МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.Ломоносова

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
Кафедра общей математики

На правах рукописи

УДК 517.927.25

Афонин Сергей Владимирович

СХОДИМОСТЬ В L^p СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009 г.

Работа выполнена на кафедре общей математики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ломов Игорь Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Макин Александр Сергеевич кандидат физико-математических наук, доцент Разборов Алексей Геннадьевич
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов

Защита состоится 10 марта 2010 года в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (второй учебный корпус, 1 этаж).

Автореферат разослан "   " февраля 2010 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена изучению свойств систем собственных и присоединенных функций линейных обыкновенных дифференциальных операторов нечетного порядка, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Операторы могут быть как самосопряженными, так и несамосопряженными (в том числе, существенно несамосопряженными, системы корневых функций которых содержат бесконечное число присоединенных функций). Развивается спектральный метод В.А.Ильина изучения дифференциальных операторов безотносительно конкретного вида краевых условий, что допускает единообразное рассмотрение самых разных прикладных задач.

Большую роль в привлечении математиков к спектральной теории дифференциальных операторов сыграла монография Э.Ч. Титчмарша, в которой дан новый подход к теории сингулярных операторов Штурма-Лиувилля и поставлен (частично под влиянием задач квантовой механики) и решен целый ряд новых задач. В этой книге была получена важная для данной работы так называемая формула среднего значения Титчмарша для собственных функций оператора второго порядка.

М.В. Келдыш в 1951 году установил теоремы о полноте системы корневых векторов и теоремы об асимптотических свойствах собственных чисел для широкого класса полиномиальных пучков несамосопряженных операторов. Эти теоремы привели также к новым сильным результатам для обыкновенных дифференциальных операторов. Работы М.В. Келдыша стимулировали исследования свойств полноты и минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов и разложимости функций в ряды по этим системам, и в настоящее время эти задачи достаточно полно изучены.

В 1975 г. В.А. Ильин опубликовал две работы, заложившие основу нового метода исследования свойств собственных и присоединенных функций как самосопряженных, так и несамосопряженных дифференциальных операторов (модификация спектрального метода Ильина, разработанного для исследования самосопряженных эллиптических операторов). Эти работы посвящены вопросам локальной базисности подсистемы корневых функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов и вопросам равносходимости разложений. Новый подход заключался в отказе от рассмотрения конкретных краевых форм оператора. Заменяли их конструктивные и легко проверяемые условия на собственные значения и системы корневых функций, т.е. рассматриваются некоторые сужения максимального оператора.

При использовании рядов Фурье по системам корневых функций дифференциальных операторов, наряду с вопросами о полноте и базисности этих систем в соответствующих функциональных пространствах возникает задача об оценке скорости сходимости этих рядов к рассматриваемым функциям. Хорошо известны результаты о порядке приближения широких классов функций ортогональными рядами (можно отметить работы Г. Алексича, С.М. Никольского, С.Б. Стечкина, С.А. Теляковского). Менее изучены в этом отношении биортогональные ряды, каковыми в основном являются ряды по системам корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов. Наиболее естественный путь при решении отмеченной задачи – это сравнение разложений функций по исследуемой биортогональной системе и по близкой ей в каком-то смысле и хорошо изученной системе функций (например, тригонометрическому ряду Фурье (ТРФ)).

Начиная с результатов В.А. Стеклова и Ж. Биркгофа многие работы по разложению по корневым функциям регулярных дифференциальных операторов посвящены тому, чтобы показать, что эти ряды ведут себя строго внутри интервала сходимости как обычные ТРФ (в дополнение к указанным выше отметим также работы по рядам Лежандра и рядам Фурье-Бесселя У. Юнга и М.Л. Гольдмана). Вопрос о скорости равносходимости таких разложений, видимо, впервые был рассмотрен в 1978г. в работах В.А. Ильина и И. Йо.

Для произвольного неотрицательного самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом $q(x) \in L^r(G), r > 1, G = (0,1)$, была получена точная оценка $O(\frac{1}{\lambda})$ скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$ спектрального разложения $\sigma_\lambda(x, f)$ произвольной абсолютно непрерывной функции $f(x)$ с $S_\lambda(x, f)$ – частичной суммой ТРФ этой функции. Этот результат перенесен В.Е. Волковым и И. Йо на несамосопряженные операторы Шредингера с потенциалами из L^2, затем Е.И. Никольской на случай произвольных суммируемых потенциалов, оценка скорости равносходимости $O(\frac{\ln\lambda}{\lambda})$.

