Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Маркин Артём Васильевич

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОРОГОВОЙ ВЕЙВЛЕТ-ОБРАБОТКЕ В МОДЕЛЯХ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор каф. матем. статистики факультета ВМК МГУ **Ушаков Владимир Георгиевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПИ РАН **Борисов Андрей Владимирович**
	кандидат физико-математических наук, доцент каф. матем. статистики и случ. процессов механико-математического факультета МГУ **Прохоров Александр Владимирович**
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Защита состоится **14 мая 2010 г. в 11 часов** на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://www.cmc.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «___» апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор **Н. П. Трифонов**

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Теория вейвлет-преобразования является одним из молодых и активно развивающихся направлений современной математики. Термин «вейвлет» (*wavelet*) можно перевести, как «маленькая волна», он был введен А. Гроссманом и Ж. Морле, которые занимались изучением сейсмических сигналов. Название отражает главное отличие вейвлетов от тригонометрических функций, используемых в классическом преобразовании Фурье – их локальность по времени. Поэтому если преобразование Фурье вычисляется с помощью растяжений единственной функции, то вейвлет-преобразование использует растяжения и сдвиги базового вейвлета. Поначалу в отечественной литературе не было единства терминологии, наравне с «вейвлетами» употреблялся термин «всплески». Но можно утверждать, что сейчас термин «вейвлеты» является общепринятым.

Фундаментальные теоретические результаты были получены в 80–90-х годах прошлого столетия. Тогда же были разработаны основные численные алгоритмы вейвлет-преобразования. Эти результаты связаны с именами И. Мейера, И. Добеши, С. Малла, Р. Койфмана, А. Коэна и других ученых. На сегодняшний день вейвлет-анализ является мощным математическим аппаратом. Одной из первых монографий, посвященной теории вейвлетов и построения вейвлет-базисов, является книга И. Мейера «Ondelettes et Opérateurs», вышедшая в 1990 году на французском языке (ее английский перевод[1] был издан два года спустя). И. Добеши предложила метод построения вейвлетов с компактным носителем. С. Малла разработал алгоритм вейвлет-преобразования асимптотически более быстрый, чем быстрое преобразование Фурье[2]. Ряд вероятностных аспектов теории вейвлет-разложения рассмотрен в уже упомянутой книге С. Малла, а также в монографиях Б. Видаковича[3], В. Хардла[4] и книге А. А. Короновского и А. Е. Храмова[5].

Основные задачи, решаемые с помощью вейвлетов, заключаются в сжатии сигналов, удалении шумов (случайных и неслучайных), получении временнóй

[1] Meyer Y. Wavelets and operators. — Cambridge University Press, 1992.

[2] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.

[3] Vidakovic B. Statistical modeling by wavelets. — John Wiley & Sons, 1999.

[4] Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, approximation and statistical applications // Lecture notes in statistics. — 2000. — Vol. 129.

[5] Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. — М.: Физматлит, 2003.

и частотной информации о сигнале. Например, ФБР использует вейвлеты для анализа и хранения отпечатков пальцев; вейвлет-разложение составляет основу стандарта сжатия изображений JPEG2000.

Главным инструментом сжатия сигналов и удаления шума является пороговая обработка вейвлет-коэффициентов. Основополагающие результаты в этой области получены американскими математиками Д. Донохо и И. Джонстоном, а также Р. Койфманом, Д. Пикардом, Дж. Керкячарианом, В. Хардлом, А. Цыбаковым. Было предложено несколько стратегий выбора порога, в том числе, обладающих хорошими асимптотическими свойствами. Позднее эти идеи были развиты в работах Р. Аверкампа, К. Удре, Й. Элдар, Х. Гао, Т. Цай, Л. Брауна, Г. Нэйсона, Я. Ванга и других.

При теоретическом обосновании того или иного порога внимание уделялось свойствам ошибки (или *риска* в моделях со случайным шумом) пороговой обработки с исследуемым порогом. Сам риск неизвестен, т. к. на практике неизвестен чистый исходный сигнал. Но это не мешает получить асимптотические свойства риска и показать, что *теоретически* результат обработки в среднем должен быть близок к оригинальному незашумленному сигналу.

По наблюдаемым данным возможно построить *оценку риска*. Для вычисления одного из порогов (*SureShrink*) используется минимизация этой оценки, которая при определенных условиях является несмещенной. Представляют теоретический и практический интерес асимптотические свойства этой оценки риска, ее способность оценивать неизвестный теоретический риск как меру ошибки пороговой обработки. Ранее при изучении оценки риска дисперсия шума полагалась известной, что, во-первых, заметно упрощает выкладки, а во-вторых, влияет на структуру оценки (см. работы Д. Донохо и И. Джонстона[6,7], а также упомянутые выше монографии С. Малла, Б. Видаковича, В. Хардла). В практических же задачах дисперсия шума всегда оценивается, причем зачастую по самому исследуемому сигналу. Поэтому необходимо учитывать и асимптотику оценки дисперсии шума, и характер зависимости этой оценки от наблюдаемого сигнала. Изучение свойств оценки риска пороговой обработки *при оцениваемой дисперсии шума* является основной задачей данной диссертации.

