

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ



На правах рукописи

Матусевич Ольга Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ДВУХ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ
В СРЕДЕ С КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва, 2010г.

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Трофимов Вячеслав Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Жилейкин Яков Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор Стрелков Герман Михайлович

Ведущая организация: Институт математического моделирования РАН

Защита состоится “ 31 ” марта 2010г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд.685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (второй учебный корпус, 1 этаж).

Автореферат диссертации разослан “ ____ ” _____ 2010г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Захаров Евгений Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

В последние двадцать лет бурно развивается одно из направлений лазерной физики – лазерная фемтосекундная нелинейная оптика. Распространение фемтосекундных импульсов, как правило, сопровождается откликом среды одновременно на разных порядках нелинейности и имеющих различные пространственные и временные масштабы. Как следствие этого, компьютерное моделирование необходимо производить на сетках, содержащих от сотен тысяч до десятков миллионов узлов на одном расчетном слое. Без привлечения многопроцессорных компьютеров провести их за приемлемое время не представляется возможным.

В литературе для задач нелинейной оптики широкое распространение нашел метод расщепления, который прост при практической реализации, в том числе на многопроцессорных компьютерах. Однако, при увеличении интенсивности фемтосекундного импульса его эффективность существенно снижается. В этом случае консервативные разностные схемы, которые являются нелинейными, более предпочтительны для расчета нелинейно-оптических задач. Однако, исследование эффективности их реализации на многопроцессорных компьютерах в литературе отсутствовало до недавнего времени. Поэтому данная проблема является весьма актуальной.

Одним из широко анализируемых в литературе вопросов является солитонное распространение лазерных импульсов. По этой проблеме в последнее время появился ряд монографий, в которых обобщены результаты двух последних десятилетий. Следует подчеркнуть, что в них отсутствуют методы нахождения солитонных решений нелинейного уравнения (системы уравнений) Шредингера в случае периодической зависимости коэффициентов нелинейности от координат задачи. В связи с развитием изготовления фотонных кристаллов, а также интенсивным исследованием задач бозе-эйнштейновского конденсата разработка методов нахождения солитонных решений для уравнений

Шредингера, обладающего периодической зависимостью коэффициентов нелинейности, представляет собой актуальную задачу.

При нахождении солитонных решений в литературе часто встречается подход, при котором солитонное решение находится на основе решения задачи на собственные значения (СЗ) и собственные функции (СФ) для нелинейного уравнения (системы уравнений) Шредингера. При этом критерии, при которых СФ будет солитонным решением, в литературе не обсуждались, также как и построение итерационных методов нахождения солитонных решений. Последнее является актуальной проблемой для систем нелинейных уравнений Шредингера.

Именно перечисленные выше проблемы анализируются в настоящей диссертации.

Цель работы заключалась в эффективной реализации консервативных разностных схем для системы двух уравнений Шредингера с учетом квадратичной и кубической нелинейности среды на многопроцессорных компьютерах, обладающих общей памятью; в построении эффективного итерационного метода для нахождения двухцветных 2D и 3D солитонов для сред с комбинированной нелинейностью; в изучении нелинейного взаимодействия фемтосекундных световых импульсов со средой, обладающей квадратичным и кубическим нелинейным откликом; в разработке способов стабилизации неустойчивых солитонов в аксиально-симметричном случае при их распространении в среде с квадратичной и кубической нелинейностью.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней:

1. Построены итерационные методы для нахождения СФ и СЗ систем нелинейных уравнений Шредингера, на основе которых находятся двухцветные 2D и 3D солитоны для сред с комбинированной нелинейностью как в случае постоянных, так и в случае поперечно-неоднородных коэффициентов для широкого диапазона их изменения.
2. Реализованы нелинейные консервативные разностные схемы на многопро-

цессорных компьютерах с общей памятью.

3. Изучено влияние продольной неоднородности коэффициентов нелинейности среды на устойчивость распространения солитонов. Показана возможность подавления неустойчивости аксиально-симметричных солитонов в среде с кубичной нелинейностью, состоящая в неоднородной по пространственной координате слабой модуляции нелинейности среды.
4. Обнаружена множественность существования солитонных решений системы двух уравнений Шредингера с комбинированной нелинейностью, обладающих одинаковой суммарной энергией. На основании этого предложен способ переключения между солитонными решениями.
5. Обнаружены эффекты формирования локализованных структур, распространяющихся солитонно подобно в среде с комбинированной нелинейностью со скоростями большими и меньшими, чем скорость света в линейной среде; изучена причина ускорения локализованных структур; обнаружен эффект, аналогичный эффекту квантовой телепортации, заключающийся в том, что возмущение, внесенное в одну из локализованных структур, оказывает воздействие на другую локализованную структуру, значительно удаленную от первой во времени.
6. Исследована устойчивость решения задачи удвоения частоты, построенного в “приближении длинных импульсов”, для системы двух уравнений Шредингера в среде с комбинированной нелинейностью.

Практическая ценность.

1. Проведенное распараллеливание алгоритмов, реализующих консервативные нелинейные разностные схемы, позволило существенно повысить эффективность их применения на многопроцессорных компьютерах с общей памятью. Показаны их преимущества по сравнению с используемыми в литературе методами расщепления.
2. Предложенные итерационные методы нахождения СФ и СЗ системы двух нелинейных уравнений Шредингера могут быть использованы для анало-

гичных уравнений с другими нелинейностями. Найденные солитоны могут использоваться для передачи информации по нелинейным оптическим линиям связи.

3. Продемонстрированная возможность переключения между солитонами основной и удвоенной частоты может быть использована для создания оптических переключателей, работающих в фемтосекундном диапазоне.
4. Обнаруженные эффекты нелинейной локализации и взаимовлияния локализованных структур могут быть использованы для задач кодирования и передачи информации, а также для задач неразрушающего контроля.

Защищаемые положения.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Реализация на многопроцессорных компьютерах с общей памятью нелинейных консервативных разностных схем для системы двух уравнений Шредингера с квадратичной и кубической нелинейностью в координатах (z, r, t) , (z, t) , (z, r) .
2. Итерационные методы нахождения СФ и СЗ и на их основе солитонных решений системы двух уравнений Шредингера с комбинированной нелинейностью в координатах (z, t) , (z, r) и (z, r, t) в случае постоянных и переменных коэффициентов нелинейности.
3. Области неустойчивости решений задачи генерации второй гармоники, полученных в приближении “длинных импульсов”, рассчитанные на основе линейного анализа системы двух нелинейных уравнений Шредингера с учетом взаимного влияния возмущений.
4. Реализация переключения между солитонами основной и удвоенной частоты в задаче генерации второй гармоники в среде с комбинированной нелинейностью.
5. Самоформирование цветных локализованных структур, распространяющихся солитоноподобно в средах с преобладанием квадратичных эффектов над кубическими при наличии ненулевой расстройки групповых скоростей.

