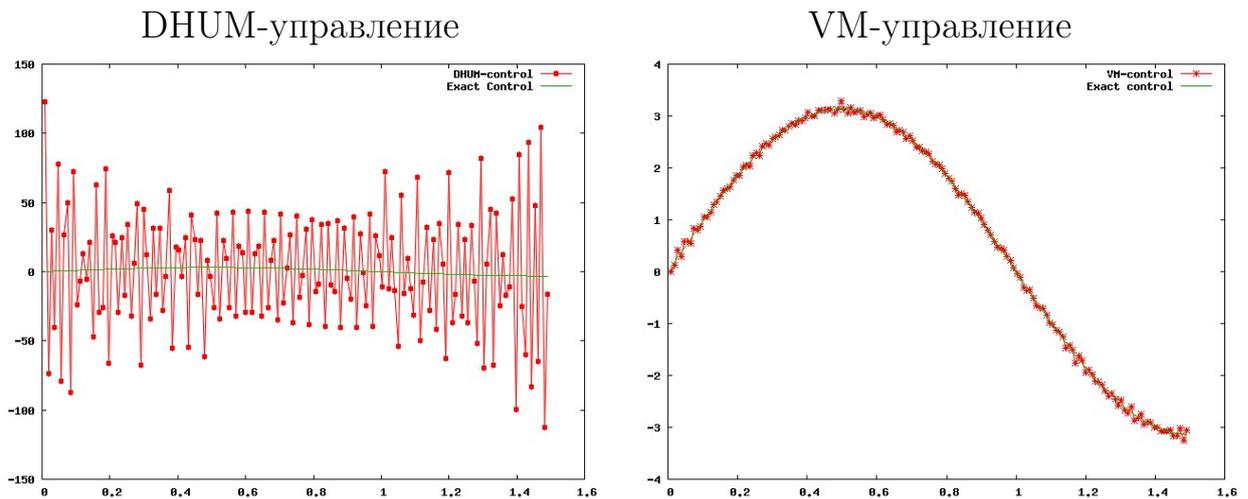


Рис. 2. Графики приближенных управлений при $h = 1/100$, $\tau/h = 15/16$, $r = 3$ при наличии шума уровня 1%. Иллюстрации к строкам 4 и 5 таблицы.

Как было заявлено выше, от сравнительного тестирования нашего универсального вариационного метода и специализированных методов [С12]–[С18] мы воздерживаемся сознательно. Представленные в главе 6 результаты докладывались на конференциях [17, 23, 25, 28].

В заключении подытожен опыт рассмотренных в диссертации приложений и даны некоторые общие рекомендации по определению условий применимости вариационного метода к другим задачам, а при наличии таких условий – по его практической реализации.

Значительная часть результатов диссертации получена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 93-012-602, 98-01-00206, 01-01-00639, 04-01-00619, 07-01-00416) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП 2.1.1.1714).

Автор выражает искреннюю благодарность акад. А.Б.Куржанскому, указавшему в начале 1990-ых гг. на нерешенные проблемы аппроксимации задач управления и наблюдения, и проф. Ф.П.Васильеву за сотрудничество, внимание и поддержку на всех этапах выполнения данной работы.

Список цитированной литературы

- [С1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. – 285 с.
- [С2] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 96 с.