Вейвлет-анализ нашел успешное применение, в том числе в медицине. На-

[6] Donoho D. L., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journal of the American Statistical Association. — 1995. — Vol. 90. — P. 1200–1224

[7] Johnstone I. M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results // Statistica Sinica. — 1999. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 51–83

пример, в обработке кардиосигналов – электрокардиограмм (ЭКГ) и ритмограмм. Существует ряд количественных и качественных методик для диагностики различных сердечных заболеваний по этим сигналам. Т. к. типичная ЭКГ содержит от нескольких сотен тысяч до нескольких миллионов значений, то вычислительный аспект при обработке ЭКГ является весьма важным. Аппарат вейвлетов предоставляет сверхбыстрые алгоритмы прямого и обратного преобразования и при этом обеспечивает весьма высокое визуальное качество обработки.

С помощью пороговой обработки коэффициентов разложения можно эффективно удалять шум из ЭКГ, упрощая качественный анализ. Риск пороговой обработки неизвестен, но можно построить и вычислить его оценку. Используя масштабное свойство вейвлетов, возможно организовать автоматический поиск различных волн в ЭКГ. По ЭКГ строится производный кардиосигнал – ритмограмма, основная задача обработки которой заключается в оценке спектральных характеристик. При этом в ритмограмме обычно присутствуют паразитные импульсы, и для правильной оценки спектра необходимо либо удалить эти импульсы, либо использовать методы, устойчивые к выбросам.

Вейвлеты находят применение и в задачах обращения ряда линейных однородных операторов, когда по косвенным наблюдениям требуется восстановить исходную функцию. Например, в задаче обращения оператора Радона (называемой также задачей томографии или задачей восстановления томографических изображений). Задача обращения этого оператора относится к т. н. некорректным задачам, и как следствие, для решения требует специальных подходов, получивших название методов регуляризации. Д. Донохо предложил решать задачу томографии с использованием вейвлетов и специальных функций – вейглетов (*vaguelettes*). При этом регуляризация производится с помощью пороговой обработки коэффициентов разложения. Такой подход зарекомендовал себя как эффективный метод восстановления томографических изображений и впоследствии был развит в работах Э. Колашика, Н. Ли, Б. Люсьера, Ф. Абрамовича, Б. Сильвермана, Дж. Калифа, С. Малла, И. Джонстона и других. Здесь тоже возникает задача нахождения ошибки пороговой обработки с помощью оценки риска. Кроме того, стоит выяснить, как влияют на свойства оценки риска асимптотические свойства оценки дисперсии шума и некорректность задачи томографии.

Объектом исследований являются нелинейные вейвлет-оценки сигналов и изображений в моделях со случайными шумами.

Целью диссертационной работы является изучение асимптотических свойств оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при прямом и косвенном наблюдении объекта.

Задачи диссертационной работы.

1. Выяснить, обладает ли оценка риска свойством состоятельности и асимптотической нормальности.

2. Проанализировать, как влияют свойства оценки дисперсии шума на асимптотику оценки риска.

3. Исследовать асимптотики оценки риска пороговой обработки в задаче томографии.

4. Применить полученные результаты для решения прикладных задач в области обработки кардиосигналов.

Методы исследования. В работе использованы аналитические методы математического анализа, неравенства и предельные теоремы теории вероятностей, аппарат математической статистики. Кроме того, использована теория преобразования Радона и метод преобразования Фурье, адаптированный для неравномерной временно́й сетки.

Научная новизна и основные результаты. Все основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Обоснованы свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в случае прямого наблюдения одномерного объекта.

2. Изучено влияние на свойства оценки риска использование оценки дисперсии шума. Рассмотрен случай оценивания дисперсии шума как по независимой выборке, так и по коэффициентам исследуемого сигнала.

3. Получены асимптотические свойства оценки риска при оцениваемой дисперсии шума в задаче обращения оператора Радона.

4. В задаче обработки кардиосигналов вычислены значения оценок риска, проведено сравнение полученных результатов с теоретическими значени-

ями. Предложен метод очистки кардиосигналов от нежелательных выбросов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят как теоретический, так и практический характер. Они могут быть использованы при решении таких практических задач, как сжатие и очистка от шума и паразитных импульсов сигналов и изображений.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены лично автором или при его непосредственном участии.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научном семинаре «Теория риска и смежные вопросы» под руководством профессора В. Е. Бенинга, профессора В. Ю. Королёва и стар. преп. А. А. Кудрявцева, на научном семинаре «Современные методы обработки сигналов и изображений» под руководством доцента О. В. Шестакова и науч. сотр. Т. В. Захаровой, на XXVIII международном научном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (31 мая – 5 июня 2009 г., Закопане, Польша), на X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (1 – 8 октября 2009 г., Сочи – Дагомыс).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах, из них 4 статьи [1, 3–5] в журналах, входящих в список ВАК *«Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»*, 2 работы в сборниках трудов конференций [2, 6].

Структура и объем диссертации. В работе принята двойная нумерация формул, определений, теорем и рисунков. Первое число указывает на номер главы, а второе – на порядковый номер соответствующего объекта в главе. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего в себя 115 наименований. Общий объем работы составляет 104 страницы.

Благодарности. Автор глубоко признателен профессору В. Г. Ушакову и доценту О. В. Шестакову за постоянное внимание к работе, плодотворные обсуждения и поддержку. Автор благодарит профессора В. Ю. Королёва и науч. сотр. Т. В. Захарову за разностороннюю помощь, оказанную во время исследований и работы над диссертацией.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, в кратком виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе получены асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов в случае прямого наблюдения одномерного объекта.