6. Стабилизация неустойчивых солитонов в среде с кубичной нелинейностью за счет слабой модуляции коэффициента нелинейности.
7. Устойчивость солитонных решений систем двух уравнений Шредингера с комбинированной нелинейностью в аксиально-симметричном случае по отношению к амплитуде возмущения, не превосходящей критического значения.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на 9 международных конференциях:

- Международная научная конференция “Nonlinear Optics Applications” в составе конгресса “Optics and Optoelectronics” (Poland, Warsaw, 2005);
- Международная научная конференция “20th Congress of International Commission for Optics” (Changchun, China, 2005);
- Международная конференция “Тихонов и современная математика” (Москва, 2006);
- Международная научная конференция “Finite Difference Methods: Theory and Applications” (Lozenetz, Bulgaria, 2006);
- Международная научная конференция “Mathematical Modelling and Analysis” (Trakai, Lithuania, 2007);
- Международная научная конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики” (Москва, Россия, 2009);
- Международная научная конференция “Photonica 09: International School and Conference on Photonics” (Belgrade, Serbia, 2009);
- Международная научная конференция “Saratov Fall Meeting ” (Саратов, Россия, 2009);
- Международная научная конференция “Mathematical Modelling and Analysis” (Daugavpils, Latvia, 2009).

Отдельные результаты работы докладывались на научном семинаре лаборатории математического моделирования в физике, на кафедре вычислитель-

ных методов и на научном семинаре член-корр. РАН Шишмарева И.А. факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. Ломоносова.

Публикации. Список работ, опубликованных по материалам диссертации, приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных результатов, списка литературы и содержит 86 рисунков, 10 таблиц.

Личный вклад автора.

Все результаты диссертации получены автором лично или при его определяющем участии в распараллеливании алгоритмов, проведении компьютерных экспериментов и интерпретации результатов.

Достоверность результатов основана на непротиворечивости имеющихся в литературе данным физических экспериментов; сопоставлении результатов расчетов имеющимся аналитическим решениям; консервативности разностных схем и проведением расчетов на последовательности сеток.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, характеризующий состояние проблемы, и излагается содержание работы.

В первом параграфе главы I рассматриваются различные математические постановки задачи взаимодействия двух фемтосекундных импульсов в средах с комбинированной нелинейностью. В частности, одна из них описывается следующей системой безразмерных уравнений относительно медленно изменяющихся во времени и по пространственным координатам комплексных амплитуд A_1, A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + i\tilde{D}\Delta_{\perp}A_1 + iD_1\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + i\gamma A_1^*A_2e^{-i\Delta kz} + i\alpha_1A_1(|A_1|^2 + 2|A_2|^2) &= 0, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + i\frac{\tilde{D}}{2}\Delta_{\perp}A_2 + \nu\frac{\partial A_2}{\partial t} + iD_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + i\gamma A_1^2e^{i\Delta kz} + i\alpha_2A_2(2|A_1|^2 + |A_2|^2) &= 0, \\ 0 < t < L_t, 0 < z \leq L_z, \alpha_2 = 2\alpha_1 = 2\alpha. \end{aligned}$$

Уравнения записаны в области $\Omega = (0, L_t) \times \Omega_{\perp} \times (0, L_z]$. $\Omega_{\perp}$ означает об-

ласть по поперечным координатам, в которой определен оператора Лапласа $\Delta_{\perp}$. Здесь L_t – безразмерное время, в течение которого анализируется рассматриваемый процесс, L_z – безразмерная длина нелинейной среды, вдоль которой распространяется оптическое излучение. t – безразмерное время в сопровождающей импульс основной волны системе координат, z – нормированная продольная координата. D_j ($j = 1, 2$) – коэффициенты, характеризующие дисперсию второго порядка, $\tilde{D}$ – коэффициент дифракции. γ – коэффициент нелинейной связи взаимодействующих волн, $\Delta k = k_2 - 2k_1$ – безразмерная расстройка их волновых чисел, α – коэффициент, характеризующий кубичную нелинейность процесса распространения волн. ν – безразмерный параметр, характеризующий групповую расстройку взаимодействующих волн.

На входе в нелинейную среду задаются начальные распределения импульсов основной частоты и второй гармоники, которые для аксиально-симметричного случая имеют вид:

$$A_j(r, t, z = 0) = A_{j0}(r, t), \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq L_t, \quad 0 \leq r \leq R,$$

r – поперечная координата, нормированная на радиус пучка, R – максимальное значение координаты r .

Традиционно, для данного класса задач записываются нулевые граничные условия, которые можно поставить из-за финитности начального распределения и конечного отрезка по координате z . Например, для случая координат (z, t) они записываются следующим образом:

$$A_j \Big|_{t=0, L_t} = 0, \quad r \frac{\partial A_j}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0} = 0, \quad A_j \Big|_{r=L_r} = 0, \quad j = 1, 2.$$

В этом же параграфе записаны инварианты задачи.

Во втором параграфе первой главы записаны консервативные разностные схемы (КРС) для различных постановок задачи удвоения частоты, сформулированных в предыдущем параграфе.

