

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова

---

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи  
УДК 519.6

Ланкин Дмитрий Федорович

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ  
ДРЕВОВИДНЫХ ВЛАСТНЫХ СТРУКТУР**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Михайлов Александр Петрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры высшей математики  
Московского физико-технического института  
Черняев Александр Петрович

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математического моделирования  
Московского энергетического института  
Амосов Андрей Авенирович

Ведущая организация: Российский государственный  
социальный университет

Защита состоится 26 мая 2010 г. в «        » час. «        » мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ <http://cs.msu.su> в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.43».

Автореферат разослан «        » апреля 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 501.001.43  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Захаров Е. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** За прошедшее столетие математика стала широко использоваться в социальных науках и ныне применяется во многих разделах политологии — от вопросов заключения контрактов на использование городского гаража до проблемы предотвращения ядерной войны.

Математическую модель можно во многих отношениях уподобить масштабной модели самолета или макету здания. У модели самолета или макета здания нет многих черт их полномасштабных прототипов: они меньше размерами, многие детали в них выполнены весьма неточно, и многие элементы внутреннего устройства настоящего самолета или здания в модели отсутствуют. Но модель, тем не менее, очень полезна для исследователя тем, что она отражает фундаментальные свойства объекта-прототипа. Модель самолета может быть использована при испытаниях в аэродинамической трубе; картонный макет позволяет увидеть структуру здания во всех трех измерениях еще до его постройки. Модели политических процессов выполняют похожую задачу, выявляя для изучения и экспериментирования ключевые признаки анализируемых процессов.

В то же время, следует отметить, что большинство моделей политических процессов предназначены, в основном, для анализа политической конъюнктуры, для сопровождения текущей "борьбы за власть". Нельзя сказать, что общая политология не подразумевает применения математического языка; многие современные политологические учения и теории используют такие понятия, как "обратная связь", "потоки информации" и т.д., но только как "образы", служащие для краткой иллюстрации тех или иных положений. При этом полных, масштабных моделей, использующих, например, опыт и достижения школы математического моделирования Самарского-Тихонова, в политологии не так много.

Математические модели помогают политологам более подробно изучать особенности политических процессов. В нескольких уравнениях математической модели зачастую может быть заключен огромный объем информации, во многих случаях возможна и компьютерная имитация политического процесса. Используя математические средства, политолог оказывается в состоянии взять на вооружение многие из методов, разработанных в логике, статистике, физике, экономике и других отраслях знаний, и применить их к изучению политического поведения. Так, при относительно небольшом числе допущений возможно построение весьма содержательных и поддающихся исследованию математических моделей, описывающих некоторые ключевые воздействия в системе "Государственная власть -

Гражданское общество”.

Тем самым методология математического моделирования может послужить более глубокому пониманию процессов, протекающих в системе ”Власть-Общество”, что и определяет актуальность данной работы.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является изучение методами математического моделирования процессов распределения власти в системе ”Государственная власть - Гражданское общество” и различных стратегий по ”модернизации” властной системы (реформирование структур власти, борьба с коррупцией).

**Научная новизна, теоретическая и практическая значимость.**

1. Предложена допускающая аналитическое решение базовая модель древовидных властных структур, при этом в ходе ее исследования получено аналитическое представление для решения задачи, соответствующей базовой модели древовидных властных иерархий. Аналитическое решение получено как в стационарном, так и в нестационарном случае.
2. На основе базовой модели древовидных иерархий поставлены и исследованы две важные задачи, связанные с реформированием (изменением числа инстанций или иерархических слоев) властной иерархии и изменением в характере общественного сознания с целью достижения заданных результатов в работе властной системы. При этом получены нетривиальные зависимости между параметрами системы ”Власть-Общество”, позволяющие определить критические пределы изменений, происходящих во властных структурах в процессе их реформирования.
3. Предложены стратегии ограничения коррупции и проведен их сравнительный анализ для различных по степени разветвленности властных иерархий. На основе полученных результатов выделены наиболее эффективные стратегии ограничения коррупции по критерию «затраты-прибыль».
4. Создано программное средство для моделирования процессов распределения власти, протекающих в системе ”Государственная власть – Гражданское общество”.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийской научной конференции ”Сорокинские чтения” (с 2005 ежегодно на социологическом факультете МГУ)

2. Зимних чтениях РГСУ по математике, информатике и социологии (с 2007 ежегодно в РГСУ)
3. Третьей международной конференции по проблемам управления (ИПУ РАН 20-22 июня 2006 г.)
4. III Всероссийском социологическом конгрессе (МГУ им. М.В. Ломоносова, социологический факультет 3-5 октября 2006 г.)
5. VIII международной научной конференции "Модернизация экономики и общественное развитие" (ГУ ВШЭ 3-5 апреля 2007 г.)
6. 2-ой международной конференции "Математическое моделирование социальной и экономической динамики" (РГСУ 20-22 июня 2007 г.)
7. VI международном семинаре "Mathematical models&modeling in laser-plasma processes" (Будва (Черногория) 30 мая - 6 июня 2009 г.)