В дальнейшем В.А. Ильиным и его учениками метод был применен к широкому классу неисследованных ранее обыкновенных и эллиптических операторов, спектральные задачи для которых содержали линейно собственные значения. Получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в $L^2(0,1)$ систем корневых функций, локальной базисности и локальной равносходимости биортогональных разложений функций с ТРФ, равносходимости этих разложений на всем отрезке.

В основе метода лежит рассмотрение обобщенных корневых функций оператора, являющихся только регулярными решениями соответствующего дифференциального уравнения со спектральным параметром. Идея такого подхода восходит к А.Н. Тихонову. Используются интегральные представления (формулы среднего значения) для решений этого уравнения. В случае исследования равносходимости разложений, из ядра Дирихле выделяется спектральная функция оператора и далее проводится эффективная оценка остатка с использованием априорных оценок корневых функций.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям (или не удовлетворять никаким краевым условиям без спектрального параметра, как в случае системы экспонент), поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке $\overline{G}$ в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценки скорости равносходимости разложений или оценки порядка приближения функций спектральными разложениями именно на всем G, причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. В работах И.С. Ломова для того же оператора, что в работах В.А. Ильина и И. Йо, для функции ограниченной вариации получена оценка $O(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{1/p}})$ скорости равносходимости тех же разложений, но впервые это было сделано *на всем интервале* G в интегральной метрике $L^p(G), p \geq 2$; получена оценка порядка приближения функций этими рядами. Этот результат позже был перенесен И.С. Ломовым на несамосопряженный оператор Шредингера, причем получена точная оценка $O(\frac{1}{\lambda^{1/p}})$, на оператор второго порядка с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной, $p_1 \in L^s(G)$, $s \geq 1$, оператор L^* не привлекался. Также И.С. Ломов установил оценки скорости равносходимости с разложением ТРФ спектральных разложений по корневым функциям дифференциального оператора произвольного четного порядка на внутреннем компакте и на всем интервале. Схожие вопросы локальной равносходимости для дифференциальных операторов произвольного порядка с негладкими коэффициентами изучались В.М. Курбановым, однако доказательства полученных результатов были им приведены лишь для операторов четного порядка.

Отметим также работы А.С. Макина, посвященные изучению базисности систем корневых функций и асимптотики спектра, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля с регулярными и нерегулярными краевыми условиями.

В спектральном методе В.А. Ильина важную роль играют формулы среднего значения для корневых функций дифференциальных операторов – интегральные представления решений дифференциальных уравнений со спектральным параметром, сохраняющие основные характеристики этих уравнений. Как уже было сказано, одной из первых работ, содержащих это представление, была книга Э.Ч. Титчмарша, где была получена формула среднего значения для регулярного решения самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Е.И. Моисеев распространил эту формулу на случай присоединенных функций и на случай уравнений более высокого порядка с гладкими коэффициентами (формула среднего Моисеева). И. С. Ломовым была получена модификация формулы Моисеева для операторов четного порядка с негладкими коэффициентами. В.М. Курбанов установил аналог формулы среднего значения для операторов произвольного порядка с негладкими коэффициентами, однако доказательство формулы было им приведено лишь для операторов четного порядка.

Цель работы. В работе изучаются свойства корневых функций линейных обыкновенных дифференциальных операторов нечетного порядка с негладкими коэффициентами и сходимость соответствующих биортогональных разложений. Цель работы состоит в получении оценок скорости равносходимости таких биортогональных разложений с разложением в тригонометрический ряд Фурье (ТРФ).

Основные результаты работы.

1. Получены формулы сдвига (аналоги формулы среднего значения), выражающие значения корневой функции в точках $y + r$ и $y - r$ через значения этой функции и ее производных в точке y и через интегралы по отрезкам $[y, y+r]$ и $[y-r, r]$ соответственно. (точные формулы сдвига для операторов первого порядка и асимптотические – для операторов нечетного порядка выше первого).

2. Получены оценки скорости равносходимости биортогональных разложений по корневым функциям дифференциального оператора нечетного порядка с разложением в ТРФ на произвольном внутреннем компакте (по отношению к интервалу, на котором задана дифференциальная опера-

ция).

3. Получены оценки скорости равносходимости биортогональных разложений по корневым функциям дифференциального оператора нечетного порядка с разложением в ТРФ на всем интервале.