Для примера ниже приведена КРС для случая, когда дифракционная длина

значительно превосходит длину нелинейной среды ($\tilde{D} = 0$). Для этого в области $\Omega = \Omega_t \times \Omega_z$ вводится равномерная сетка $\omega = \omega_t \times \omega_z$:

$$\omega_t = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, N_t}, \tau = L_t / N_t\}, \quad \omega_z = \{z_n = nh, n = \overline{0, N_z}, h = L_z / N_z\}.$$

и используются безындексные обозначения:

$$u = A_{1h}(t_j, z_n), \quad v = A_{2h}(t_j, z_n), \quad \hat{u} = A_{1h}(t_j, z_{n+1}), \quad \hat{v} = A_{2h}(t_j, z_{n+1}),$$

$$u^{0.5} = 0.5(u + \hat{u}), \quad |u^{0.5}|^2 = 0.5(|\hat{u}|^2 + |u|^2), \quad \left(u^{0.5}\right)^2 = 0.5(\hat{u}^2 + u^2),$$

$$v^{0.5} = 0.5(v + \hat{v}), \quad |v^{0.5}|^2 = 0.5(|\hat{v}|^2 + |v|^2).$$

Тогда построенная разностная схема с используемым итерационным процессом имеет вид:

$$\frac{\hat{u}^{s+1} - u^s}{h_z} + iD_1 u^{0.5} \bar{u}^s = -0.5i\gamma u^{0.5} v^{0.5} \left(e^{-i\Delta k z_n} + e^{-i\Delta k z_{n+1}} \right) - i\alpha u^{0.5} (|u^{0.5}|^2 + 2|v^{0.5}|^2),$$

$$\frac{\hat{v}^{s+1} - v^s}{h_z} + iD_2 v^{0.5} \bar{v}^s = -0.5i\gamma \left(u^{0.5}\right)^2 \left(e^{i\Delta k z_n} + e^{i\Delta k z_{n+1}} \right) - 2i\alpha v^{0.5} (2|u^{0.5}|^2 + |v^{0.5}|^2),$$

$$\hat{u}^{s=0} = u^s, \quad \hat{v}^{s=0} = v^s, \quad s = \overline{0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, N_t} - 1}.$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$u_{0,n}^{s+1} = u_{N_t,n}^{s+1} = 0, \quad v_{0,n}^{s+1} = v_{N_t,n}^{s+1} = 0, \quad n = \overline{0, N_z},$$

$$u_{j,0} = A_{10}(t_j), \quad v_{j,0} = A_{20}(t_j), \quad j = \overline{0, N_t}.$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении условий:

$$\max_{t_j, r_k} |\hat{u}^{s+1} - \hat{u}^s| \leq \varepsilon_1 \max_{t_j, r_k} |\hat{u}^s| + \delta_1, \quad \max_{t_j, r_k} |\hat{v}^{s+1} - \hat{v}^s| \leq \varepsilon_2 \max_{t_j, r_k} |\hat{v}^s| + \delta_2, \quad \varepsilon_l > 0, \delta_l > 0,$$

$$l = 1, 2.$$

Для решения полученной системы разностных уравнений используется метод прогонки.

В третьем параграфе первой главы приведены схемы суммарной аппрок-

симации, широко используемые в литературе для решения задач нелинейной оптики. Записаны наиболее часто встречаемая в литературе схема расщепления (МР) и схема с введенным итерационным процессом на этапе решения нелинейного уравнения (МРИ). На основе компьютерного моделирования показано, что схемы суммарной аппроксимации не являются консервативными. Проведенное сравнение разностных схем для задачи удвоения частоты в пространстве двух переменных показало, что для схем МР и МРИ требуется существенное увеличение размера области по сравнению с КРС. Для схемы МРИ требуется на порядок меньшее значение шага по пространственной координате для достижения результата вычислений, выполненных по КРС. Схема же МР требует шаг по пространству на несколько порядков меньший, чем схема МРИ. При корректном выборе шагов сетки эффективность схем суммарной аппроксимации падает по сравнению с КРС из-за существенного возрастания числа операций для достижения результатов с одинаковой точностью. Таким образом, проведенное сравнение эффективности схем показало, что КРС обладает преимуществом перед другими разностными схемами. Поэтому дальнейшие результаты получены на основе КРС.

В четвертом параграфе первой главы рассматриваются методы увеличения быстродействия программы для решения системы двух нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) в 3х мерной постановке, так как ее решение требует большого объема вычислений и затрат машинного времени. Один из них состоит в уменьшении числа итераций итерационного процесса за счет повышения точности вычислений. Проведенные расчеты показали, что при использовании чисел с плавающей точкой двойной точности вместо одинарной точности заданная точность сходимости итерационного процесса достигается в 1.7-2 раза быстрее. Другая возможность для оптимизации программы состоит в использовании библиотечных функций, например, быстрого преобразования Фурье, адаптированных к используемым процессорам. Это позволяет ускорить выполнение программы приблизительно в 1.3 раза при расчетах с одинарной

точностью и в 1.7 раз для двойной точности. Дальнейшее увеличение скорости выполнения программы связано с распараллеливанием на основе технологии OpenMP для многопроцессорных систем с общей памятью. Это приводит к увеличению быстродействия до 1.5 раз на двухпроцессорном компьютере. Также значительно влияет на время выполнения алгоритма выбор операционной системы и типа компьютера.

В пятом параграфе первой главы сформулированы ее краткие выводы.

Глава II состоит из трех параграфов и посвящена исследованию модуляционной неустойчивости решений задачи удвоения частоты, полученных в приближении длинных импульсов для среды с комбинированной нелинейностью. В первом параграфе этой главы проведено исследование устойчивости решений системы уравнений, описывающей процесс ГВГ в оптоволокне, по первому приближению. Основное отличие рассматриваемого подхода к анализу неустойчивости от традиционно используемого в литературе заключается во взаимном учете влияния возмущений друг на друга из-за продольной неоднородности коэффициентов нелинейности.

Во втором параграфе этой главы получена зависимость инкремента возмущения с частотой ω_n от числа учитываемых пространственных мод. Построена область реализации модуляционной неустойчивости для одного из аналитических решений задачи, которое имеет вид:

$$A_1^2(z) = \frac{q-1}{qch^2(\alpha z\sqrt{q-1})-1}, \text{ где } q = \gamma^2 / \alpha^2.$$

Она представлена на Рис.1.

В третьем параграфе второй главы проводится сопоставление результатов компьютерного моделирования нелинейной системы ОДУ с результатами, полученными во втором параграфе, а также с результатами численного моделирования задачи ГВГ, проведенного на основе системы НУШ с использованием КРС, для подтверждения результатов линейного анализа.

В четвертом параграфе второй главы сформулированы краткие выводы.

