

**Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики**

На правах рукописи

Сергеев Сергей Андреевич

**Граничное управление колебаниями сферического
слоя за большие и малые времена.**

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

**Москва
2010**

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор
Ильин Владимир Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор (РУДН)
Арутюнов Арам Владимирович

кандидат физико-математических наук,
доцент (ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова)
Потапов Михаил Михайлович

Ведущая организация:

Институт программных систем РАН.

Защита состоится «10» марта 2010 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ: <http://cs.msu.su> в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «...» 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43
доктор физико-математических наук,
профессор

Захаров Е.В.

Актуальность темы. Многие современные технические устройства и системы, например самолеты и другие летательные аппараты, работают в экстремальных условиях, и поэтому в них могут возникать нежелательные и даже опасные колебания. В подобных устройствах такие колебания необходимо гасить как можно быстрее. С другой стороны, в некоторых объектах, наоборот, необходимо генерировать колебания заданной частоты. Таким образом возникает два сорта задач: задачи о гашении колебаний и задачи о возбуждении колебаний. Как правило, при этом возникает оптимизационная задача: успокоить или возбудить систему с минимальным затратами ресурсов.

В чисто математическом плане подобные задачи формулируются в терминах граничных задач для различных уравнений гиперболического типа. А критерием оптимальности может быть, в общем случае, произвольное условие, но, как правило, выбирается условие минимизации функционала, в той или иной степени связанного с нормой функции.

Вопросы, связанные с колебаниями сферы и сферического осциллятора, тесно связаны с процессами и задачами, возникающими в акустических системах, а также в квантовой и электромагнитной механике.

В случае колебаний при радиальной симметрии потенциал скорости сферической волны удовлетворяет следующему уравнению:

$$u_{tt}(r, t) - \frac{1}{r^2}[r^2 u_r(r, t)]_r = 0,$$

где переменная r — есть пространственная координата, а t — координата по времени. Если известен такой потенциал волны, то по нему можно вычислить скорость распространения волны, ее энергию и другие необходимые на практике величины.

Вопросы о генерации, гашении и управлении колебаниями сферического слоя являются на сегодняшний день актуальными и интересными с точки зрения их прикладной важности во многих разделах физики.

Помимо акустики подобные задачи возникают в физике плазмы, например при рассмотрении колебаний газо-электронного облака в плазме при условии радиальной симметрии.

Идеи возбуждения электромагнитных волн при помощи колебаний сферы были положены в разработку кристаллического осциллятора, применяющегося в радио и основанного на колебаниях сферы из пьезоэлемента для создания электрического сигнала заданной частоты. Уже в 1894 году Аугусто Ричи был предложен сферический генератор электромагнитных волн.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение задач граничного управления колебаниями сферически-симметричного слоя, явное построение граничного управления, формулировка и решение задач оптимизации управления в тех случаях, когда это необходимо, а также выяснение необходимых и достаточных условий существования граничного управления.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость.

1. Решены задачи управления колебаниями в случае смещения и силы. Найдено оптимальное управление, отвечающее общему виду критерия оптимальности в обоих случаях управления.
2. Получены необходимые и достаточные условия существования граничного управления колебаниями слоя при критических временах и меньших критических. Получены явные формулы для такого управления.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах В.А. Ильина, И.А. Шишмарева, Ф.П. Васильева и А.В. Арутюнова, конференции "ЛОМОНОСОВ-2009", и конференции, посвященной 70-летию академика В.А. Садовниченко.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в четырех работах, две из них — в изданиях, рекомендованных ВАК, две — тезисы докладов конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из шести глав (первая из которых вводная) и списка литературы. Текст изложен на 72 страницах, диссертация содержит 3 рисунка. Список литературы включает в себя 26 наименований.

Содержание работы.

Во **введении** раскрывается актуальность темы работы, приводится краткое описание уже имеющихся на момент написания работы результатов и проблем, которые возникают при исследовании подобных задач. Приведен краткий обзор уже существующих методов и подходов решения задач граничного управления.

Во **второй главе** дается краткая формулировка задач, которые будут исследоваться в дальнейшем и объясняется метод их решения. Вводятся основные определения функциональных пространств и обобщенных решений решаемых задач. Кратко формулируется метод решения задач и проводятся необходимые для этого построения, а также вводятся некоторые обозначения.

Параграф §2.1 посвящен формулировке основных задач.

Радиально-симметрические колебания описываются уравнением

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(r, t) - \frac{1}{r^2}[r^2 u_r(r, t)]_r = 0, (r, t) \in B_T \quad (1)$$

Здесь B_T — это прямоугольник $\{0 < R_1 < r < R_2\} \times \{0 < t < T\}$, а T — момент времени, за который осуществляется управление. Дадим определение функционального класса, в котором ищется решение этого уравнения.

Определение. Будем говорить, что функция $u(r, t)$ принадлежит классу $\hat{W}_2^1$ в области B_T , если она принадлежит на этом множестве классу W_2^1 , а также имеет для любого $r_0 \in [R_1, R_2]$ след $u(r_0, t) \in W_2^1[0, T]$, и для любого $t_0 \in [0, T]$ след $u(r, t_0) \in W_2^1[R_1, R_2]$.

Этот класс впервые был введен В.А. Ильиным в работе [1], и в ней же показана естественность этого класса по отношению к задачам граничного управления колебаниями, описываемыми волновым уравнением.

В каждый момент времени состояние колеблющейся системы описывается двумя функциями $\{\varphi(r), \psi(r)\}$ — смещением и скоростью соответственно. Известны начальное и финальное состояние:

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= \varphi(r), & u_t(r, 0) &= \psi(r), \\ u(r, T) &= \varphi_1(r), & u_t(r, T) &= \psi_1(r). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $\varphi(r), \varphi_1(r) \in W_2^1(R_1, R_2)$, $\psi(r), \psi_1(r) \in L_2(R_1, R_2)$.