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в десяти работах, две из них в изданиях, рекомендованных ВАК [1 – 2], четыре статьи в тематических сборниках [3 – 6], четыре — тезисы докладов конференций [7 – 10].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Текст изложен на 108 страницах, диссертация содержит 24 рисунка и 16 таблиц. Список литературы включает 46 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе **введения** раскрывается актуальность темы работы, приводится краткое описание проблем, относящихся к теме диссертации.

Во втором разделе введения представлено описание ключевых взаимодействий в системе "Государственная власть - Гражданское общество", там же вводятся основные понятия и используемая в диссертации терминология, предложенные автором модели "Власть-Обществом" А.П. Михайловым. Под *властной иерархией* понимается упорядоченная по старшинству совокупность институтов (инстанций, должностей), наделенных властными полномочиями от имени государства (иерархия может быть как цепочечной, так и иметь более сложную топологию). *Гражданское общество* — часть социума, непосредственно

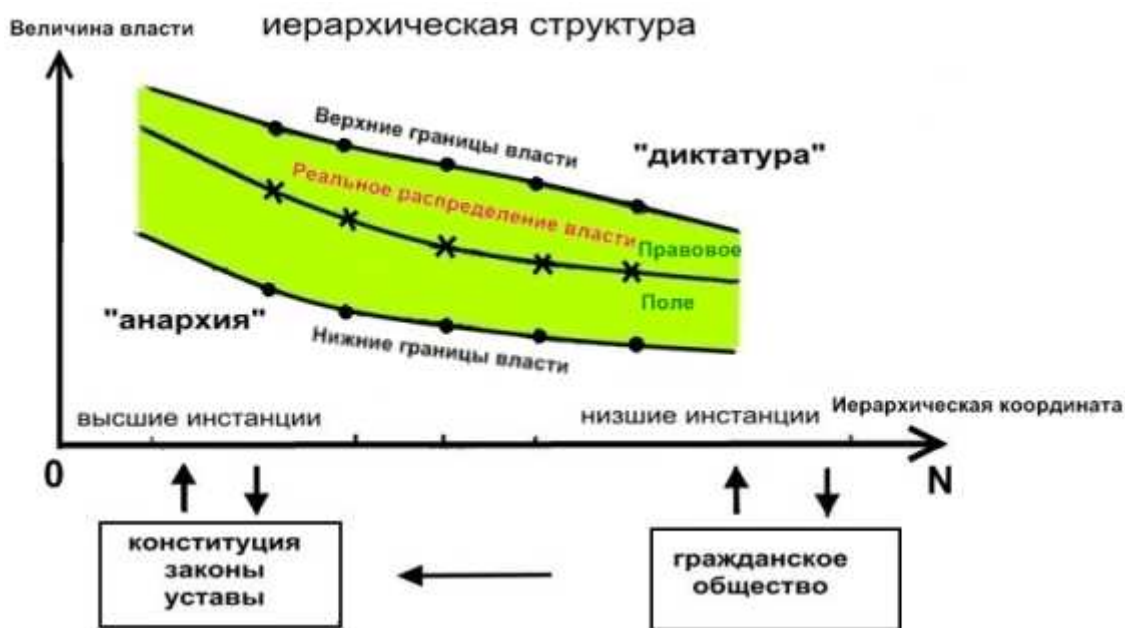


Рис. 1: Схема взаимодействия партнеров в системе "Власть-Общество"

не обладающая государственной властью. *Величина (количество) власти* — характеристика, отражающая степень влияния данной инстанции на поведение других инстанций и на жизнь гражданского общества. *Реакция гражданского общества* — положительное, отрицательное или нейтральное отношение гражданского общества к текущей величине власти, реализуемой той или иной инстанцией, являющееся одной из причин изменения величины власти инстанций.

В третьем разделе введения кратко излагается структура и содержание работы по главам и основные полученные результаты.