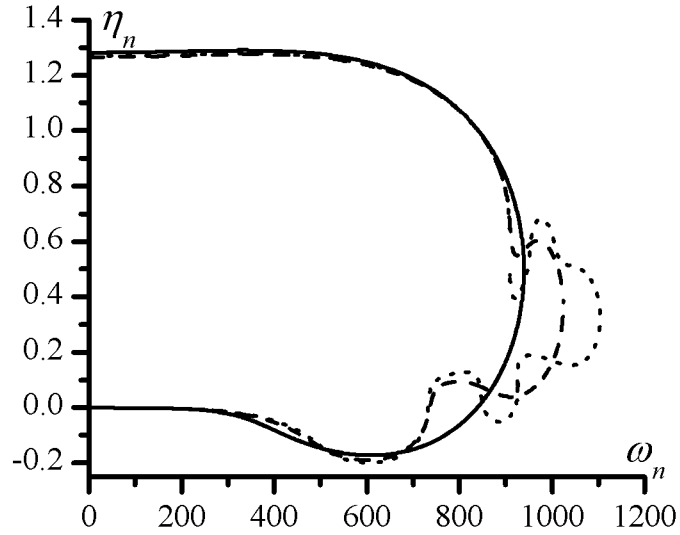


Рис.1. Зависимость инкремента усиления η_n от частоты возмущения ω_n решения задачи ГВГ в первом приближении (сплошная линия); во втором приближении (пунктир); в третьем приближении (точечная линия).

Третья глава посвящена построению солитонных решений уравнений ГВГ для среды с кубической и квадратичной нелинейностью в двумерном случае. Как известно, солитон в физическом смысле представляет собой оптическую волну, не изменяющую свою форму при распространении в нелинейной среде. Такие решения представляют большой интерес, например, для задач передачи информации по оптическим волоконным линиям.

В первом параграфе этой главы приводится аналитическое солитонное решение в случае уравнения с кубической нелинейностью ($\gamma = 0$) для практически важного случая отсутствия волны второй гармоники ($A_2 = 0$):

$$A_1(t, z) = ch^{-1} \left[(t - L_t / 2) \sqrt{\frac{2D}{\alpha}} \right] \exp \left(-i \frac{\alpha}{2} z \right).$$

Также в этом параграфе приводится аналитическое представление для солитона при распространении оптического излучения в квадратичной среде ($\alpha = 0$):

$$A_1 = \frac{3\sqrt{D_1 D_2} \Delta k}{2\gamma(2D_1 - D_2)} ch^{-2} \left[\frac{t - L_t / 2}{2} \sqrt{\frac{\Delta k}{2D_1 - D_2}} \right] \exp \left(-i \frac{D_1 \Delta k}{2D_1 - D_2} z \right),$$

$$A_2 = \frac{3D_1 \Delta k}{2\gamma(2D_1 - D_2)} ch^{-2} \left[\frac{t - L_t / 2}{2} \sqrt{\frac{\Delta k}{2D_1 - D_2}} \right] \exp \left(-i \frac{D_2 \Delta k}{2D_1 - D_2} z \right).$$

Эти решения были известны в литературе. Они используются в работе для тес-

тирования построенных итерационных методов численного нахождения солитонных решений.

Во втором параграфе третьей главы построен итерационный метод нахождения собственных функций (СФ) для системы двух нелинейных уравнений Шредингера, описывающей процесс удвоения частоты фемтосекундных импульсов в среде с квадратичной и кубичной нелинейностью. Для этого решение исходной задачи представляется в виде:

$$A_1 = u(t) \exp(-i\lambda z), \quad A_2 = v(t) \exp(-i(2\lambda - \Delta k)z).$$

После аппроксимации полученной задачи соответствующая разностная задача с итерационным процессом имеет вид:

$${}^s \Lambda {}^{s+1} \psi = {}^s \lambda {}^{s+1} \psi,$$

где $\psi = (u_1, w_1, u_2, w_2, \dots, u_{N_t-1}, w_{N_t-1})$, ${}^s \Lambda$ - вещественная симметричная пятидиагональная матрица:

$${}^s \Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{2D_1}{\tau^2} + \alpha {}^s a_1 & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} {}^s u_1 & \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} {}^s u_1 & -\frac{D_2}{\tau^2} + \alpha {}^s b_1 + \frac{\Delta k}{2} & 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & -\frac{2D_1}{\tau^2} + \alpha {}^s a_2 & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} {}^s u_2 & \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} {}^s u_2 & -\frac{D_2}{\tau^2} + \alpha {}^s b_2 + \frac{\Delta k}{2} & 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & \dots \end{pmatrix}$$

В этом параграфе обсуждаются разностные методы, которые используются для нахождения собственных значений (СЗ) и СФ матрицы ${}^s \Lambda$ на очередной итерации алгоритма.

При реализации итерационного процесса имеет место проблема сопоставления СФ с соответствующим СЗ на каждой итерации. Обобщение подхода, развиваемого для случая одного уравнения Шредингера с кубичной нелинейностью, при котором СЗ матрицы ${}^s \Lambda$ упорядочивались по убыванию и на каждой

итерации выбиралось m -ое СЗ, часто приводит к расходимости итерационного процесса. В данном параграфе выявлена причина его расходимости и предложена итерационная процедура, расширяющая область сходимости алгоритма на всю плоскость физически достигаемых параметров (α, γ) .

Построенный итерационный метод позволяет найти СФ, по крайне мере, до 50 номера. При вычислении СФ контролировалась невязка решения в норме S . Эта характеристика важна именно для нахождения солитонного решения уравнения Шредингера. В этом случае она не должна превышать 10^{-5} . При нахождении СФ разностной задачи это требование может быть значительно ослаблено. Важно подчеркнуть, что имеется и второе условие, при выполнении которого СФ является солитоном: она должна быть устойчива по отношению к расширению временного отрезка при решении эволюционной задачи с начальным условием в виде СФ.

С помощью описанного метода были найдены солитонные решения неизвестной ранее в литературе формы для широкого диапазона коэффициентов нелинейности, соответствующих первому и второму СЗ (Рис.2).