Методы исследований. В работе используются теория дифференциальных уравнений, общие методы комплексного и функционального анализа, а также спектральный метод В. А. Ильина.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут найти применение при обоснования метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других, приводящих к изучению несамосопряженных операторов. Также результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов по спектральной теории дифференциальных операторов для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация результатов работы. Результаты настоящей диссертации докладывались на научной конференции "Тихоновские чтения 2008"; на научно-исследовательском семинаре МЭИ по дифференциальным уравнениям под руководством профессоров Дубинского Ю.А и Амосова А.А.

Публикации автора. По теме диссертации опубликовано 4 работы, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации 108 страниц.

Список литературы содержит 82 наименования, включая работы автора.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проводится общий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, раскрываются ее цели и задачи, а также приводится краткое изложение результатов диссертации.

Первая глава диссертации посвящена выводу формул сдвига, выражающих значения корневой функции в точках $y+r$ и $y-r$ через значения этой функции и ее производных в точке y и через интегралы по отрезкам $[y, y+r]$ и $[y-r, r]$ соответственно. Получены точные формулы сдвига для операторов первого порядка и асимптотические – для операторов нечетного порядка выше первого.

Рассматривается произвольный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0,1), \quad n = 2l+1, \quad l \in Z, \quad l \geq 0,$$

на классе функций D_n, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно;

$$a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Корневые (собственные и присоединенные) функции определяются в обобщенном (по В.А. Ильину) смысле. Обыкновенно под *собственной функцией оператора* L, отвечающей собственному значению $\Lambda \in C$, понимают любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{0}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{0}{u} + \Lambda \overset{0}{u} = 0$. Следуя подходу В.А.Ильина, введем новый спектральный параметр λ:

$$\lambda \ = \ \begin{cases} [(-i)\Lambda]^{1/n}, & \mathrm{Im}\Lambda \geq 0, \\ [i\Lambda]^{1/n}, & \mathrm{Im}\Lambda < 0, \end{cases}$$

где мы полагаем $[re^{i\phi}]^{1/n} = r^{1/n}e^{\frac{i\phi}{n}}$ при $-\frac{\pi}{2} < \phi \le \frac{3\pi}{2}$. Используя введенное обозначение, под *собственной функцией оператора* L, отвечающей спектральному параметру $\lambda \in C$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{0}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l\overset{0}{u} - \omega\lambda^n \overset{0}{u} = 0$, где $\omega = -i$ при $\mathrm{Im}\Lambda \ge 0$ и $\omega = +i$ при $\mathrm{Im}\Lambda < 0$. Под *присоединенной функцией порядка* $m, m = \overline{1, m_0}$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду удовлетворяет уравнению $l\overset{m}{u} - \omega\lambda^n \overset{m}{u} = \mu_0 \overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_0 = 1$ (задача 1), либо $\mu_0 = \lambda^{n-1}$ при $|\lambda| \ge 1$ и $\mu_0 = 1$ при $|\lambda| < 1$ (задача 2). Считаем, что $\lambda \in S_1 = \{\lambda \in C: \ \exists\gamma_0 > 0: \ |\mathrm{Im}\lambda| \ \le \ \gamma_0\}$

Зафиксируем произвольные числа $y \in G$, $R \in (0, dist(y, \partial G))$, $r \in (0, R]$. Тогда справедливы следующие формулы сдвига ($n = 2l+1 \ge 3$):

$$\overset{m}{u}(y+r) = \sum_{i=0}^{m} \Bigg\{ \overset{m-i}{u}(y) B_{1r}^{i}(\cos\lambda t_i) + \sum_{j=l}^{n-1} B_{1r}^{i}\left[T_j^{+}(t_i) X_j^{+}(\overset{m-i}{u}, y, t_i)\right] -$$

$$-\frac{1}{\mu_0} B_{1r}^{i+1}\left[\tilde{A}\overset{m-i}{u}(y+t_{i+1})\right] + \sum_{j=0}^{l-1} B_{1r}^{i}\left[E_j^{+}(\overset{m-i}{u}, R, t_i)\right] \Bigg\},$$

$$\overset{m}{u}(y-r) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \Bigg\{ \overset{m-i}{u}(y) B_{2r}^{i}(\cos\lambda t_i) + \sum_{j=0}^{l} B_{2r}^{i}\left[T_j^{-}(t_i) X_j^{-}(\overset{m-i}{u}, y, t_i)\right] +$$

$$+\frac{1}{\mu_0} B_{2r}^{i+1}\left[\tilde{A}\overset{m-i}{u}(y-t_{i+1})\right] + \sum_{j=l+1}^{n-1} B_{2r}^{i}\left[E_j^{-}(\overset{m-i}{u}, R, t_i)\right] \Bigg\},$$