Момент времени T выбирается различным, в зависимости от задачи. Либо он строго больше ширины слоя $l \equiv R_2 - R_1$, либо равен ей, либо строго меньше этого значения. В зависимости от этого соотношения граничное управление существует для произвольных начальных и финальных данных, либо на эти функции накладываются дополнительные условия.

Общая постановка задач управления ставится следующим образом: найти граничное управление, переводящее за момент времени T систему из начального состояния в финальное. В зависимости от метода задания управления получаются различные задачи. В данной работе исследуются следующие задачи граничного управления для (1), (2):

1. Найти граничное управление заданное по формуле

$$u(R_1, t) = \mu(t), \quad u(R_2, t) = \nu(t), \quad (3)$$

из класса $W_2^1(0, T)$, при условии, что момент времени T определяется по формуле $T = 2ml + \Delta$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а Δ — произвольное число из интервала $[0, 2l]$, и $T > l$.

В данном случае необходимо выполнение условия согласования следов, которые следуют из определения функциональных классов:

$$\mu(0) = \varphi(R_1), \mu(T) = \varphi_1(R_1), \nu(0) = \varphi(R_2), \nu(T) = \varphi_1(R_2).$$

В дальнейшем, при рассмотрении задач управления смещением, мы считаем, что эти условия выполнены.

2. Во второй задаче требуется найти граничное управление

$$u_r(R_1, t) + \frac{1}{R_1}u(R_1, t) = \mu(t) \quad u_r(R_2, t) + \frac{1}{R_2}u(R_2, t) = \nu(t), \quad (4)$$

при таких же предположениях на значение момента времени T , что и в первой задаче. Однако теперь функции граничного управления ищутся в классе $L_2(0, T)$, и уже не требуется выполнение условия совпадения следов на границе.

3. Третья задача состоит в выяснении необходимых и достаточных условий существования граничных управлений (3), (4) в случае, когда момент времени T меньше или равен критическому, т.е. $T \leq l$.

Теперь дадим определения обобщенного решения для указанных задач. Если управление задано смещением, т.е. по правилу (3), то решение определяется следующим образом.

Определение. Решением из класса $\hat{W}_2^1(B_T)$ задачи (1), (2), (3) назовем функцию $u(r, t)$, которая для любой пробной функции $\Phi(r, t) \in C^2(\overline{B_T})$, удовлетворяющей условиям $\Phi(R_1, t) \equiv \Phi(R_2, t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, T]$, $\Phi(r, T) \equiv \Phi_t(r, T) \equiv 0$ для всех $r \in [R_1, R_2]$, обращает в тождество следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{R_1}^{R_2} u(r, t) \mathcal{L}\Phi(r, t) r^2 dr dt + \int_{R_1}^{R_2} \varphi(r) \Phi_t(r, 0) r^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} \psi(r) \Phi(r, 0) r^2 dr + \\ & + \int_0^T \nu(t) \Phi_r(R_2, t) R_2^2 dt - \int_0^T \mu(t) \Phi_r(R_1, t) R_1^2 dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь управление задается при помощи силы, т.е. по формуле (4), тогда определение решения будет следующим.

Определение. Решением из класса $\hat{W}_2^1(B_T)$ задачи (1), (2), (4) назовем функцию $u(r, t)$, которая для любой пробной функции $\Phi(r, t) \in C^2(\overline{B_T})$, удовлетворяющей условиям $\Phi_r(R_1, t) + (1/R_1)\Phi(R_1, t) \equiv 0$, $\Phi_r(R_2, t) + (1/R_2)\Phi(R_2, t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, T]$, $\Phi(r, T) \equiv \Phi_t(r, T) \equiv 0$ для всех $r \in [R_1, R_2]$, обращает в тождество следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{R_1}^{R_2} u(r, t) \mathcal{L}\Phi(r, t) r^2 dr dt + \int_{R_1}^{R_2} \varphi(r) \Phi_t(r, 0) r^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} \psi(r) \Phi(r, 0) r^2 dr - \\ & - \int_0^T \nu(t) \Phi(R_2, t) R_2^2 dt + \int_0^T \mu(t) \Phi(R_1, t) R_1^2 dt \equiv 0. \end{aligned}$$

В задачах 1) и 2) граничное управление определяется неединственным образом, поэтому возникает задача оптимизации. В случае (3) критерием оптимальности выступает следующее условие

$$\int_0^T \{a^2 [R_1 \mu'(t)]^2 + b^2 [R_2 \nu'(t)]^2\} dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

а в случае (4):

$$\int_0^T \{a^2 [R_1 \mu(t)]^2 + b^2 [R_2 \nu(t)]^2\} dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Здесь a и b — произвольные константы, отличные от нуля.

Во всех трех задачах 1) — 3) также требуется выполнение необходимого интегрального условия согласования начальных и финальных данных. В общем виде оно принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \int_0^T R_1 u_t(R_1, t) dt &= R_1 [\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)], \\ \int_0^T R_2 u_t(R_2, t) dt &= R_2 [\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)]. \end{aligned} \quad (7)$$

В §2.2 проводится построение функции $\hat{u}(r, t)$, которая позволяет свести исследуемые задачи к аналогичным, но с нулевыми начальными данными. Данная функция для каждой из задач своя, так как зависит от значения финального момента T . Метод построения этой функции основан на методе Д'Аламбера. Приведем здесь эти функции для каждого случая изменения момента времени T .