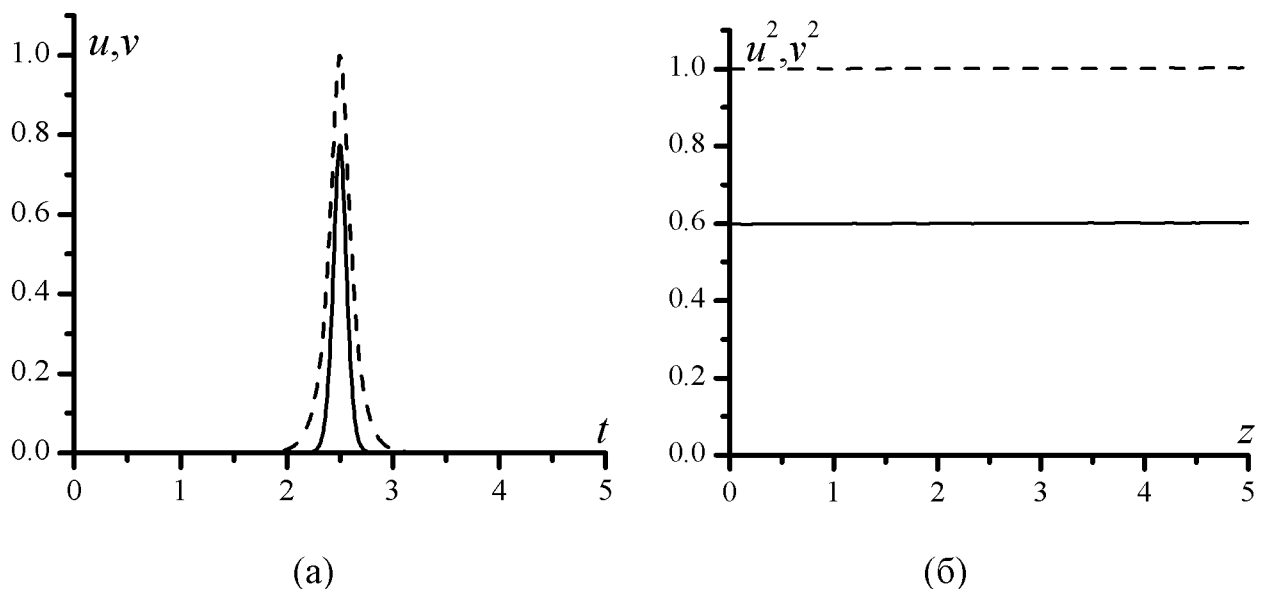


Рис.2. Форма солитонов для первой (сплошная линия) и второй (пунктир) гармоники (а), соответствующих первому собственному значению, и эволюция пиковой интенсивности (б) первой (сплошная линия) и второй (пунктир) гармоник вдоль трассы $L_z = 5$ для $\alpha = 1.5$, $\gamma = 50$, $\Delta k = 70$, $D_1 = 0.04$, $D_2 = 0.14$.

Построенный метод используется также для нахождения солитонов рассматриваемых ниже задач. Тестирование метода проводится в шестом параграфе на известных в литературе солитонах.

В третьем параграфе третьей главы исследуется влияние соотношения коэффициентов кубичной и квадратичной нелинейности, а также расстройки волновых чисел на форму солитона.

В четвертом параграфе главы III проводится обобщение метода нахождения солитонов для двух уравнений Шредингера на случай зависимости коэффициентов квадратичной и кубичной нелинейности от переменной t :

$$\gamma \equiv \gamma(t) = \gamma_0 \left(1 + \delta_\gamma \sin \frac{\pi n_\gamma t}{L_t}\right), \quad \alpha \equiv \alpha(t) = \alpha_0 \left(1 + \delta_\alpha \sin \frac{\pi n_\alpha t}{L_t}\right).$$

Показано, как преобразуется матрица Λ^s в этом случае. Обсуждаются ограничения на применимость итерационного метода в зависимости от частоты модуляции коэффициентов нелинейности. Для набора параметров, близких к физическому эксперименту, получены солитонные решения. При этом рассмотрен практически важный случай неоднородной (по поперечной координате) квадратичной среды. Изучается, насколько близко друг от друга можно расположить солитоны на входе в среду при условии отсутствия коллапса оптической волны в процессе ее распространения. Проведенные численные эксперименты позволили сделать вывод о возможности 2.5% перекрытия солитонов основной частоты для выбранного набора физических параметров.

Пятый параграф третьей главы посвящен эволюции солитонов, найденных для сред с постоянными коэффициентами нелинейности (далее, однородных сред) при их распространении в среде с периодической зависимостью коэффициентов нелинейности от продольной координаты. Показано, что слабая модуляция коэффициента кубичной или квадратичной нелинейности приводит к осцилляциям пиковой интенсивности солитонов (в их обеих компонентах, в случае двухцветных солитонов) без разрушения их формы. При слабой модуляции коэффициентов нелинейности осцилляции пиковой интенсивности про-

исходят на частоте, совпадающей с частотой модуляции нелинейных коэффициентов. Отмечается, что квадратичные солитоны при слабом влиянии периодически модулированной кубичной нелинейности также испытывают осцилляции своих параметров при распространении в однородной среде. При сильной же модуляции коэффициентов нелинейности может происходить коллапс формы солитона. Однако, присутствие в среде квадратичного отклика позволяет существенно расширить диапазон амплитуды модуляции коэффициентов нелинейности, которые не приводили бы к разрушению формы солитона при его распространении в среде с модулированной нелинейностью, по сравнению с кубичной средой. Установлены области устойчивости солитонов в пространстве параметров модуляции.

В шестом параграфе третьей главы показана возможность гистерезисных зависимостей эффективности генерации, длительности импульсов и расстройки волновых чисел от суммарной энергии взаимодействующих волн при генерации второй гармоники фемтосекундными импульсами солитонной формы в среде, обладающей квадратичной и кубичной нелинейностью (Рис.3).

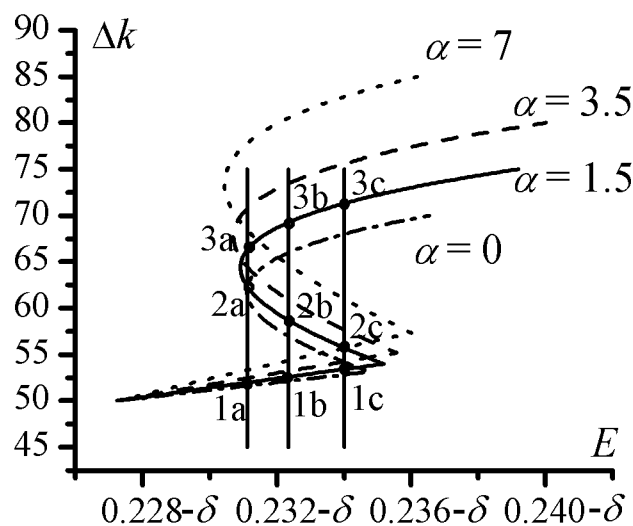


Рис.3. Зависимость расстройки волновых чисел от суммарной энергии солитонов при $50 \leq \Delta k \leq 90$ и различных значениях α : 1.5 (сплошная линия, $\delta = 0$), 3 (пунктир, $\delta = 0.02022$), 7 (точечная линия, $\delta = 0.04579$), 0 (штрих-пунктир, $\delta = -0.01952$). Точками на вертикальных линиях отмечены различные солитоны (для разных значений расстройки волновых чисел) с одинаковой суммарной энергией для $\alpha = 1.5$.