В **первой главе** на основе общей математической модели системы "Власть-Общество" построена и исследована модель древовидных властных иерархий, которая допускает аналитическое решение.

В §1.1 приводится краткое описание системы "Власть-Общество", полученной А.П. Михайловым. В случае древовидной иерархии основное уравнение динамики распределения власти (при отсутствии команд "через голову") имеет вид <sup>1</sup>

$$n(x) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \chi(x, t, p, \frac{\partial p}{\partial x}, p_1, p_2, \dots) n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + n(x) F(x, t, p, p_1, p_2, \dots). \quad (1)$$

Это уравнение справедливо при всех  $0 < x < l$ ,  $t > t_0$ .

<sup>1</sup> Михайлов А.П. Моделирование системы "Власть-Общество". // М.: Наука-Физматлит — 2006 — 145 с.

Краевые условия задаются в виде

$$\varkappa(x, t, p, \dots)n(x)\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varkappa(x, t, p, \dots)n(x)\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Начальное распределение власти задается следующим соотношением:

$$p(x, t_0) = p_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Соотношение (1) представляет собой параболическое уравнение. В математическом отношении модель (1)-(3) замкнута и корректна, т.е. однозначно определяет решение — гладкую неотрицательную функцию  $p(x, t)$  для всех  $0 \leq x \leq l$  и  $t \geq t_0$ .

Функция  $p(x, t)$  описывает пространственно-временную динамику распределения власти в иерархической структуре, т.е. зависимость величины (количества) реально осуществляемой инстанцией власти от ее местоположения (координаты  $x$ ) и времени  $t$ . Функция  $F(x, t, p, p_1, p_2, \dots)$  определяет реакцию гражданского общества; функция  $n(x)$  определяет число чиновников в иерархическом слое с координатой  $x$ ; монотонно убывающие по  $x$  функции  $p_1(x, t) > 0$  и  $p_2(x, t) > 0$  описывают минимальные и максимальные властные полномочия иерархии; функция  $\varkappa(x, t, p, \frac{\partial p}{\partial x}, p_1, p_2, \dots) > 0$  определяет поведенческие свойства иерархической структуры.

Общее описание отношений в системе "Власть–Общество" дается иерархическим постулатом: *в иерархии власть может передаваться только от инстанций с большей текущей властью к инстанциям с меньшей текущей властью (причем скорость передачи тем больше, чем больше разница между значениями текущей власти в инстанциях)*. Этот постулат можно считать политологическим аналогом законов Фурье и Фика.

В §1.2 приводится описание одной из наиболее естественно формализуемых систем "Власть–Общество" — правовой системы. Система "Власть–Общество" называется *правовой*, если ее реакция на действия любой инстанции иерархии всегда направлена на удержание распределения власти в рамках предписанных ей полномочий. Подобный тип реакции отвечает правовому общественному сознанию.

Параграф §1.3 посвящен построению и исследованию базовой модели древовидных иерархий в стационарном случае.

В *п. 1.3.1* введены упрощающие предположения для случая правовой системы:

1. Все инстанции обладают одинаковой и неизменной степенью безответственности, т.е.

$$\varkappa = \varkappa_0 = \text{const} > 0;$$

2. Реакция общества является линейной функцией отклонения от "идеального" (желаемого с точки зрения общества) распределения власти и явно не зависит от времени, т.е.  $F(p, x) = k_1(p^0(x) - p)$ , где  $k_1 > 0$  характеризует амплитуду реакции;
3. Идеальное распределение власти  $p^0(x)$  не меняется со временем и линейно убывает с ростом координаты  $x$ , т.е.  $p^0(x) = H - kx$ ,  $H > 0$ .

В результате упрощений 1) – 3) получается *общая модель древовидной иерархии* правовой системы

$$\left\{ \begin{array}{l} n(x) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa_0 n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k_1 n(x) (p^0(x) - p), \quad 0 < x < l, \quad t > t_0, \\ \varkappa_0 n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varkappa_0 n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq t_0, \\ p(x, t_0) = p_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{array} \right. \quad (4)$$

стационарные ( $p(x, t) = p(x)$ ) решения которой находятся из задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} p''(x) + \frac{n'(x)}{n(x)} p'(x) - \frac{k_1}{\varkappa_0} p(x) = \frac{k_1}{\varkappa_0} (kx - H), \quad 0 < x < l, \\ p'(0) = p'(l) = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Для построения базовой модели древовидных иерархий в качестве функции числа чиновников в иерархическом слое  $n(x)$  берется **экспоненциальная** функция:

$$\boxed{n(x) = e^{\beta x}, \quad \beta \geq 0,} \quad (6)$$

где  $\beta \geq 0$  — параметр, характеризующий степень дивергентности властной структуры.