1. Пусть момент времени T строго больше критического. Тогда функция $\hat{u}(r, t)$ определяется по формуле

$$\hat{u}(r, t) = \frac{1}{2r} \begin{cases} (r+t)\varphi(r+t) + (r-t)\varphi(r-t) + \\ + \int_{r-t}^{r+t} \rho\psi(\rho) d\rho & \text{в } \Delta_1, \\ (r+t)\varphi(r+t) + R_1\varphi(R_1) + \int_{R_1}^{r+t} \rho\psi(\rho) d\rho & \text{в } \Delta_2, \\ R_2\varphi(R_2) + (r-t)\varphi(r-t) + \int_{r-t}^{R_2} \rho\psi(\rho) d\rho & \text{в } \Delta_3, \\ R_2\varphi(R_2) + R_1\varphi(R_1) + \int_{R_1}^{R_2} \rho\psi(\rho) d\rho \equiv C_0 & \text{в } \Delta_4, \end{cases}$$

Области Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ показаны на рис. 1.

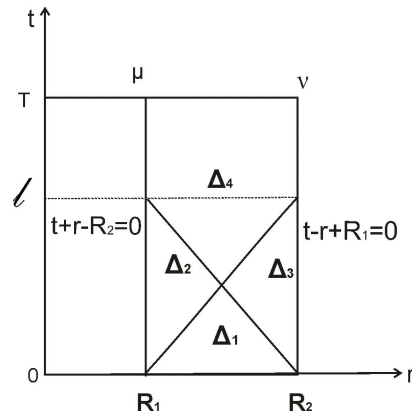


Рис.1

2. Пусть теперь момент времени меньше критического. Здесь нам приходится рассматривать два случая:

(а) В случае, когда $l/2 \leq T \leq l$, функция $\hat{u}(r, t)$ определяется по формуле

$$\hat{u}(r, t) = \frac{1}{2r} \begin{cases} (r+t)\varphi(r+t) + (r-t)\varphi(r-t) + \\ + \int_{r-t}^{r+t} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_1, \\ (r+t)\varphi(r+t) + R_1\varphi(R_1) + \\ + \int_{R_1}^{r+t} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_2, \\ R_2\varphi(R_2) + (r-t)\varphi(r-t) + \\ + \int_{r-t}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_3, \\ R_2\varphi(R_2) + R_1\varphi(R_1) + \\ + \int_{R_1}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_4. \end{cases}$$

Области Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ показаны на рис. 2.

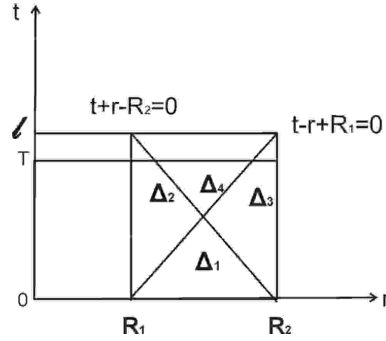


Рис.2

(б) Если же момент времени T изменяется в интервале $[0, l/2)$, то тогда функция $\hat{u}(r, t)$ равна

$$\hat{u}(r, t) = \frac{1}{2r} \begin{cases} (r+t)\varphi(r+t) + (r-t)\varphi(r-t) + \\ + \int_{r-t}^{r+t} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_1, \\ (r+t)\varphi(r+t) + R_1\varphi(R_1) + \\ + \int_{R_1}^{r+t} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_2, \\ R_2\varphi(R_2) + (r-t)\varphi(r-t) + \\ + \int_{r-t}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho, (r, t) \in \Delta_3. \end{cases}$$

Области Δ_i , $i = 1, 2, 3$ показаны на рис. 3.

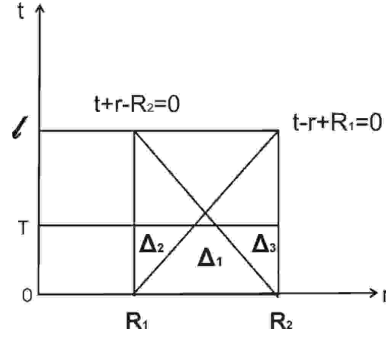


Рис.3

После сведения исследуемой задачи к задаче с нулевыми начальными данными мы можем выписать решение полученной задачи через ее граничные функции. После этого, применив лемму о поточечном инфимуме, являющуюся обобщением леммы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева, которая была доказана ими в работе [2], мы сводим минимизацию целевого интеграла к минимизации суммы, которая строится на основе подынтегральной функции.

Определение. Будем говорить, что набор функций

$$\begin{aligned} a_{0i}(t), \dots, a_{Mi}(t), i = \overline{1, N}, t \in [0, l_1], \\ b_{0i}(t), \dots, b_{Mi}(t), i = \overline{1, N}, t \in [l_1, l_2] \end{aligned}$$

принадлежит классу Ω , если эти функции принадлежат классу L_2 на соответствующих множествах и выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M \alpha_{ki} a_{ki}(t) &= A_i(t), t \in [0, l_1], \\ \sum_{k=0}^M \beta_{ki} b_{ki}(t) &= B_i(t), t \in [l_1, l_2], \end{aligned} \tag{8}$$

где $A_i(t)$, $B_i(t)$ — известные функции из класса L_2 , $i = \overline{1, N}$, α_{ki} , β_{ki} — известные числа из $\mathbb{R}$.

Введем следующие обозначения:

$$I = \int_0^{l_1} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_{ki}(t) dt + \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M b_{ki}(t) dt,$$

$$\hat{I} = \inf_{\Omega} I.$$

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M a_{ki}(t), t \in [0, l_1], \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M b_{ki}(t), t \in [l_1, l_2], \end{cases}$$

$$\hat{S}(t) = \inf_{t \in [0, l_2]} S(t).$$

Здесь $\hat{S}(t)$ понимается как поточечный инфимум суммы для функций из множества Ω почти всюду на интервале $[0, l_2]$. При минимизации строится конкретный набор функций, удовлетворяющих равенствам (8), которые определяют соответствующие классы эквивалентности в L_2 и, как следствие, элемент множества Ω .