Наблюдается сигнал $\mathbf{X} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$, состоящий из отсчетов полезного неслучайного сигнала f и некоррелированного гауссовского шума $\boldsymbol{\varepsilon}$ с дисперсией σ^2. Имеется неоднородный вейвлет-базис $\{\phi_{0,k},\ \psi_{j,k}\}$ на основе вейвлета с компактным носителем. Назовем j уровнем разложения, а 2^{-j} – масштабом. После двоичного вейвлет-преобразования (ДВП) имеется набор из $N = 2^J$ вейвлет–коэффициентов $X_W[i] = f_W[i]+\varepsilon_W[i]$, $i = \overline{1, N}$. Здесь совершен переход от двойного индекса (j, k) к одиночному $i = 2^j + k + 1$. Если $j = \overline{0,\ J-1}$, $k = \overline{0,\ 2^j - 1}$, то $i = \overline{2,\ N}$. Коэффициент с индексом $i = 1$ соответствует коэффициенту $\langle f, \phi_{0,0}\rangle$.

К вейвлет–коэффициентам применяется пороговая обработка с пороговой функцией $\rho(x, T)$, в качества порога выбран *универсальный* порог $T = \sigma\sqrt{2\ln N}$. Для мягкой и жесткой пороговой обработки функция ρ соответственно равна

$$\rho_S(x,T) = \begin{cases} x - T & \text{при } x > T, \\ x + T & \text{при } x < -T, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant T \end{cases} \quad \text{и} \quad \rho_H(x,T) = \begin{cases} x & \text{при } |x| > T, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant T. \end{cases}$$

Риск пороговой обработки определяется следующим образом[8]:

$$r(f,T) = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}\left\{ f_W[i] - \rho(X_W[i],\, T)\right\}^2 . \tag{1.9}$$

Оценивая неизвестные $(f_W[i])^2$, как $(X_W[i])^2 - \sigma^2$ или $(X_W[i])^2 - \hat{\sigma}^2$, где $\hat{\sigma}^2$ – оценка дисперсии шума, получаем такие оценки риска:

$$\tilde{r}(f,T) = \sum_{i=1}^{N} \Phi\left((X_W[i])^2\right), \quad \hat{r}(f,\hat{T}) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}\left((X_W[i])^2\right).$$

[8] Нумерация формул, теорем и рисунков в автореферате соответствует их нумерации в диссертации.

$\Phi(x)$ для мягкой и жесткой пороговой обработки соответственно равна

$$\Phi_S(x) = \begin{cases} x - \sigma^2 & \text{при } x \leqslant T^2, \\ \sigma^2 + T^2 & \text{при } x > T^2, \end{cases} \qquad \Phi_H(x) = \begin{cases} x - \sigma^2 & \text{при } x \leqslant T^2, \\ \sigma^2 & \text{при } x > T^2, \end{cases}$$

$\hat{\Phi}_S(x)$ и $\hat{\Phi}_H(x)$ получаются заменой в $\Phi_S(x)$ и $\Phi_H(x)$ дисперсии шума σ^2 на ее оценку $\hat{\sigma}^2$, а порога T на $\hat{T} = \sqrt{2\hat{\sigma}^2 \ln N}$. Соответствующие мягкой и жесткой пороговой обработке риски обозначим r_S и r_H, оценки риска при известной дисперсии шума – $\tilde{r}_S$ и $\tilde{r}_H$, оценки риска при оцениваемой дисперсии шума – $\hat{r}_S$ и $\hat{r}_H$.

В теоремах 1.1–1.7 предполагается, что *функция f кусочно регулярна на $[0,1]$, т. е. отрезок $[0,1]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых функция f равномерно регулярна по Липшицу с некоторым показателем регулярности, а минимальный показатель равномерной регулярности равен $\alpha > \frac{1}{2}$.*

В случае, когда дисперсия шума полагается известной, выражение для оценки риска представляет собой сумму независимых случайных величин, для которых выполнено условие Линдеберга.

Теорема 1.1. *Для любого $a > 0$ при $N \to \infty$*

$$\frac{\tilde{r}_S(f,T) - r_S(f,T)}{N^{a+1/2}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Замечание. В теореме 1.1 не делается предположений о виде порога, он может быть произвольным, но не случайным.

При использовании жесткого порога оценка риска является смещенной, однако при делении на $N^{a+1/2}$ и $N \to \infty$ ее смещение стремится к нулю.

Теорема 1.2. *Для любого $a > 0$ и $T = \sigma\sqrt{2\ln N}$ при $N \to \infty$ выполнено*

$$\frac{\tilde{r}_H(f,T) - r_H(f,T)}{N^{a+1/2}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Замечание. В отличие от теоремы 1.1 вид порога принципиален. Например, при пороге $T = \sigma\sqrt{\ln\ln N}$ утверждение теоремы 1.2 неверно.

Теорема 1.3. *При мягкой и жесткой пороговой обработке с порогом $T = \sigma\sqrt{2\ln N}$ имеет место сходимость по распределению: при $N \to \infty$*

$$\frac{\tilde{r}(f,T) - r(f,T)}{\sqrt{2\sigma^4 N}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Замена дисперсии шума на ее оценку в выражении для оценки риска существенно влияет на асимптотику оценки риска. Оценка риска становится суммой зависимых случайных величин, и эту зависимость необходимо учитывать.