где

$$P_j(u, y) = \frac{(-1)^{l+1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(y)\,\omega^{n-1-k}}{\lambda^k}\,\omega_j^{n-k},$$

$$X_j^+(u,y,r) \; = \; \begin{cases} P_j(u,y) + \frac{(-1)^{l+1}}{n\lambda^{n-1}} \int\limits_0^r \omega_j e^{-\omega_j\omega\lambda t}[Au(y+t)]dt, & j=\overline{(0,l-1)}, \\ P_j(u,y), & j=\overline{(l,n-1)}, \end{cases}$$

$$X_j^-(u,y,r) \; = \; \begin{cases} P_j(u,y), & j=\overline{(0,l)}, \\ P_j(u,y) - \frac{(-1)^{l+1}}{n\lambda^{n-1}} \int\limits_0^r \omega_j e^{\omega_j\omega\lambda t}[Au(y-t)]dt, & j=\overline{(l+1,n-1)}, \end{cases}$$

$$B_{sr}^i(f(t_i)) = \Big(\frac{\mu_0}{n\lambda^{n-1}}\Big)^i \int\limits_0^{t_0} \dots \int\limits_0^{t_{i-1}} f(t_i) \prod_{k=1}^{i} Q_s{}'(\lambda, t_k, t_{k-1}) dt_i \dots dt_1,$$

$$t_0 \equiv r, \quad s=1,2, \quad i \in N,$$

а $E_j^{\pm}(\overset{m-i}{u}, R, t_i)$ – "исключенные" растущие слагаемые $T^{\pm}(\overset{m-i}{u}, R, t_i) X^{\pm}(\overset{m-i}{u}, R, t_i)$, для которых справедливы следующие представления и оценки:

$$E_j^{\pm}(u,R,r) = \frac{T_j^{\pm}(r)}{T_j^{\pm}(R)} \Psi_i(u,y,R) - \sum_{\substack{0 \le m \le l-1 \\ m \ne j,\, m \notin M_i}} \frac{T_m^{\pm}(R) T_j^{\pm}(r)}{T_j^{\pm}(R)} X_m^+(R) - T_j^{\pm}(r) Y_j^{\pm}(R,r),$$

$$\left| \frac{T_j^{\pm}(r)}{T_j^{\pm}(R)} \right| \le \begin{cases} ce^{-2a|\lambda|(R-r)}, & |\lambda r| \ge 1, \\ c|\lambda r| e^{-2a|\lambda|(R-r)}, & |\lambda r| < 1, \end{cases}$$

$$\left| \frac{T_i^{\pm}(R) T_j^{\pm}(r)}{T_j^{\pm}(R)} \right| \le \begin{cases} ce^{-|\lambda|(2R/n^2 - r)}, & |\lambda r| \ge 1, \\ c|\lambda r| e^{-|\lambda|(2R/n^2 - r)}, & |\lambda r| < 1, i \ne j, \end{cases}$$

$$\left| T_j^{\pm}(r) Y_j^{\pm}(R,r) \right| \le \frac{1}{n|\lambda|^{n-1}} \int\limits_r^R |Au(y \pm t)| \left| e^{\mp\omega_j\omega\lambda t} T_j^{\pm}(r) \right| dt,$$

$$\left| e^{\mp\omega_j\omega\lambda t} T_j^{\pm}(r) \right| \le \begin{cases} ce^{-2a|\lambda|(|t|-r)}, & |\lambda r| \ge 1, \\ c|\lambda r| e^{-2a|\lambda|(|t|-r)}, & |\lambda r| < 1. \end{cases}$$

В случае оператора первого порядка ($n = 1$) получены точные формулы сдвига:

$$\overset{m}{u}(y+r) = \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{r^l}{l!}\mu^l \overset{m-l}{u}(y)\right] e^{\omega\lambda r} -$$

$$-\int\limits_{y}^{y+r} a_0(x) e^{-\omega\lambda(x-y-r)} \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{(r-x+y)^l}{l!}\mu^l \overset{m-l}{u}(x)\right] dx,$$

$$\overset{m}{u}(y-r) = \left[\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \frac{r^l}{l!}\mu^l \overset{m-l}{u}(y)\right] e^{-\omega\lambda r} +$$

$$+\int\limits_{y-r}^{y} a_0(x) e^{-\omega\lambda(x-y+r)} \left[\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \frac{(x-y+r)^l}{l!}\mu^l \overset{m-l}{u}(x)\right] dx.$$