- [C3] *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. – 206 с.
- [C4] *Бакушинский А.Б.* Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 3. С. 672–676.
- [C5] *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. – 128 с.
- [C6] *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.
- [C7] *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. – 182 с.
- [C8] *Леонов А.С., Ягола А.Г.* Можно ли решить некорректную задачу без знания погрешностей данных? // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, Астрономия. 1995. Т. 36. № 4. С. 28–33.
- [C9] *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995. – 312 с.
- [C10] *Vainikko G.* On the discretization and regularization of ill-posed problems with noncompact operators // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1992. V. 13 (3&4). P. 381–396.
- [C11] *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.
- [C12] *Glowinski R., Li C.-H., Lions J.-L.* A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls: Description of the numerical methods. Japan J. Appl. Math. 1990, V. 7. P. 1–76.
- [C13] *Glowinski R., Lions J.L., He J.W.* Exact and approximate controllability for distributed parameter systems: a numerical approach // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 117. Cambridge UK: Cambridge University Press, 2008.
- [C14] *Rinson M.A., Garay M.Z., Miranda M.M.* Numerical Approximation of the Exact Control for the String Equation // International Journal of Pure and Applied Math. 2003. V. 8. № 3. P. 349–368.
- [C15] *Negreanu M., Zuazua E.* Convergence of a multi-grid method for the controllability of 1-d wave equation // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. 2004. V. 338. № 5. P. 413–418.
- [C16] *Zuazua E.* Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM Rev. 2005. V. 47. № 2. P. 197–243.
- [C17] *Münch A.* A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-d wave equation // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2005. V. 39. № 2. P. 377–418.
- [C18] *Castro C., Misu S., Münch A.* Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square // IMA Journal of Numerical Analysis. 2008. V. 28. № 1. P. 186–214.

- [C19] *Васильев Ф.П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
- [C20] *Dolecki S., Russell D.L.* A general theory of observation and control // SIAM J. Control. 1977. V. 15. № 2. P. 185–220.
- [C21] *Russell D.L.* Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Rev. 1978. V. 20. № 4. P. 639–739.
- [C22] *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
- [C23] *Ho L.F.* Observabilité frontière de l'équation des ondes // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1986. V. 302. P. 443–446.
- [C24] *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave-equation with locally distributed control // SIAM J. Control and Optimizat. 1990. V. 28(3). P. 733–748.
- [C25] *Komornik V.* Exact controllability and stabilization. The multiplier method. Chichester: John Wiley and Sons; Paris: Masson, 1994.
- [C26] *Avdonin S.A., Ivanov S.A.* Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability. Problems for Distributed Parameter Systems. Cambridge University Press, 1995.
- [C27] *Krabs W.* Optimal Control of Undamped Linear Vibrations. Lemgo: Heldermann Verlag, 1995.
- [C28] *Lasiecka I., Triggiani R.* Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories II: abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 75. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [C29] *Zuazua E.* Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems. // In Handbook of Differential Equations, Vol. 3: Evolutionary Equations. Chapter 7, C.M.Dafermos and E.Feireisl, eds. Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 527–621.
- [C30] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Изд-во Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
- [C31] *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. – 264 с.
- [C32] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. – 372 с.
- [C33] *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1960. Т. XV. Вып. 2(92). С. 97–154.
- [C34] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

- [С35] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 12. С. 1670–1686.
- [С36] *Lasiecka I., Lions J.L., Triggiani R.* Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators. // J. Math. Pures Appl. 1986. V. 65. P. 149–192.
- [С37] *Ильин В.А.* Задачи теории граничного управления. Избранные труды В.А. Ильина, том 2. М.: Изд-во МАКС-Пресс, 2008. С. 430–661.
- [С38] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 89–114.
- [С39] *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
- [С40] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. – 432 с.
- [С41] *Никитин А.А., Кулешов А.А.* Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием // Дифференц. ур-ния. 2008. Т. 44. № 5. С. 681–690.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1993, № 3. С. 8–15.
2. *Потапов М.М.* О методе прямых в задачах граничного Нейман-управления и Дирихле-наблюдения для волнового уравнения // Тез. докл. весенней Воронежской математической школы «Понтрягинские чтения – V». Воронеж: Изд-во ВГУ, 1994. С. 118.
3. *Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Проекционная схема метода прямых в задачах зонного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1994, № 3. С. 29-35.
4. *Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Аппроксимация некоторых двойственных задач управления-наблюдения для волнового уравнения // Тез. докл. всероссийской конференции «Алгоритмический и численный анализ некорректных задач». Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1995. С. 35.
5. *Потапов М.М.* Об аппроксимации второй и третьей краевых задач пространственно-локализованного управления и наблюдения для уравнения колебаний // Тез. докл. конференции «Обратные и некорректно поставленные задачи». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. С. 38.
6. *Потапов М.М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для гиперболического уравнения с краевыми условиями второго и третьего рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. № 2. С. 35–41.
7. *Potapov M.M.* Stable variational method for linear equations with nonuniform perturbations in operator // Abstracts of International Conference «Inverse and Ill-Posed Problems». Moscow: Dialog-MSU, 1996. P. 144.