Лемма 2.1. *При сделанных определениях и предположениях верно следующее равенство*

$$\hat{I} = \int_0^{l_2} \hat{S}(t) dt.$$

Из требования удовлетворения финальным значениям следуют те условия, при которых эта сумма и минимизируется. Полученная задача на условный экстремум решается методом множителей Лагранжа.

Третья глава посвящена нахождению оптимального граничного управления колебаниями при помощи смещения на обеих сферах. Представлено аналитическое выражение для этого управления и доказана следующая теорема о существовании указанного управления.

Теорема 3.1. *Рассмотрим задачу (1), (2), (3). Пусть начальные и финальные условия принадлежат следующим классам:*

$$u(r, 0) \equiv \varphi(r) \in W_2^1[R_1, R_2], \quad u(r, T) \equiv \varphi_1(r) \in W_2^1[R_1, R_2],$$

$$u_t(r, 0) \equiv \psi(r) \in L_2[R_1, R_2], \quad u_t(r, T) \equiv \psi_1(r) \in L_2[R_1, R_2].$$

Пусть финальный момент T равен $2ml + \Delta$, где m — целое неотрицательное число, l — ширина слоя и равна $R_2 - R_1$, Δ — произвольное число из интервала $[0, 2l]$, $R_1 > 0$, $T > l$.

Тогда существует оптимальное граничное управление

$$u(R_1, t) \equiv \mu(t) \in W_2^1[0, T], \quad u(R_2, t) \equiv \nu(t) \in W_2^1[0, T],$$

переводящее сферический слой за промежуток времени, равный T , из заданного начального состояния в заданное финальное и доставляющее минимум интегралу (5). Для этого управления выполнены условия согласования следов:

$$\mu(0) = \varphi(R_1), \quad \nu(0) = \varphi(R_2)$$

$$\mu(T) = \varphi_1(R_1), \quad \nu(T) = \varphi_1(R_2)$$

1. В случае $\Delta \in [0, l]$ это управление определяется по формулам

$$\mu(t) = L_1(t) + \alpha_1(t), \quad \nu(t) = L_2(t) + \alpha_2(t), \tag{9}$$

где

$$L_1(t) = \varphi(R_1) + \frac{t}{2lR_1} \int_0^{2l} F_1(\tau) d\tau, \quad L_2(t) = \varphi(R_2) + \frac{t}{2lR_2} \int_0^{2l} F_2(\tau) d\tau.$$

2. В случае $\Delta \in [l, 2l]$ это управление может быть получено из формул

$$\mu(t) = L_3(t) + \alpha_3(t), \quad \nu(t) = L_4 + \alpha_4(t), \quad (10)$$

$$L_3(t) = \varphi(R_1) + \frac{t}{2lR_1} \int_0^{2l} F_3(\tau) d\tau, \quad L_4(t) = \varphi(R_2) + \frac{t}{2lR_2} \int_0^{2l} F_4(\tau) d\tau.$$

Функции $\alpha_i(t)$ являются периодическими с периодом $2l$ и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_i(2lp + t) &= \frac{1}{R_1} \left[\int_0^t F_i(\tau) d\tau - \frac{t}{2l} \int_0^{2l} F_i(\tau) d\tau \right], \quad i = 1, 3, \\ \alpha_i(2lp + t) &= \frac{1}{R_2} \left[\int_0^t F_i(\tau) d\tau - \frac{t}{2l} \int_0^{2l} F_i(\tau) d\tau \right], \quad i = 2, 4, \end{aligned}$$

где $p = \overline{0, m-1}$, если $t \in [0, 2l]$, и $p = m$, если $t \in [0, \Delta]$.

При этом функции $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \begin{cases} C_1 - (B_1(t) + C_1) \frac{b^2}{a^2m+b^2(m+1)}, & t \in [0, \Delta] \\ C_1 - A_2(t) \frac{b^2}{a^2m+b^2m}, & t \in [\Delta, l] \\ C_1 - (A_1(t-l) - C_1) \frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2m}, & t \in [l, l+\Delta] \\ C_1 - B_2(t-l) \frac{b^2}{a^2m+b^2m}, & t \in [l+\Delta, 2l] \end{cases} \\ F_2(t) &= \begin{cases} C_1 + (A_1(t) - C_1) \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2m}, & t \in [0, \Delta] \\ C_1 + B_2(t) \frac{a^2}{a^2m+b^2m}, & t \in [\Delta, l] \\ C_1 + (B_1(t-l) + C_1) \frac{a^2}{a^2m+b^2(m+1)}, & t \in [l, l+\Delta] \\ C_1 + A_2(t-l) \frac{a^2}{a^2m+b^2m}, & t \in [l+\Delta, 2l] \end{cases} \\ F_3(t) &= \begin{cases} C_2 - \tilde{A}_1(t) \frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}, & t \in [0, \Delta-l] \\ C_2 - (C_2 + \tilde{B}_2(t)) \frac{b^2}{a^2m+b^2(m+1)}, & t \in [\Delta-l, l] \\ C_2 - \tilde{B}_1(t-l) \frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}, & t \in [l, \Delta] \\ C_2 - (\tilde{A}_2(t-l) - C_2) \frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2m}, & t \in [\Delta, 2l] \end{cases} \\ F_4(t) &= \begin{cases} C_2 + \tilde{B}_1(t) \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}, & t \in [0, \Delta-l] \\ C_2 + (\tilde{A}_2(t) - C_2) \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2m}, & t \in [\Delta-l, l] \\ C_2 + \tilde{A}_1(t-l) \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}, & t \in [l, \Delta] \\ C_2 + (C_2 + \tilde{B}_2(t-l)) \frac{a^2}{a^2m+b^2(m+1)}, & t \in [\Delta, 2l] \end{cases} \end{aligned}$$