Во **второй главе** устанавливаются оценки скорости равносходимости спектрального разложения по корневым функциям дифференциального оператора первого порядка в интегральной метрике L^p, $p \in [1, \infty)$, на любом отрезке $K \subset G = [0, 1]$ с разложением в обычный тригонометрический ряд Фурье. Оператор порожден дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u' + a_0(x)u, \qquad x \in G = (0, 1),$$

на классе функций D , абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$;

$$a_0(x) \in L^s(G), \qquad s \geq 1. \tag{1}$$

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую этим собственным значениям, удовлетворяющие следующим трем *условиям Ильина*, назовем их *условиями A :*

1. Система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в $L^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$.

2. Существуют $c_1, c_2 = const > 0$ такие, что

$$|Im\lambda_k| \le c_1 \quad \forall k, \qquad \sum_{0 \le |\lambda_k| - \lambda \le 1} 1 \le c_2 \quad \forall \lambda \ge 0.$$

3. Существует $c_3 = const > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \|v_k\|_{r'} \le c_3 \quad \forall k,$$

где $\{v_k\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$ система функций: $v_k \in L^{r'}(G)$, $(u_k, v_j) = \delta_{kj} \quad \forall k,\, j \in N$, $r' = r/(r-1)$; $\|\cdot\|_r$ — обозначение нормы в $L^r(G)$.

Для произвольной функции $f(x) \in L^r(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} f_k u_k(x), \qquad \lambda > 0, \qquad f_k \equiv (f, v_k).$$

Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение $f(x)$ для оператора $L_0 u = u''$ с условиями периодичности в 0 и 1.

Наложим дополнительно ограничение на систему $\{u_k, v_k\}$ и функции $f(x)$:

$$\exists \nu = const > 0: \qquad \alpha_k f_k = O\left(\lambda_k^{-\nu}\right), \qquad |\lambda_k| \ge 1, \tag{2}$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}$.

Теорема 2.1. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (1), (2) и условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{L^p(K)} \le \begin{cases} c \max(\lambda^{-1} \ln \lambda, \lambda^{-\nu} \ln^2 \lambda), & s \ge p \\ c \max(\lambda^{-\nu + 1/s - 1/p} \ln \lambda, \lambda^{-1 + 1/s - 1/p}), & s < p. \end{cases} \tag{3}$$

с постоянной c, не зависящей от λ.

В **третьей главе** устанавливаются аналогичные оценки скорости равносходимости (на внутреннем компакте) для операторов произвольного нечетного порядка.

Рассматривается произвольный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальной операцией

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x), \qquad x \in G = (0,1), \quad n = 2l+1, \quad l \in Z, \quad l \geq 0;$$

$$a_{n-1}(x) \in L^s(G), \quad s \geq 1, \quad a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{4}$$

на классе функций D_n, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно.

Фиксируем некоторые числа $r_0 \in [1, \infty)$, $\gamma_0 > 0$. Выбираем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трем *условиям Ильина* (*условиям A*).

Присоединенные функции выберем так, чтобы в корневых цепочках была справедлива "антиаприорная" оценка

$$\| \overset{m-1}{u_k} \|_{r_0} \leq c\alpha_\lambda \| \overset{m}{u_k} \|_{r_0}, \qquad c = const > 0, \quad m = \overline{1, m_k}, \tag{5}$$

c не зависит от $\lambda_k, \alpha_\lambda = |\lambda_k|^{n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2; m_k – длина цепочки из присоединенных к u_k функций. Для $n \geq 3$ такую систему всегда можно построить [1]. Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_\infty \leq c\|u_k\|_{r_0} \quad \forall k; \quad c = const > 0. \tag{6}$$

[1]Будаев В.Д. Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1993.

Фиксируем произвольное $p \in [1, \infty)$.

Теорема 3.1. *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2), (4)-(6) и условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{L^p(K)} \le c\left[\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \lambda^{-\nu}\ln^2\lambda\right) + \right.$$

$$+\|a_{n-1}\|_s \max\left(\lambda^{-1}, \lambda^{-\nu}\ln^2\lambda, \lambda^{-\nu+\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\ln\lambda, \lambda^{-1+\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\right) +$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2}\|a_q\|_1 \lambda^{-\frac{1}{p}} + m_0\lambda^{-\nu}\ln^2\lambda\right] \tag{7}$$

с постоянной c, не зависящей от λ, $m_0 = \max m_k$.