8. *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с поточечно возмущенным оператором // Тез. докл. всероссийской науч. конфер. «Алгоритмический анализ некорректных задач». Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1998. С. 204–205.
9. *Потапов М.М.* О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 3. С. 387–397.
10. *Лаврухин А.В., Потапов М.М.* Об аппроксимации нормального псевдорешения при отсутствии информации об уровнях погрешностей // Тез. докл. конфер. «Обратные и некорректно поставленные задачи». М.: Изд-во «Диалог–МГУ», 1998. С. 47.
11. *Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Взаимодвойственные задачи управления и наблюдения в линейных системах, их аппроксимация и регуляризация // Тез. докл. международной конфер., посвященной 90-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина. Оптимальное управление. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 221–223.
12. *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596–598.
13. *Потапов М.М., Костикова О.Р.* Конечномерная аппроксимация двойственных задач управления и наблюдения для уравнения колебаний 4-го порядка // Тез. докл. шестой конфер. «Обратные и некорректно поставленные задачи». М.: Изд-во ООО «МАКС Пресс», 2000. С. 62.
14. *Потапов М.М., Костикова О.Р.* Разностная аппроксимация задач управления и наблюдения для уравнения колебаний четвертого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 1. С. 33–37.
15. *Потапов М.М.* Приближенное решение задач граничного управления и наблюдения для уравнения поперечных колебаний стержня // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45. № 6. С. 1015–1032.
16. *Потапов М.М.* Аппроксимация задачи Дирихле-управления и двойственной задачи с нерегулярными Нейман-наблюдениями для волнового уравнения // Доклады РАН. 2006. Т. 408. № 5. С. 596–600.
17. *Potapov M.M.* Stable Approximation of Dual Control and Observation Problems // International Conference «Tikhonov and Contemporary Mathematics», Moscow, June 19–25 2006. Abstracts of session «Inverse and Ill-Posed Problems». Moscow: Lomonosov MSU, Comput. Math. and Cybern., 2006. P. 153.
18. *Потапов М.М.* Приближенное решение задач Дирихле-управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46. № 12. С. 2191–2208.
19. *Потапов М.М.* Наблюдаемость нерегулярных решений задачи Неймана для волнового уравнения с переменными коэффициентами // Доклады РАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 747–752.
20. *Потапов М.М.* Наблюдаемость нерегулярных решений третьей краевой задачи для волнового уравнения с переменными коэффициентами // Доклады РАН. 2007. Т. 414. № 6. С. 738–742.

21. *Потапов М.М.* Об уточнении порогового момента в задачах с двусторонними управлениями и наблюдениями для волнового уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. № 1. С. 151–157.
22. *Потапов М.М.* Разностная аппроксимация задач Дирихле-наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47. № 8. С. 1323–1339.
23. *Потапов М.М.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения для волнового уравнения // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г.Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара И.Г.Петровского, Москва, 21–26 мая 2007 г.): Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2007. – 384 с. С. 250–251.
24. *Потапов М.М.* Приближенное решение двойственных задач зонного управления и наблюдения для волнового уравнения // В кн. «Современные методы теории краевых задач»: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XIX». Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. С. 171–173.
25. *Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Приближенное решение задач управления и наблюдения для волнового уравнения // В кн. «Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина: Тезисы докладов». – М.: МАКС Пресс, 2008. С. 326–327.
26. *Потапов М.М.* Двойственные задачи зонного управления и наблюдения для волнового уравнения // В кн. «Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина: Тезисы докладов». – М.: МАКС Пресс, 2008. С. 389.
27. Potapov M.M. Stable approximation to zone control and observation problems for the wave equation // В кн. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.К.Иванова, Екатеринбург, 1–6 сент. 2008 г.». – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008. – 324 с. С. 251.
28. *Потапов М.М.* Устойчивая аппроксимация оптимальных Дирихле-управлений для волнового уравнения // В кн. «Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовниченко». – М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. – 416 с. С. 192.