Важно отметить, что на средней ветви гистерезисной зависимости имеет место устойчивый к малым возмущениям солитон. Построена аппроксимация цветных солитонов с различных ветвей гистерезисной зависимости с точностью 0.001. Здесь также показано, что солитоны, найденные с помощью предлагаемого итерационного метода, совпадают с известным аналитическим решением для частных случаев отсутствия волны второй гармоники, а также для случая квадратичных сред. Это говорит о том, что численный метод для нахождения солитонных решений системы уравнений Шредингера работает корректно.

В седьмом параграфе главы III изучается устойчивость солитонов по отношению к начальным возмущениям их формы. На основе компьютерного моделирования показано, что двухцветные солитоны для среды с комбинированной нелинейностью в случае координат (z, t) устойчивы к начальным возмущениям до 20% их амплитуды. При этом они испытывают осцилляции пиковой интенсивности и длительности импульсов.

В восьмом параграфе третьей главы рассматривается влияние слабой кубической нелинейности на достижение высокой эффективности конверсии частоты без увеличения длительности импульса второй гармоники. Главной особенностью обсуждаемого режима удвоения частоты является отсутствие обратной перекачки энергии на солитонном решении. Суть предлагаемого метода заключается в использовании двух нелинейных сред: импульс, формируемый на выходе из первой среды, подается на вход во вторую. В первой среде происходит ГВГ в условиях группового и фазового синхронизма. Во второй среде взаимодействие между волнами происходит в условиях большой расстройки волновых чисел. Если кубическая нелинейность достаточно мала, то начинается процесс каскадной генерации, и обратная перекачка энергии практически отсутствует. Показано, каким образом выбирать длину первого кристалла, а также начальный сдвиг фаз импульсов для переключения между солитонным распространением на различных частотах (основной и удвоенной).

В девятом параграфе третьей главы изучается эффект “superluminality”

при взаимодействии двух фемтосекундных импульсов в условиях расстройки групповых скоростей в среде с комбинированной нелинейностью. Показано, что могут формироваться субимпульсы на основной и удвоенной частотах, которые распространяются солитоноподобно со скоростями большими и меньшими, чем скорость света в линейной среде. Причина ускорения субимпульса обусловлена наведенными периодическими решетками вследствие перекачки энергии из одной волны в другую. Компьютерные эксперименты показали, что воздействие, вносимое в некотором сечении в один из цветных субимпульсов, оказывает воздействие на удаленный во времени другой субимпульс. Таким образом, реализуется ситуация, аналогичная эффекту квантовой механики, когда два фотона, испущенные вместе из одного источника ощущают воздействие, осуществленное на один из них.

В десятом параграфе третьей главы сформулированы ее краткие выводы.

Глава IV посвящена обсуждению аксиально-симметричных солитонов в 2х и 3х мерных случаях. В первом параграфе четвертой главе развивается подход к нахождению солитонов, описанный в главе III, для случая аксиально-симметричных сред (координаты (z, r)). В отличие от случая координат (z, t) , рассмотрение случая (z, r) приводит к несимметричной матрице Λ^s , что требует дополнительного изучения задачи на СЗ и СФ. При увеличении размерности задачи, поиск солитонов требует большого объема вычислений и затрат машинного времени. Это связано с необходимостью выполнять расчеты на сетках, имеющих более миллиона узлов.

Для нахождения СЗ несимметричной матрицы теоретически можно использовать QR-алгоритм, предварительно сведя ее к форме Хессенберга, что позволяет понизить сложность алгоритма с $O(N_t^4 \times N_r^4)$ до $O(N_t^3 \times N_r^3)$. Однако, и в этом случае проблема нехватки вычислительных ресурсов (таких как оперативная память и мощность процессора) встает здесь очень остро (Табл.1). Для решения этой проблемы был использован алгоритм Арнольди для поиска СЗ и СФ на очередной итерации, который позволяет эффективно хранить мат-

рицу Λ^s , требуя для этого порядка $O(N_t \times N_r)$ ячеек, а также проводить вычисления за приемлемое время.

Для иллюстрации ниже приводится матрица Λ^s , имеющая место в 3х мерном случае для системы двух нелинейных уравнений Шредингера:

$$\Lambda^s = \begin{pmatrix} a_{1,0}^s & \gamma u_{1,0}^s & \tilde{D}p_1^{(3)} & 0 & \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & \dots \\ \frac{\gamma}{2} u_{1,0}^s & b_{1,0}^s & 0 & \frac{\tilde{D}}{2} p_1^{(3)} & 0 & 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & 0 \\ \tilde{D}p_2^{(1)} & 0 & a_{1,1}^s & \gamma u_{1,1}^s & \tilde{D}p_2^{(3)} & 0 & \frac{D_1}{\tau^2} \\ 0 & \frac{\tilde{D}}{2} p_2^{(1)} & \frac{\gamma}{2} u_{1,1}^s & b_{1,1}^s & 0 & 0 \\ & 0 & \tilde{D}p_3^{(1)} & 0 & a_{1,2}^s & \\ & & \dots & & \dots & \\ \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & & & \dots & a_{2,0}^s & \gamma u_{2,0}^s & \tilde{D}p_1^{(3)} \\ 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & 0 & & & \frac{\gamma}{2} u_{2,0}^s & b_{2,0}^s & 0 \\ & 0 & \frac{D_1}{\tau^2} & 0 & & \tilde{D}p_2^{(1)} & 0 & a_{2,1}^s \\ & & 0 & \frac{D_2}{2\tau^2} & 0 & 0 & \frac{\tilde{D}}{2} p_2^{(1)} & \frac{\gamma}{2} u_{2,1}^s \\ & & & & \dots & & & \end{pmatrix}$$

Табл.1. Зависимость размера матрицы Λ^s и времени вычислений одной итерации алгоритма от выбранного числа узлов сетки при размещении ее в оперативной памяти компьютера при вычислениях с одинарной или двойной точностью чисел с плавающей точкой.

Число узлов сетки	Одинарная точность, Гб	Двойная точность, Гб	Оценка времени на проведение одной итерации, сутки*
$N_t = N_r = 100$	0.8	1.6	0.1
$N_t = N_r = 200$	12.8	25.6	7.4
$N_t = N_r = 400$	204.8	409.6	474.1

*Оценка представлена для модельного компьютера с производительностью 100GFLOPs (эта производительность может достигаться, например, на кластере из 32 процессоров Xeon/2.6 ГГц).