Теорема 1.4. *Пусть* $\hat\sigma^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat\sigma^2 = \sigma^2 + \mathsf{o}(1)$ *и* $\mathsf{D}\hat\sigma^2 = \mathsf{O}(N^{-\beta})$, $\beta > 0$. *Пусть выбран порог* $\hat T = \hat\sigma\sqrt{2\ln N}$, *тогда при* $N \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat r_S(f,\hat T) - r_S(f,T)}{N} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Замечание. Если порог случаен, то в отличие от теоремы 1.1 он не может быть произвольным. Построен пример порога, при котором утверждение теоремы 1.4 неверно.

Теорема 1.5. *Пусть* $\hat\sigma^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat\sigma^2 = \sigma^2 + \mathsf{o}(1)$ *и* $\mathsf{D}\hat\sigma^2 = \mathsf{O}(N^{-\beta})$, $\beta > 0$. *Пусть выбран порог* $\hat T = \hat\sigma\sqrt{2\ln N}$, *тогда при* $N \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat r_H(f,\hat T) - r_H(f,T)}{N} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Замечание. Если используется оценка $\hat\sigma$ стандартного отклонения, и выполнено $\mathsf{E}\hat\sigma = \sigma + \mathsf{o}(1)$, $\mathsf{D}\hat\sigma = \mathsf{O}(N^{-\beta})$, $\beta > 0$, то утверждения теорем 1.4 и 1.5 останутся справедливыми.

Если повысить требования на оценку $\hat\sigma^2$, то порядок знаменателя в утверждениях теорем 1.4 и 1.5 можно понизить.

Теорема 1.6. *Пусть* $\hat\sigma^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat\sigma^2 = \sigma^2 + \mathsf{O}\left(N^{-\upsilon}\right)$ *и* $\mathsf{D}\hat\sigma^2 = \mathsf{O}(N^{-\beta})$, $\upsilon > 0$, $\beta > 0$, *а константа* $c = \min\left\{\frac{1}{2}, \upsilon, \frac{\beta}{2}\right\}$. *Пусть выбран порог* $\hat T = \hat\sigma\sqrt{2\ln N}$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *и любого* $a > \frac{1}{2} - c$ *при мягком и жестком пороге и* $N \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat r(f,\hat T) - r(f,T)}{N^{a+1/2}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

При этом предельное распределение $\frac{(\hat r - r)}{\sqrt N}$ определяется предельным распределением

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left((X_W[i])^2 - \mathsf{E}(X_W[i])^2\right)}{\sqrt N} - \sqrt N\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right).$$

Теорема 1.7. *Пусть* $\hat\sigma^2$ *– состоятельная оценка дисперсии шума, не зависящая от* $X_W[i]$, *и выполнено* $\sqrt N\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \Sigma^2\right)$. *Пусть выбран порог* $\hat T = \hat\sigma\sqrt{2\ln N}$. *Тогда при мягком и жестком пороге и* $N \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat r(f,\hat T) - r(f,T)}{\sqrt{2\sigma^4 N}} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{\Sigma^2}{2\sigma^4}\right). \tag{1.33}$$

Замечание. В теореме 1.7 ограничения на моменты $\hat{\sigma}^2$ не накладываются, а оценка дисперсии шума делает вклад в дисперсию предельного распределения (ср. с Т. 1.3).

При оценивании дисперсии шума по коэффициентам $X_W[i]$ на уровне $J-1$ (обозначим их $Z_1, \ldots, Z_{N/2}$) рассмотрены три популярные оценки: S^2 ($\hat{\sigma}_1^2$), интерквартильный размах ($\hat{\sigma}_2$) и абсолютное медианное отклонение от медианы (MAD, $\hat{\sigma}_3$):

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N/2}(Z_i - \overline{Z})^2, \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{Z_{N/2,3/4} - Z_{N/2,1/4}}{2\zeta_{3/4}}, \quad \hat{\sigma}_3 = \frac{\operatorname*{med}_i |Z_i - \operatorname*{med}_j Z_j|}{\zeta_{3/4}},$$

где $\overline{Z}$ – выборочное среднее, $Z_{N/2,\gamma}$ – выборочная квантиль порядка γ, ζ_γ – квантиль порядка γ стандартного нормального распределения.

Теорема 1.8. *Пусть функция f задана на $[0,1]$ и равномерно регулярна с показателем регулярности $\alpha > \frac{1}{2}$. Пусть дисперсия шума оценивается по вейвлет–коэффициентам на последнем уровне разложения ($j = J-1$) с помощью оценки $\hat{\sigma}^2$. Пусть выбран порог $\hat{T} = \hat{\sigma}\sqrt{2\ln N}$, применяется мягкая или жесткая пороговая обработка и $N \to \infty$. Если использована оценка $\hat{\sigma}^2$ на основе S^2, то*

$$\frac{\hat{r}(f,\hat{T}) - r(f,T)}{\sqrt{2\sigma^4 N}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Если использована оценка $\hat{\sigma}^2$ на основе интерквартильного размаха или MAD, то

$$\frac{\hat{r}(f,\hat{T}) - r(f,T)}{\sqrt{2\sigma^4 N}} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\left\{4\zeta_{3/4}\varphi\left(\zeta_{3/4}\right)\right\}^2}\right),$$

φ – плотность стандартного нормального распределения.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 2, 5].