Для сравнения приведем аналогичные оценки для дифференциальных операторов четного порядка, полученные И.С. Ломовым [2]. Пусть дифференциальный оператор L порожден следующей дифференциальной операцией ($n = 2l$, $l \in Z, \quad l \ge 1$):

$$Lu \equiv u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)u^{(k)}(x), \quad x \in G = (0,1),$$

$$a_{n-1}(x) \in L^s(G), \quad s \ge 1, \quad a_k(x) \in L(G), \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{8}$$

Тогда справедлива

Теорема 3.1*.*Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (8), (4)-(6) и условия А. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \le c\left[\max\left(\lambda^{-1}, \lambda^{-\nu}\right) + \right.$$

$$+\|a_{n-1}\|_s \max\left(\lambda^{-\nu}\ln^2\lambda, \lambda^{-\nu+\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\ln\lambda\right) +$$

[2] Ломов И.С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I, II// Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, № 3. С. 328-342; № 5. С. 648-660.

$$+\sum_{q=0}^{n-2}\|a_q\|_1 \max\left(\lambda^{-1-\nu}\ln^2\lambda, \lambda^{-\nu-\frac{1}{p}}\ln\lambda\right)+m_0\lambda^{-\nu}\Bigg]$$

с постоянной c, не зависящей от λ, $m_0=\max m_k$.

В **четвертой главе** для операторов произвольного нечетного порядка установлена оценка скорости равносходимости спектрального разложения и ТРФ на всем интервале.

Фиксируем произвольное $p\in[1,\infty)$. Положим $\delta=\min(2,q,s)$, где $q=p/(p-1)$.

Теорема 4.1. *Если для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (2), (4)-(6) и условий A, то для всех достаточно больших чисел λ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_p\le c\max\left[\lambda^{-1/p},\lambda^{-\nu+1/\delta}\right] \tag{9}$$

с постоянной c, не зависящей от λ.

Для дифференциальных операторов четного порядка И.С. Ломовым [3] была доказана

Теорема 4.1*. *Если для оператора L и функции $f(x)$ выполняются условия (8), (4)-(6) и условия A, то для всех достаточно больших чисел λ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_p\le c\left[\max\left(\lambda^{-1},\lambda^{-\nu+1/\delta},\lambda^{-1}\ln^{1/\delta}\lambda|_{\nu=1+1/\delta}\right)+\right.$$

$$\left.+\|a_{n-1}\|_s\lambda^{-1/s'}+\|a_j\|_1\max(\lambda^{-1/p},\lambda^{-1}\ln\lambda)\right]$$

с постоянной c, не зависящей от λ, где $s'=s/(s-1)$, $\|a_j\|_1=\max\|a_q\|_1$, $q=\overline{0,n-2}$.

Обозначим через $V(G)$ класс функций, имеющих ограниченное изменение на множестве G. Справедливо

[3] Ломов И.С. Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка//Дифференц. уравнения. 2005. Т.41, № 5. С. 632-646.

Следствие из теоремы 4.1 *Если $p \in [1, \infty)$, $f \in V(G)$ и выполняются условия A, (2), (4)-(6) тогда*

$$\|f - \sigma_\lambda(x, f)\|_p = O(\max\left[\lambda^{-1/p}, \lambda^{-\nu+1/\delta}\right]).$$

Оценку следствия можно сравнить с известной оценкой скорости сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in V(G)$:

$$\|f - S_\lambda(x, f)\|_p = O(\lambda^{-1/p}).$$

В **пятой главе** рассмотрены несколько примеров применения результатов глав 2-4 к конкретным дифференциальным операторам.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Ломову Игорю Сергеевичу за предложенную тематику исследований, постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Афонин С.В. О скорости сходимости биортогональных рядов для дифференциальных операторов первого порядка// Сборник статей молодых ученых ф-та ВМиК МГУ. 2006. Выпуск №3. С. 8-31.

2. Афонин С.В. Формулы сдвига для корневых функций дифференциальных операторов нечетного порядка с негладкими коэффициентами// Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, №6, С. 723-737.

3. Афонин С.В. Оценка скорости сходимости спектральных разложений несамосопряженных дифференциальных операторов нечетного порядка на отрезке// Деп. в ВИНИТИ 30.10.2009 № 677-В2009.

4. Афонин С.В., Ломов И.С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами// Докл. РАН. 2010. Т. 431, №2. С. 151-153.