Второй параграф четвертой главы посвящен нахождению аксиально-симметричных солитонов для одного и системы нелинейных уравнений Шредингера. В качестве примера расчетов на Рис.4 представлено пространственно-временное распределение интенсивностей цветного солитона.

Для найденных солитонов исследовался вопрос об их аппроксимации известными аналитическими представлениями для солитонов. Было показано, что 3D солитоны для фиксированных коэффициентов нелинейности в каждом сечении сохраняют форму сечения как по r так и по t координате. Однако они имеют различные характерные размеры. Важно подчеркнуть, что при изменении коэффициентов нелинейности изменяется и форма сечений в отличие от аналитических представлений известных солитонов.

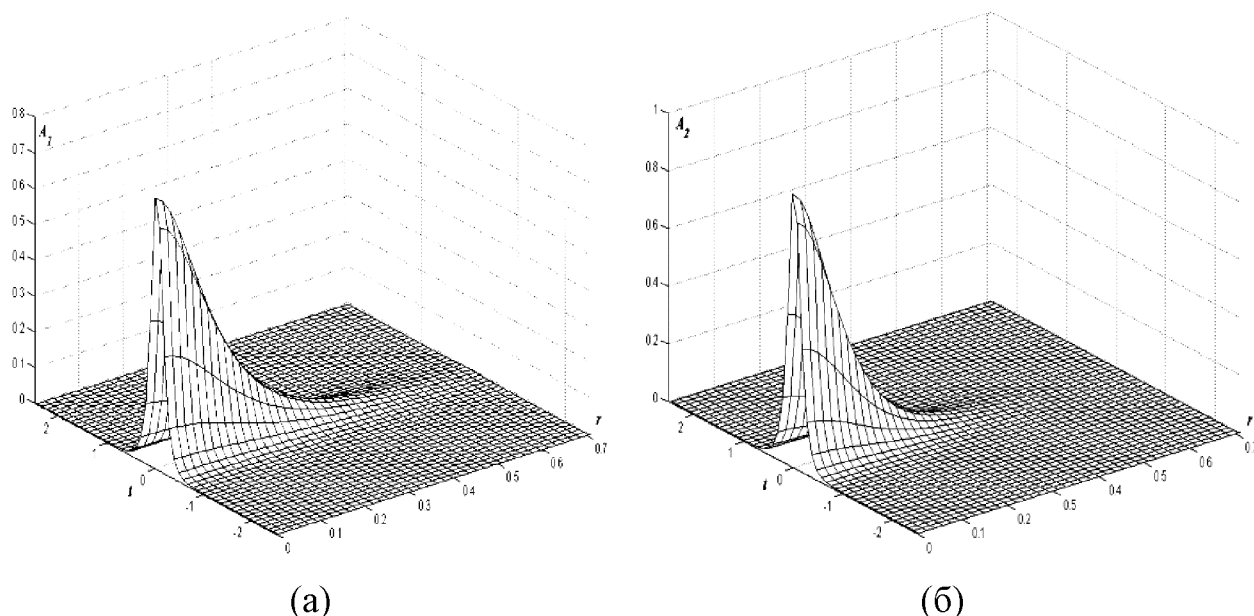


Рис. 4. Форма двухчастотного солитонного решения на основной (а) и удвоенной (б) частоте, соответствующая первому СЗ, для двух уравнений Шредингера в случае аксиально-симметричной среды с квадратичным и кубичным нелинейным откликом для $D_1 = 0.08$, $D_2 = 0.14$, $\tilde{D} = 0.1$, $\alpha = 5$, $\gamma = 20$.

В третьем параграфе главы IV исследуется устойчивость аксиально-симметричных солитонов к начальным возмущениям их формы. На данный

момент в литературе не существует единого мнения по поводу устойчивости солитонов в средах с комбинированной нелинейностью. В работе¹ на основе вариационного анализа показано, что в средах с квадратичной и кубической нелинейностью могут существовать солитоны, устойчивые к возмущениям начальной формы. В работе² на основе численных экспериментов утверждается, что стабилизации не наблюдается, и что анализ, выполненный на основе метода вариационного приближения, не точен. В этом параграфе показано, что наличие в среде квадратичной нелинейности наряду с кубической приводит к условной устойчивости солитонов, т.е. существует некоторая пороговая амплитуда возмущения: если она меньше порогового значения, то солитон распространяется без разрушения своей формы. При превышении возмущением этого порогового значения происходит коллапс солитона.

В четвертом параграфе этой главы исследуется вопрос о стабилизации 2D и 3D аксиально-симметричных солитонов. Для их стабилизации предлагается использовать слабую модуляцию коэффициента кубической нелинейности, а также варьировать длину фокусирующих слоев. Выявлен физический механизм, по которому происходит стабилизация солитона. Следует отметить, что ранее в литературе для ее достижения предлагалась либо среда с чередующимися по знаку нелинейности слоями, либо среда с сильно изменяющимися по величине (но одного знака) нелинейными слоями, что приводит к необходимости учета отраженной от неоднородностей волны и дополнительного анализа применимости математической модели, которое не было выполнено. В случае слабой модуляции коэффициента кубической нелинейности отраженная волна практически отсутствует. Рассматриваемая модуляция наряду с чередованием длины нелинейных слоев позволяет увеличить длину трассы без коллапса пуч-

¹ Mihalache D., Mazilu D., Malomed B. A., Lederer F., Crasovan L.-C., Kartashov Y. V., Torner L. Stable three-dimensional optical solitons supported by competing quadratic and self-focusing cubic nonlinearities. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. N 4. P. 047601-1:4.

² Itin A., Morishita T., Watanabe S. Reexamination of dynamical stabilization of matter-wave solitons. // Phys. Rev. A. 2006. V. 74. N 3. P. 033613-1:12.

ка в 70 раз в случае 2D и 4 раза для 3D солитонов.

В пятом параграфе четвертой главы рассматривается задача удвоения частоты в 3х мерном аксиально-симметричном случае. Показано, что для этого случая также применим подход к реализации эффективной конверсии частоты высокоинтенсивных фемтосекундных пучков, описанный в восьмом параграфе третьей главы для двумерного случая. Здесь демонстрируется, как можно достигать переключения между солитонными режимами на основной и удвоенной частоте в объемных средах.