Во второй главе рассмотрены асимптотические свойства оценки риска пороговой обработки в задаче томографии.

Наблюдается двумерный сигнал $\mathbf{X} = \mathcal{R}\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$, состоящий из отсчетов радоновского образа $\mathcal{R}f$ двумерного полезного неслучайного сигнала f и некоррелированного гауссовского шума $\boldsymbol{\varepsilon}$ с дисперсией σ^2. Имеется неоднородный двумерный вейвлет-базис $\left\{\phi_{j_0,\mathbf{k}},\, \psi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\right\}$, построенный по одномерному вейвлет-базису на основе вейвлета ψ, $j_0, j \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $j \geqslant j_0$, j_0 фиксировано, $\lambda = \overline{1,3}$. Задача томографии решается с помощью функций специального вида, названных вейглетами: $\xi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]} = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{R}\psi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}$, где $\mathcal{I}$ – оператор Рисса. По построению $\left[\mathcal{R}f,\, \xi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\right] = \langle f,\, \psi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\rangle$ и

$$Y_{\lambda;j,\mathbf{k}} = \left[\mathbf{X},\, \xi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\right] \sim \mathcal{N}\left(\langle f,\, \psi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\rangle, \sigma_{\lambda;j}^2\right), \quad \sigma_{\lambda;j}^2 = 2^j\sigma^2\|\xi_{0,0,0}^{[\lambda]}\|_2^2.$$

Предполагается, что вейвлет ψ имеет компактный носитель и удовлетворяет условиям регулярности, обеспечивающим существование вейглетов.

Мягкая пороговая обработка, применяемая к коэффициентам деталей $\langle f,\, \psi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\rangle$, выполняет задачу регуляризации. В качестве порога используется порог Колашика $T_{\lambda;j} = \sqrt{2\sigma_{\lambda;j}^2 \ln 2^{2j}}$. Риск $r(f)$ такой пороговой обработки определяется, как

$$r(f) = \sum_{j=j_M}^{J-1}\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1} \mathsf{E}\left\{\langle f,\, \psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}\rangle - \rho_S\left(\left[\mathbf{X},\, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}\right], T_{\lambda;j}\right)\right\}^2, \qquad (2.13)$$

где j_M – уровень разложения, с которого начинается пороговая обработка. Оценки риска при известной (σ^2) и оцениваемой ($\hat{\sigma}^2$) дисперсии шума соответственно равны

$$\tilde{r}(f) = \sum_{j=j_M}^{J-1}\sum_{\lambda,\mathbf{k}} \Phi\left(\left|\left[\mathbf{X},\, \xi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\right]\right|^2, T_{\lambda;j}\right), \quad \hat{r}(f) = \sum_{j=j_M}^{J-1}\sum_{\lambda,\mathbf{k}} \hat{\Phi}\left(\left|\left[\mathbf{X},\, \xi_{j,\mathbf{k}}^{[\lambda]}\right]\right|^2, \hat{T}_{\lambda;j}\right),$$

где $\hat{T}_{\lambda;j} = \sqrt{2\hat{\sigma}_{\lambda;j}^2 \ln 2^{2j}}$, $\hat{\sigma}_{\lambda;j}^2 = 2^j\hat{\sigma}^2\|\xi_{0,0,0}^{[\lambda]}\|_2^2$ и

$$\Phi(x, T_{\lambda;j}) = \begin{cases} x - \sigma_{\lambda;j}^2 & \text{при } x \leqslant T_{\lambda;j}^2, \\ \sigma_{\lambda;j}^2 + T_{\lambda;j}^2 & \text{при } x > T_{\lambda;j}^2, \end{cases}$$

$$\hat{\Phi}(x, \hat{T}_{\lambda;j}) = \begin{cases} x - \hat{\sigma}_{\lambda;j}^2 & \text{при } x \leqslant \hat{T}_{\lambda;j}^2, \\ \hat{\sigma}_{\lambda;j}^2 + \hat{T}_{\lambda;j}^2 & \text{при } x > \hat{T}_{\lambda;j}^2. \end{cases}$$

В теоремах 2.1–2.4 предполагается, что *функция f задана на квадрате* $[0,\,1]\times[0,\,1]$ *и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем* $\alpha > 0$, а $j_M \geqslant \frac{J}{\alpha+1}$, $L = 2^{2J}$.

Теорема 2.1. *В задаче томографии при известной дисперсии шума и $L \to \infty$*

$$\frac{\tilde{r}(f) - r(f)}{L\sqrt{b_2\left(\sigma_{1;0}^4 + \sigma_{2;0}^4 + \sigma_{3;0}^4\right)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,\,1), \quad \text{где } b_2 = \frac{2}{2^4-1} = \frac{2}{15}.$$

Замечание. По сравнению с теоремой 1.3 порядок знаменателя вырос на $\frac{1}{2}$, что является следствием роста дисперсии коэффициентов при уменьшении масштаба.