Константы C_1 и C_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{2m} \{ R_1[\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)] + R_2[\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)] - \\
& - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \int_{\Delta}^l [A_2(t) + B_2(t)] dt - \\
& - \frac{a^2(m+1)-b^2m}{a^2(m+1)+b^2m} \int_0^{\Delta} A_1(t) dt - \frac{a^2m-b^2(m+1)}{a^2m+b^2(m+1)} \int_0^{\Delta} B_1(t) dt \} \times \\
& \times \left[\Delta \frac{(2m+1)(m+1)(a^2+b^2)^2}{[a^2m+b^2(m+1)][a^2(m+1)+b^2m]} + 2(l-\Delta) \right]^{-1}. \\
C_2 = & \frac{1}{2(m+1)} \{ R_1[\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)] + R_2[\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)] - \\
& - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \int_0^{\Delta-l} [\tilde{A}_1(t) + \tilde{B}_1(t)] dt - \\
& - \frac{a^2m-b^2(m+1)}{a^2m+b^2(m+1)} \int_{\Delta-l}^l \tilde{B}_2(t) dt - \frac{a^2(m+1)-b^2m}{a^2(m+1)+b^2m} \int_{\Delta-l}^l \tilde{A}_2(t) dt \} \times \\
& \times \left[2(\Delta-l) + (2l-\Delta) \frac{m(2m+1)(a^2+b^2)^2}{[a^2m+b^2(m+1)][a^2(m+1)+b^2m]} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Функции $A_i(t)$, $B_i(t)$, $\tilde{A}_i(t)$ и $\tilde{B}_i(t)$, $i = 1, 2$ из теоремы 3.1 — известны и выражаются через функции начального и финального состояний.

В **четвертой главе** решается задача нахождения оптимального граничного управления колебаниями при помощи двух сил на обоих сферах. Также как и в предыдущей главе, получены явные аналитические формулы, выражающие данное оптимальное управление и сформулирована теорема существования этого управления.

Теорема 4.1. *Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Пусть для начальных и финальных условий выполнены следующие условия принадлежности к классам:*

$$u(r, 0) \equiv \varphi(r) \in W_2^1[R_1, R_2], \quad u(r, T) \equiv \varphi_1(r) \in W_2^1[R_1, R_2],$$

$$u_t(r, 0) \equiv \psi(r) \in L_2[R_1, R_2], \quad u_t(r, T) \equiv \psi_1(r) \in L_2[R_1, R_2].$$

Пусть финальный момент T равен $2ml + \Delta$, где m — целое неотрицательное число, l — ширина слоя и равна $R_2 - R_1$, Δ — произвольное число из интервала $[0, 2l]$, $R_1 > 0$, $T > l$.

Тогда существует граничное управление

$$u_r(R_1, t) + \frac{1}{R_1} u(R_1, t) \equiv \mu(t) \in L_2[0, T], \quad u_r(R_2, t) + \frac{1}{R_2} u(R_2, t) \equiv \nu(t) \in L_2[0, T],$$

переводящее сферический слой из заданного начального состояния в заданное финальное за время T и доставляющее минимум целевому интегралу (6).

1. В случае принадлежности Δ интервалу $[0, l]$ это управление определяется по

формулам

$$R_1\mu(2kl+t) = \begin{cases} \frac{b^2}{a^2m+b^2(m+1)}B_1(t) + \frac{C_1}{a^2}[2m-4k], & t \in [0, \Delta], \\ -\frac{b^2}{a^2m+b^2m}A_2(t) + \frac{C_1}{a^2}\left[2m-4k-1-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [\Delta, l], \\ -\frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2m}A_1(t-l) + \frac{C_1}{a^2}[2m-4k-2], & t \in [l, \Delta+l], \\ \frac{b^2}{a^2m+b^2m}B_2(t-l) + \frac{C_1}{a^2}\left[2m-4k-3-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [\Delta+l, 2l] \end{cases}.$$

$$R_2\nu(2kl+t) = \begin{cases} \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2m}A_1(t) - \frac{C_1}{b^2}[2m-4k], & t \in [0, \Delta], \\ -\frac{a^2}{a^2m+b^2m}B_2(t) - \frac{C_1}{b^2}\left[2m-4k-1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [\Delta, l], \\ -\frac{a^2}{a^2m+b^2(m+1)}B_1(t-l) - \frac{C_1}{b^2}[2m-4k-2], & t \in [l, \Delta+l], \\ \frac{a^2}{a^2m+b^2m}A_2(t-l) - \frac{C_1}{b^2}\left[2m-4k-3-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [\Delta+l, 2l] \end{cases}.$$

2. Если же $l \leq \Delta \leq 2l$, то функции граничного управления определяются по формулам

$$R_1\mu(2kl+t) = \begin{cases} -\frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}\tilde{A}_1(t) + \frac{C_2}{a^2}\left[2m-4k+2-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [0, \Delta-l], \\ \frac{b^2}{a^2m+b^2(m+1)}\tilde{B}_2(t) + \frac{C_2}{a^2}[2m-4k], & t \in [\Delta-l, l], \\ \frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}\tilde{B}_1(t-l) + \frac{C_2}{a^2}\left[2m-4k-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [l, \Delta], \\ -\frac{b^2}{a^2(m+1)+b^2m}\tilde{A}_2(t-l) + \frac{C_2}{a^2}[2m-4k-2], & t \in [\Delta, 2l] \end{cases}.$$

$$R_2\nu(2kl+t) = \begin{cases} -\frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}\tilde{B}_1(t) - \frac{C_2}{b^2}\left[2m-4k+2-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [0, \Delta-l], \\ \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2m}\tilde{A}_2(t) - \frac{C_2}{b^2}[2m-4k], & t \in [\Delta-l, l], \\ \frac{a^2}{a^2(m+1)+b^2(m+1)}\tilde{A}_1(t-l) - \frac{C_2}{b^2}\left[2m-4k-\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right], & t \in [l, \Delta], \\ -\frac{a^2}{a^2m+b^2(m+1)}\tilde{B}_2(t-l) - \frac{C_2}{b^2}[2m-4k-2], & t \in [\Delta, 2l] \end{cases}.$$