В последнем параграфе четвертой главы сформулированы ее краткие выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Построены итерационные методы нахождения солитонов для системы уравнений Шредингера с комбинированной нелинейностью, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Найдены новые 2D и 3D солитоны. Сформированы условия, при которых СФ системы нелинейных уравнений Шредингера является солитонным решением.
2. Реализованы на многопроцессорных компьютерах нелинейные консервативные разностные схемы для некоторых задач лазерной физики, исследована эффективность распараллеливания от числа узлов сетки, числа процессоров для различных архитектур компьютера.
3. Продемонстрирована возможность стабилизации неустойчивых аксиально-симметричных солитонов нелинейного уравнения Шредингера за счет слабой и неоднородной модуляции коэффициента кубичной нелинейности.
4. Построены области реализации модуляционной неустойчивости для одного из решений задачи ГВГ в приближении длинных импульсов.
5. Предсказаны следующие эффекты, имеющие место при взаимодействии фемтосекундных импульсов оптической средой с квадратичной и кубичной нелинейностью:
 - множественность существования устойчивых солитонов, обладающих

одинаковой энергией, и возможность переключения между солитонами первой и второй гармоники;

- формирование в среде с квадратичной и кубичной нелинейностями локализованных структур, распространяющихся солитоноподобно. Отдельные субимпульсы могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в линейной среде;
- реализация эффекта, аналогичного квантовой телепортации, заключающегося во взаимовлиянии локализованных структур.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Full energy conversion without increasing of pulse duration under the SHG of high intensive femtosecond pulses. // Proceedings of SPIE. "ICO20: Lasers and laser technologies". China. 2005. V. 6028. P. 602810.
2. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Full energy conversion without increasing of pulse duration under the SHG of high intensive femtosecond pulses. // Technical Digest of 20th Congress of International Commission for Optics. Changchun. China. August 21-26. 2005. P. 256.
3. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Bistable regime of SHG of femtosecond laser pulse in optical fiber. // Proceedings of SPIE. "Nonlinear Optics Applications". Eds. M. A. Karpierz, A. D. Boardman, G. I. Stegeman. Poland. 2005. V. 5949. P. 59491J.
4. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Bistable regime of SHG of femtosecond laser pulse in optical fiber. // Abstract of International Congress on Optics and Optoelectronics. Warsaw. Poland. August 28- September 2. 2005. P. 75.
5. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Бистабильная зависимость эффективности ГВГ от суммарной энергии фемтосекундных импульсов в оптическом волокне. // Оптика и спектроскопия. 2006. Т. 101. №2. С. 293–297.
6. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Сравнение эффективности консервативных разностных схем и схем суммарной аппроксимации для задач взаимо-

- действия фемтосекундных импульсов в среде с квадратичной нелинейностью. // Международная конференция “Тихонов и современная математика”. Москва. Июнь 19-25. 2006. Секция 2. С. 130-131.
7. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Comparison of efficiency of various difference schemes for the problem of SHG in media with quadratic and cubic nonlinear response. // Abstract of 4th International Conference FDM’06. Lozenetz. Bulgaria. August 26-29. 2006. P. 24-25.
 8. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Компьютерное моделирование трехмерных задач удвоение частоты лазерного излучения на многопроцессорных компьютерах с общей памятью. // Препринт. – М.: МАКС Пресс. 2006. 44 С.
 9. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Comparison of efficiency of various difference schemes for the problem of SHG in media with quadratic and cubic nonlinear response. // Proceedings of 4th International Conference “Finite Difference Methods: Theory and Applications”. Lozenetz. Bulgaria. Eds. Farago J., Vabushchevich P., Vulkov L. Rousse University “Angel Kanchev”. 2007. P. 320-325.
 10. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Сравнение эффективности компьютерного моделирования задачи 3D ГВГ при использовании различных операционных систем на одно- и двухпроцессорных компьютерах. // Вестн. моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2007. №3. С. 18-25.
 11. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Numerical method for 2D soliton solution at SHG in media with combined nonlinearity. // Abstract of 12th International Conference MMA’07. Trakai. Lithuania. May 30-June 2. 2007. P. 100.
 12. Trofimov V. A., Matusevich O. V. Numerical Method for 2D Soliton Solution at SHG in Media with Time-Dependent Combined Nonlinearity. // Journal of Mathematical Modelling and Analysis. 2008. V. 12. N 3. P. 123-134.
 13. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Итерационный метод нахождения собственных функций системы двух уравнений Шредингера с комбинированной нелинейностью. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. №4. С. 180-191.
 14. Матусевич О. В. Сравнение консервативных схем и схем суммарной ап-

- проксимации для уравнения Шредингера в аксиально-симметричной среде. ССМУ ВМиК МГУ. 2008. №5. С. 76-82.
15. Матусевич О. В., Трофимов В. А., Юдина Е. А., Маломед Б. А. Эволюция двухчастотных солитонов в оптическом волокне с продольно неоднородной нелинейностью. // Оптика и спектроскопия. 2009. Т. 106. №1. С. 105-114.
 16. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Численный метод расчета солитонов нелинейного уравнения Шредингера в аксиально-симметричном случае. // Вестн. моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2009. №3. С. 12-19.
 17. Матусевич О. В., Трофимов В. А. Численный метод нахождения 3D солитонов нелинейного уравнения Шредингера в аксиально-симметричном случае. // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49. №11. С. 1-12.
 18. Trofimov V. A., Matusevich O. V., Lysak T. M., Volkov A. G. About possibility for realization on “superluminality” effect in nonlinear optics. // Международная конференция “Современные проблемы математики и математической физики”. Москва. Июнь 16-18. 2009. С. 373-374.
 19. Trofimov V. A., Lysak T. M., Matusevich O. V., Lan S. Optical soliton formation in one-dimensional photonic crystal with cubic nonlinear response. // Book of abstract of International School and Conference on Photonics (PHOTONICA 09). Belgrade. Serbia. August 24-28. 2009. P. 127.
 20. Trofimov V. A., Matusevich O. V., Lysak T. M. The effects similar to quantum teleportation and superluminality for optical pulses in medium with combined nonlinear response. // Poster of International Conference SFM'09. Photonics. Саратов. Сентябрь 21-24. 2009. <http://optics.sgu.ru/SFM/2009/report/1079>.
 21. Trofimov V. A., Lysak T. M., Matusevich O. V. Parameter control of optical soliton in one dimensional photonic crystal. // Abstract of 14th International Conference MMA'09. Daugavpils. Latvia. May 27-30. 2009. P. 83.