По аналогии с теоремами 1.4, 1.6, 1.7 формулируются и доказываются теоремы 2.2–2.4 для случая, когда в выражения для оценки риска и порога вместо дисперсии шума σ^2 подставляется ее оценка $\hat{\sigma}^2$. При этом порядок знаменателя в утверждениях теорем повышается на $\frac{1}{2}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\hat{\sigma}^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \mathsf{o}(1)$ *и* $\mathsf{D}\hat{\sigma}^2 = \theta_L = \mathsf{O}(L^{-\beta})$, $\beta > 0$. *Тогда при* $L \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat{r}(f) - r(f)}{L^{3/2}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{2.20}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $\hat{\sigma}^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \mathsf{O}(L^{-\upsilon})$ *и* $\mathsf{D}\hat{\sigma}^2 = \mathsf{O}(L^{-\beta})$, υ, $\beta > 0$. *Тогда при любом* $a > \frac{1}{2} - c$, $c = \min\left\{\frac{1}{2}, \upsilon, \frac{\beta}{2}\right\}$ *и* $L \to \infty$ *выполнено*

$$\frac{\hat{r}(f) - r(f)}{L^{a+1}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $\hat{\sigma}^2$ *– оценка дисперсии,* $\mathsf{E}\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \mathsf{O}(L^{-\upsilon})$ *и* $\mathsf{D}\hat{\sigma}^2 = \mathsf{O}(L^{-\beta})$, $\upsilon > 0$, $\beta > \frac{1}{2}$. *Пусть* $\hat{\sigma}^2$ *не зависит от* $Y_{\lambda;j,k_1,k_2}$ *и* $\sqrt{L}\left(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\right) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0,\, \Sigma^2\right)$ *при* $L \to \infty$, *тогда*

$$\frac{\hat{r}(f) - r(f)}{L\sqrt{b_2\left(\sigma_{1;0}^4 + \sigma_{2;0}^4 + \sigma_{3;0}^4\right)}} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{\left(\sigma_{1;0}^2 + \sigma_{2;0}^2 + \sigma_{3;0}^2\right)^2 \Sigma^2}{d_2\,\sigma^4\left(\sigma_{1;0}^4 + \sigma_{2;0}^4 + \sigma_{3;0}^4\right)}\right),$$

где $b_2 = \frac{2}{2^4-1} = \frac{2}{15}$, $d_2 = \frac{2\,(2^3-1)^2}{2^4-1} = \frac{98}{15}$.

Замечание. Если функция f равномерно регулярна с параметром $\alpha \geqslant \frac{1}{4}$, а $j_M \geqslant \frac{4}{5}J$, то в теореме 2.4 можно ослабить требования на $\hat{\sigma}^2$. Достаточно потребовать только состоятельность, асимптотическую нормальность и независимость от $Y_{\lambda;j,\mathbf{k}}$.

Замечание. Если функция f равномерно регулярна с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$, то пороговую обработку и суммирование в (2.13) и выражениях для оценок риска можно начинать с произвольного $j_M = j_0$, $0 \leqslant j_0 \leqslant J-1$, утверждения теорем этой главы останутся справедливыми.

Результаты второй главы опубликованы в работе [4].

В третьей главе рассмотрены приложения вейвлет-анализа и робастных процедур к задачам обработки электрокардиограмм (ЭКГ) и ритмограмм. Применены результаты первой главы для оценки риска пороговой обработки вейвлет–коэффициентов ЭКГ. Описан метод построения ритмограммы по ЭКГ с использованием непрерывного вейвлет-преобразования. Решена задача отсева паразитных импульсов из ритмограммы.

ЭКГ является важнейшим инструментом диагностики различных сердечно-сосудистых заболеваний. ЭКГ представляет собой график изменения разности потенциалов, возникающих на поверхности тела в результате работы сердца. В структуре ЭКГ выделяют несколько волн: P, Q, R, S, T-волны (рисунок 3.1). По временам появления R-пиков строится производный кардиосигнал – ритмограмма, – спектральные характеристики которого также важны при выявлении сердечных патологий. При построении ритмограммы по оси абсцисс откладывают времена появления R-пиков, а по оси ординат – разности между временами появления соседних R-пиков (т. н. RR-интервалы) (см. рисунок 3.2).

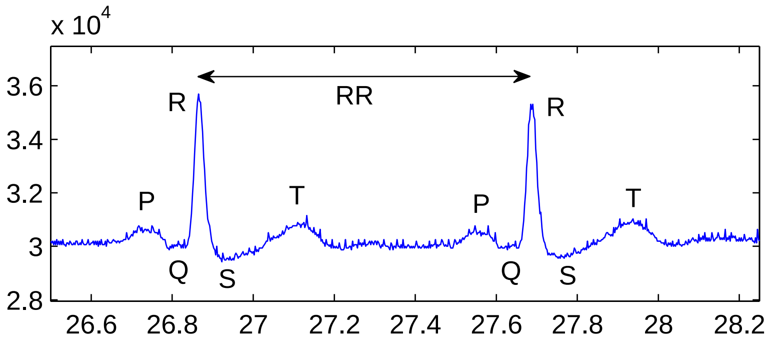

Рис. 3.1. Фрагмент ЭКГ с помеченными P, Q, R, S, T-волнами. По оси абсцисс отложено время (в секундах), по оси ординат – напряжение

К задачам обработки кардиосигналов относятся: задача удаление шума из ЭКГ; построение ритмограммы (поиск R-пиков); отсев эктопических (паразитных) выбросов (рисунок 3.2) из ритмограммы для повышения точности спектрального анализа.