Константы C_1 и C_2 равны следующим значениям:

$$C_1 = \left[M_1 + N_1 - (2m+1) \int_0^\Delta [A_1(t) - B_1(t)]dt - \right. \\ \left. - 2m \int_\Delta^l [A_2(t) - B_2(t)]dt - \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \int_\Delta^l [A_2(t) + B_2(t)]dt \right] \times \\ \times \left\{ (l-\Delta)m \left[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \frac{2}{3}(4m^2-4m+1) \right] - \right. \\ \left. \Delta m \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \frac{8}{3}(m^2+3m-1) \right\}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & \left[M_2 + N_2 - (2m+1) \int_{\Delta-l}^l [\tilde{A}_2(t) - \tilde{B}_2(t)] dt - \right. \\
& - (2m+3) \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} \int_0^{\Delta-l} \tilde{A}_1(t) dt - \frac{a^2}{a^2+b^2} \int_0^{\Delta-l} \tilde{B}_1(t) dt \right) - \\
& \left. - (2m+1) \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} \int_0^{\Delta-l} \tilde{A}_1(t) dt - \frac{b^2}{a^2+b^2} \int_0^{\Delta-l} \tilde{B}_1(t) dt \right) \right] \times \\
& \times \left\{ 2(\Delta-l)(m+1) \frac{1}{a^2+b^2} \left[(2m+3) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + 2(2m+1) \right] - \right. \\
& \left. - (\Delta-l) \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} (m+1) \frac{8m^2+14m+26}{3} - (2l-\Delta) \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} m \frac{8m^2-12m+28}{3} \right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

Величины M_1 , M_2 , N_1 и N_2 являются известными и вычисляются по следующим правилам

$$\begin{aligned}
M_1 = & R_1[\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)] - 2m \int_{R_1}^{R_2} \rho \psi(\rho) d\rho - \int_0^{\Delta} [(R_1+t)\varphi(R_1+t)]'_t dt - \\
& - \int_0^{\Delta} (R_1+t)\psi(R_1+t) dt, \\
N_1 = & R_2[\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)] - 2m \int_{R_1}^{R_2} \rho \psi(\rho) d\rho - \int_0^{\Delta} [(R_2-t)\varphi(R_2-t)]'_t dt - \\
& - \int_0^{\Delta} (R_2-t)\psi(R_2-t) dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & R_1[\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)] - [R_2\varphi(R_2) - R_1\varphi(R_1)] - (2m+1) \int_{R_1}^{R_2} \rho \psi(\rho) d\rho - \\
& - \int_0^{\Delta-l} [(R_2-t)\varphi(R_2-t)]'_t dt - \int_0^{\Delta-l} (R_2-t)\psi(R_2-t) dt, \\
N_2 = & R_2[\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)] + [R_2\varphi(R_2) - R_1\varphi(R_1)] - (2m+1) \int_{R_1}^{R_2} \rho \psi(\rho) d\rho - \\
& - \int_0^{\Delta-l} [(R_1+t)\varphi(R_1+t)]'_t dt - \int_0^{\Delta-l} (R_1+t)\psi(R_1+t) dt.
\end{aligned}$$

Функции $A_i(t)$, $B_i(t)$, $\tilde{A}_i(t)$ и $\tilde{B}_i(t)$, $i = 1, 2$, которые используются в теореме 4.1, являются известными и вычисляются при помощи функций начального и финального состояний.

Пятая глава посвящена нахождению граничного управления и необходимых и достаточных условий его существования при временах, меньших критического. Исследовано оба случая задания управления: смещением на обоих сферах и при помощи двух сил, сосредоточенных на границе. Сформулируем основные теоремы существования управления.

Вначале приведем теоремы для случая управления двумя смещениями.

Теорема 5.1. *Рассмотрим задачу управления (1), (2), (3). Пусть момент времени T удовлетворяет неравенству $l/2 \leq T < l$.*

Тогда граничное управление определяется по формулам

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(t) &= \frac{1}{2R_1} \left[(T-t+R_1)\varphi_1(T-t+R_1) - (T+R_1)\varphi_1(T+R_1) + \int_{T-t+R_1}^{T+R_1} \rho\psi_1(\rho)d\rho \right] + \\ &+ \frac{1}{2R_1} \left[(R_1+t)\varphi(R_1+t) + R_1\varphi(R_1) + \int_{R_1}^{R_1+t} \rho\psi(\rho)d\rho \right], \quad t \in [0, T], \\ \underline{\nu}(t) &= \frac{1}{2R_2} \left[(t+R_2-T)\varphi_1(t+R_2-T) - (R_2-T)\varphi_1(R_2-T) + \int_{R_1}^{t+R_2-T} \rho\psi_1(\rho)d\rho \right] - \\ &- \frac{1}{4R_2} \left[R_2\varphi(R_2) - (R_1+T)\varphi(R_1+T) + \int_{R_1+T}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho \right] + \\ &+ \frac{1}{2R_2} \left[R_2\varphi(R_2) + (R_2-t)\varphi(R_2-t) + \int_{R_2-t}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho \right], \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Для его существования необходимо выполнение трех условий:

$$\begin{aligned}r\varphi_1(r) - (r-T)\varphi(r-T) + R_1\varphi_1(R_1) - (R_1+T)\varphi(R_1+T) - \\ - \int_{R_1+T}^r \rho\psi_1(\rho)d\rho + \int_{R_1}^{r-T} \rho\psi(\rho)d\rho = 0, \quad r \in [R_1+T, R_2].\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}r\varphi_1(r) - (r+T)\varphi(r+T) - (R_2-T)\varphi_1(R_2-T) + R_2\varphi(R_2) - \\ - \int_r^{R_2-T} \rho\psi_1(\rho)d\rho + \int_{r+T}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho = 0, \quad r \in [R_1, R_2-T].\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\int_{R_2-T}^{R_2} \rho\psi_1(\rho)d\rho + \int_{R_1}^{R_1+T} \rho\psi_1(\rho)d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho + \int_{R_2-T}^{R_1+T} \rho\psi(\rho)d\rho = \\ = R_1\varphi_1(R_1) - R_1\varphi(R_1) + R_2\varphi_1(R_2) - R_2\varphi(R_2) + (R_1+T)\varphi_1(R_1+T) - \\ - (R_1+T)\varphi(R_1+T) + (R_2-T)\varphi_1(R_2-T) - (R_2-T)\varphi(R_2-T).\end{aligned}\tag{13}$$

Теорема 5.2. Рассмотрим задачу управления (1), (2), (3). Пусть момент времени T удовлетворяет неравенству $0 \leq T < l/2$.

Тогда граничное управление определяется по формулам

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(t) &= \frac{1}{2R_1} \left[(T-t+R_1)\varphi_1(T-t+R_1) - (T+R_1)\varphi_1(T+R_1) + \int_{T-t+R_1}^{T+R_1} \rho\psi_1(\rho)d\rho \right] + \\ &+ \frac{1}{2R_1} \left[(R_1+t)\varphi(R_1+t) + R_1\varphi(R_1) + \int_{R_1}^{R_1+t} \rho\psi(\rho)d\rho \right], \quad t \in [0, T],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\nu}(t) = & \frac{1}{2R_2} \left[(t + R_2 - T)\varphi_1(t + R_2 - T) - (R_2 - T)\varphi_1(R_2 - T) + \int_{R_1}^{t+R_2-T} \rho\psi_1(\rho)d\rho \right] - \\ & - \frac{1}{4R_2} \left[R_2\varphi(R_2) + R_1\varphi(R_1) + \int_{R_1}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho - \right. \\ & \left. - (R_2 - 2T)\varphi(R_2 - 2T) - (R_1 + T)\varphi(R_1 + T) - \int_{R_2-2T}^{R_1+T} \rho\psi(\rho)d\rho \right] + \\ & + \frac{1}{2R_2} \left[R_2\varphi(R_2) + (R_2 - t)\varphi(R_2 - t) + \int_{R_2-t}^{R_2} \rho\psi(\rho)d\rho \right], \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Для его существования необходимо выполнение условий (11), (12) и (13).

Теперь приведем аналогичную теорему для управления двумя силами.

Теорема 5.3. *Рассмотрим задачу (1), (2), (4). Пусть момент времени T изменяется в интервале $[0, l]$.*

Тогда у рассматриваемой задачи существует граничное управление, определяемое формулами

$$\begin{aligned} \mu(t) = & \frac{1}{2R_1} ([(T - t + R_1)\varphi_1(T - t + R_1)]' - (T - t + R_1)\psi_1(T - t + R_1)) + \\ & + \frac{1}{2R_1} ([(R_1 + t)\varphi(R_1 + t)]' + (R_1 + t)\psi(R_1 + t)), \quad t \in [0, T], \\ \nu(t) = & \frac{1}{2R_2} ([(R_2 + t - T)\varphi_1(R_2 + t - T)]' + (R_2 + t - T)\psi_1(R_2 + t - T)) + \\ & + \frac{1}{2R_2} ([(R_2 - t)\varphi(R_2 - t)]' - (R_2 - t)\psi(R_2 - t)), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Необходимые условия существования этого управления задаются формулами (11), (12) и (13).

Покажем, что условия (11) — (13) являются достаточными для существования граничного управления.

Теорема 5.4. *Рассмотрим задачу (1), (2), (3) с нулевыми начальными данными. Пусть момент времени $T \in [0, l]$.*

Тогда для существования граничного управления достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} r\varphi_1(r) - (T + R_1)\varphi_1(T + R_1) + \int_r^{T+R_1} \rho\psi_1(\rho)d\rho &= 0, \quad r \in [T + R_1, R_2], \\ r\varphi_1(r) - R_1\varphi_1(R_1) + \int_{R_1}^r \rho\psi_1(\rho)d\rho &= 0, \quad r \in [R_1, R_2 - T]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_2-T}^{R_2} \rho\psi_1(\rho)d\rho + \int_{R_1}^{R_1+T} \rho\psi_1(\rho)d\rho = \\ & = R_1\varphi_1(R_1) + R_2\varphi_1(R_2) + (R_1 + T)\varphi_1(R_1 + T) + (R_2 - T)\varphi_1(R_2 - T). \end{aligned}$$

Аналогичная теорема справедлива и в случае управления силами на обеих сферах. Из этих результатов следует, что условия (11), (12) и (13) являются достаточными для существования граничного управления в случае ненулевых начальных данных.

В случае равенства момента времени T критическому моменту l справедливо следствие.

Следствие 5.5.1.. *Рассмотрим задачу граничного управления*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \\ u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \\ u(r, T) = \varphi_1(r), \quad u_t(r, T) = \psi_1(r). \end{cases}$$

Пусть граничное управление ведется либо смещением (3), либо силой (4). Пусть момент времени T равен l .