К предварительно очищенной от шума реальной ЭКГ был добавлен смоделированный гауссовский шум с известной дисперсией. Для решения задачи удаления шума к зашумленной ЭКГ применено ДВП, а к полученным коэффициентам – мягкая пороговая обработка с универсальным порогом. Т. к. в данном случае исходный чистый сигнал и параметры шума известны, возможно сравнить оценку риска пороговой обработки и сам риск. При оценивании дисперсии шума по коэффициентам на самом мелком масштабе с помощью

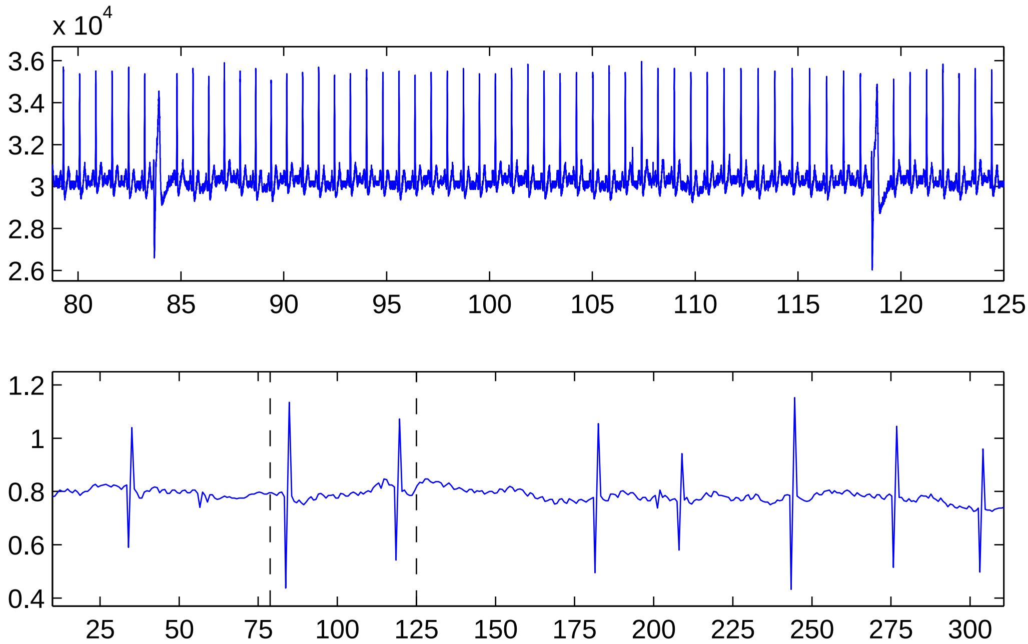

Рис. 3.2. Фрагмент ЭКГ (вверху) и ритмограмма (внизу). По осям абсцисс отложено время в секундах. Ось ординат на верхнем графике – напряжение, на нижнем – длина RR-интервала (в секундах). Участок ритмограммы, соответствующий фрагменту ЭКГ, отделен пунктирными линиями. Около 84-й и 119-й секунды появляются пары эктопических импульсов

MAD имеем
$$\frac{\hat{r}_S - r_S}{\sqrt{2\sigma^4 N}} \approx -3.71.$$
По теореме 1.8 это отношение асимптотически нормально с нулевым средним и дисперсией ≈ 1.36. Полученное значение отклоняется от нуля несколько сильнее, чем это характерно для предельного распределения. Это связано главным образом с тем, что оценка с помощью MAD заметно недооценивает σ. Заметим, что значение $\hat{r}_S$ отличается от r_S менее, чем на 4.4%.

Для построения ритмограммы к ЭКГ применено НВП на определенном масштабе, непосредственно R-пики находятся с помощью алгоритма поиска локальных максимумов вейвлет-коэффициентов.

Отсев эктопических импульсов из ритмограммы производится с помощью доверительных интервалов для разностей ритмограммы. В качестве модели ритмограммы принята следующая модель:

$$RR(t) = A_1 \sin(2\pi\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(2\pi\omega_2 t + \phi_2) + \varepsilon(t) + C, \tag{3.1}$$

где $t = t_1, \ldots, t_N$, 0.04 Гц $\leqslant \omega_1 \leqslant$ 0.15 Гц, 0.15 Гц $< \omega_2 \leqslant$ 0.4 Гц, $\varepsilon(t)$ – некоррелированный гауссовский шум, C – константа. Доверительные интервалы для разностей ритмограммы выглядят так:

$$\left(-h_i^k + \sqrt{2}\sigma F^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad h_i^k + \sqrt{2}\sigma F^{-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right), \tag{3.3}$$

где

$$h_i^k = 4A_1 \left|\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(t_i - t_{i-k})}{2}\right)\right| + 4A_2 \left|\sin\left(\frac{2\pi\omega_2(t_i - t_{i-k})}{2}\right)\right|,$$

а $F(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Параметры модели (3.1) вычисляются методом робастной регрессии, в котором квадратичная функция остатков заменена менее быстро растущей функцией Эндрюса

$$\hat{\rho}(x) = \begin{cases} c\left(1 - \cos\left(\frac{x}{c}\right)\right) & \text{при } |x| < c\pi, \\ 2c & \text{при } |x| \geqslant c\pi, \end{cases} \qquad c = 0.85.$$

В качестве факторов регрессии выступают тригонометрические векторы

$$\mathbf{X}_2 = (\cos(2\pi\omega t_1), \cos(2\pi\omega t_2), \ldots, \cos(2\pi\omega t_N)), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{X}_3 = (\sin(2\pi\omega t_1), \sin(2\pi\omega t_2), \ldots, \sin(2\pi\omega t_N)) \tag{3.11}$$

и единичный вектор $\mathbf{X}_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, к которым применена процедура ортогонализации Грама–Шмидта. Для набора частот ω^l, 0.04 Гц $\leqslant \omega^l \leqslant$ 0.4 Гц (l – индекс, а не степень) вычисляются робастные оценки соответствующих амплитуд и находятся максимумы в двух диапазонах:

$$A_1 = \max_{0.04 \leqslant \omega^l \leqslant 0.15} \left\{A(\omega^l)\right\}, \qquad A_2 = \max_{0.15 < \omega^l \leqslant 0.4} \left\{A(\omega^l)\right\}.$$

Соответствующие им ω_1, ω_2, ϕ_1, ϕ_2 считаются искомыми для модели (3.1). Результат работы метода на реальных данных приведен на рисунке 3.10.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [3, 6].

В заключении сделаны общие выводы по диссертации, сформулированы все основные результаты, выносимые на защиту, и предложен ряд перспективных направлений исследований и задач, которые могут решаться с использованием результатов данной работы.

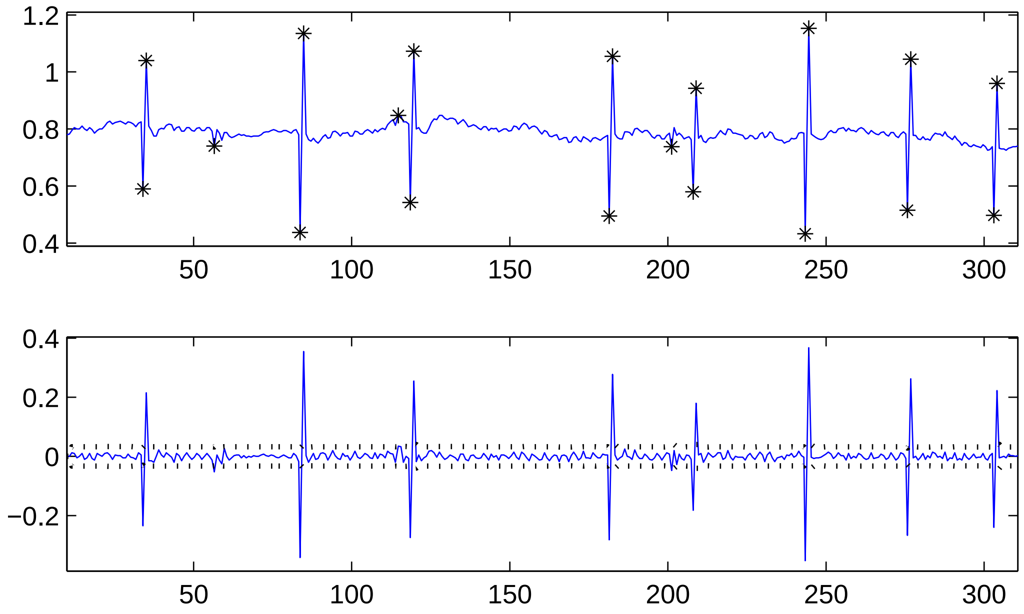

Рис. 3.10. Исходная ритмограмма (вверху), разности длин RR-интервалов и доверительные интервалы для этих разностей (внизу). По всем осям отложено время в секундах. Звездочками помечены импульсы, которые определены как эктопические. Границы доверительных интервалов изображены пунктирными линиями

Результаты, выносимые на защиту

В диссертационной работе получены свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов.

1. Обоснование состоятельности оценки риска в случае использования оценки дисперсии шума при прямом наблюдении объекта.

2. Обоснование асимптотической нормальности оценки риска при оценивании дисперсии шума по независимой выборке и по коэффициентам исследуемого сигнала.

3. Обоснование асимптотических свойств оценки риска пороговой обработки при использовании оценки дисперсии шума в задаче томографии.

4. Применение полученных результатов для оценки рисков при решении задачи очистки ЭКГ от шума. Метод отсева выбросов из ритмограмм на

основе робастных процедур и компенсированного преобразования Фурье.

Список публикаций по теме диссертации

1. Маркин А. В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения. — 2009. — Т. 3, № 4. — С. 57–63.

2. Маркин А. В. Состоятельность оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 1094–1095.

3. Маркин А. В., Шестаков О. В. Отсев эктопических импульсов из ритмограммы с использованием робастных оценок // Информатика и ее применения. — 2008. — Т. 2, № 2. — С. 47–54.

4. Маркин А. В., Шестаков О. В. Асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет коэффициентов в задаче томографии // Информатика и ее применения. — 2010. — Т. 4, № 2. — С. 2–11.

5. Маркин А. В., Шестаков О. В. О состоятельности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Вестник Московского университета, серия 15, вычислительная математика и кибернетика. — 2010. — № 1. — С. 26–33.

6. Markin A. V., Shestakov O. V. Elimination of ectopic beats from heart tachogram using robust estimates // XXVIII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. — 2009. — P. 54.