Тогда необходимым и достаточным условием существования граничного управления в данном случае является выполнение следующего равенства

$$R_2[\varphi_1(R_2) - \varphi(R_2)] + R_1[\varphi_1(R_1) - \varphi(R_1)] = \int_{R_1}^{R_2} \rho[\psi_1(\rho) + \psi(\rho)]d\rho. \quad (14)$$

Плюс, в случае управления смещениями, к этому условию добавляется требование согласования следов

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi(R_1), & \nu(0) &= \varphi(R_2) \\ \mu(T) &= \varphi_1(R_1), & \nu(T) &= \varphi_1(R_2). \end{aligned}$$

В заключение в **шестой главе** приведен пример, показывающий необходимость учета интегральных условий согласования (7). Данные условия вытекают из формулы Ньютона-Лейбница и требований согласования следов на границе.

Мы рассматриваем задачу возбуждения, т.е. задачу с нулевыми начальными данными, и управлением смещением на обоих сферах.

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv u_{tt} - \frac{1}{r^2}[r^2 u_r(r, t)]_r = 0, \\ u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = 0, \\ u(R_1, t) = \mu(t), \quad u(R_2, t) = \nu(t). \end{cases}$$

Финальные условия имеют вид:

$$u(r, T) = \cos r, \quad u_t(r, T) = -\sin r.$$

Считаем, что радиус R_1 равен π , а R_2 — равен 2π . Момент времени T выбирается равным $3l$, где $l = R_2 - R_1$. Таким образом, $T = 2\pi + \pi$, и из общей формулы для T , $T = 2ml + \Delta$, видно, что $m = 1$, $\Delta = \pi$.

Как отмечалось выше, для указанной задачи должны быть выполнены условия совпадения следов на границе:

$$\mu(0) = 0, \quad \nu(0) = 0, \quad \mu(T) = -1, \quad \nu(T) = 1.$$

Интегральные условия согласования (7) переходят в следующие:

$$\int_0^{3\pi} \mu'(t) dt = -1, \quad \int_0^{3\pi} \nu'(t) dt = 1.$$

Целевой интеграл (5) принимает вид:

$$\int_0^{3\pi} \{[\pi\mu'(t)]^2 + [2\pi\nu'(t)]^2\} dt.$$

Мы решаем данную задачу двумя методами, основанными на результатах главы 3. Первый раз мы решаем оптимизационную задачу целевого интеграла без учета интегральных условий связи, т.е. минимизируем сам целевой интеграл. Вторым раз интегральные условия учитываются, и минимизируется уже измененный интеграл:

$$\int_0^{3\pi} \{[\pi\mu'(t) - C_1]^2 + [2\pi\nu'(t) - C_1]^2\} dt.$$

Решая задачу оптимального граничного управления первым способом, мы приходим к тому, что не выполнены условия совпадения следов на границе, поэтому полученное решение не будет принадлежать классу $\hat{W}_2^1(B_T)$.

С учетом интегральных условий связи, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{2}[\sin t - \cos t + (\pi + t) \sin t], \\ B_1(t) &= \frac{1}{2}[\cos t - \sin t + (2\pi - t) \sin t]. \end{aligned}$$

$$\pi\mu'(t) = \begin{cases} C_1 - \frac{1}{3}B_1(t), & t \in [0, \pi], \\ C_1 - \frac{1}{3}A_1(t - \pi), & t \in [\pi, 2\pi], \\ C_1 - \frac{1}{3}B_1(t - 2\pi), & t \in [2\pi, 3\pi]. \end{cases} \quad 2\pi\nu'(t) = \begin{cases} C_1 + \frac{1}{3}A_1(t), & t \in [0, \pi], \\ C_1 + \frac{1}{3}B_1(t - \pi), & t \in [\pi, 2\pi], \\ C_1 + \frac{1}{3}A_1(t - 2\pi), & t \in [2\pi, 3\pi]. \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{6\pi} \left(\pi - \frac{2}{3} \right).$$

Из полученных значений функции управления восстанавливаются явным образом по известным формулам. При этом непосредственно проверяется, что полученные функции удовлетворяют всем требованиям, которые возникают в данной задаче и полученное таким образом решение задачи принадлежит классу $\hat{W}_2^1(B_T)$.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю академику РАН В.А. Ильину за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе. Также автор выражает благодарность Ф.П. Васильеву, В.В. Тихомирову и А.А. Никитину за полезные комментарии и обсуждения.

Литература

1. Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закреплённом втором конце. // Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, номер 12, с. 1640-1659.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведённого в произвольную степень $p \geq 1$. // Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, номер 11, с. 1558-1570.
3. Ильин В.А. Граничное управление сферически симметричными колебаниями трехмерного шара. // Труды МИАН, 2001, т. 232, с. 144-155.
4. Ильин В.А. Граничное управление сферически-симметричными колебаниями шара при условии существования конечной энергии. // ДАН, 2003, т. 392, номер 3, с. 309-312.

Публикации автора по теме диссертации

1. Сергеев, С.А. К задаче об оптимальном граничном управлении колебаниями сферического слоя. // Дифференциальные уравнения. 2009, том 45, номер 10, с. 1480-1491.
2. Сергеев С.А. К задаче об оптимальном граничном управлении специальным третьим краевым условием колебаниями сферического слоя. // Дифференциальные уравнения, 2010, том 46, номер 1, с. 129-138.
3. Сергеев, С.А. Задача граничного управления для уравнения колебаний сферического слоя. // Современные проблемы математики, механики и их приложений: материалы междунар. конф., посвященной 70-летию Ректора МГУ академика В.А. Садовниченко, Москва, 30 марта — 02 апреля 2009 г. — Москва: Изд-во "Университетская книга", 2009. с. 208-209.
4. Сергеев, С.А. Задачи граничного управления для уравнений колебаний сферического слоя. // Сборник тезисов XVI междунар. научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ-2009», секция «Вычислительная математика и кибернетика», Москва, 13-18 апреля 2009 г. — Москва: Изд-во Макс-Пресс, 2009. с. 73.