В этом случае переменный коэффициент при первой производной из (5) превращается в константу и стационарное решение в случае **базовой модели** можно найти аналитически, воспользовавшись результатами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В *п. 1.3.2* получено явное аналитическое решение для базовой модели в стационарном случае и проведен его анализ:

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{be^c}{2 \operatorname{sh} q} \left[ \frac{1 - e^{-c-q}}{-c+q} e^{(-c+q)\bar{x}} + \frac{1 - e^{-c+q}}{c+q} e^{(-c-q)\bar{x}} \right] - b\bar{x} + 1 - 2abc, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{p} = p/H, \quad \bar{x} = x/l, \quad a = \frac{\varkappa_0}{k_1 l^2}, \quad b = \frac{kl}{H}, \quad c = \frac{\beta l}{2}, \quad q = \sqrt{c^2 + \frac{1}{a}}$$



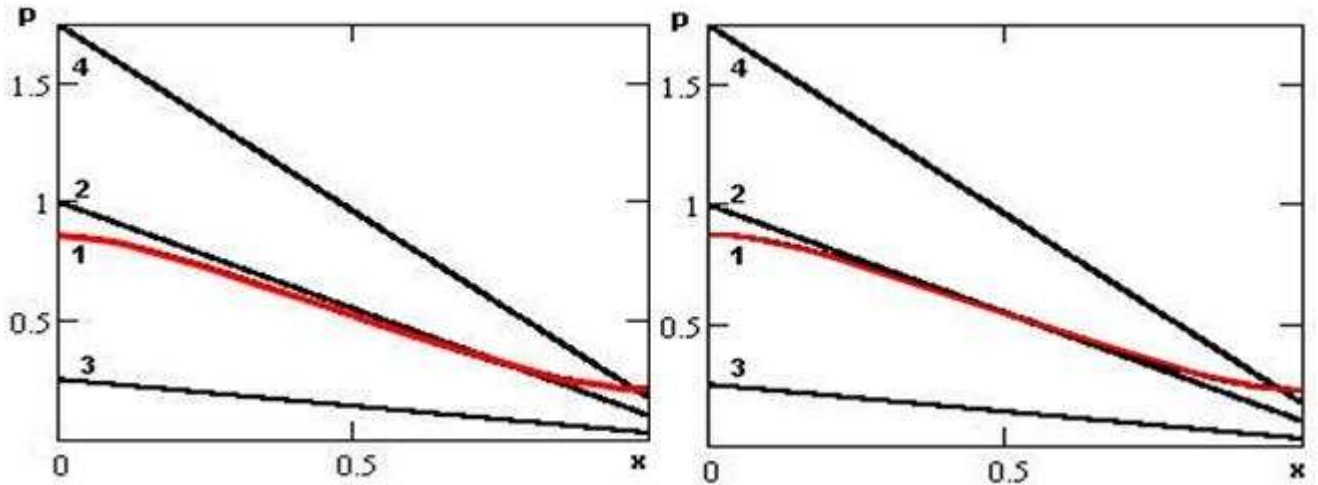


Рис. 2: Распределение удельной власти в древовидной (слева) и цепочечной (справа) иерархиях

Как видно, оно представляет из себя линейную комбинацию двух экспонент с показателями разных знаков и многочлена первой степени и характеризует "удельное" распределение власти. Полная власть иерархического слоя есть произведение удельной власти на число  $n(x)$  чиновников в слое.

На Рис.2 (слева) линия 1 изображает график распределения удельной власти в древовидной иерархии при следующем наборе параметров:

$$\beta = 2, \kappa_0 = 0.01, H = l = 1, k_1 = 0.5, k = 0.9, \alpha = 0.75. \quad (8)$$

Прямая 2 есть идеальное распределение власти  $p^0(x) = H - kx = 1 - 0.9x$ , прямые 3,4 — минимальные и максимальные властные полномочия  $p_1 = (1 - \alpha)p^0$ ,  $p_2 = (1 + \alpha)p^0$ .

На Рис.2 (справа) представлено распределение удельной власти в цепочечной иерархии с тем же набором параметров (8) (за исключением, естественно,  $\beta = 0$ ).

Левый и правый графики, изображенные на рис.2, схожи между собой, однако имеются и отличия:

- Распределение власти для "средних" инстанций сильнее отклонено от идеального профиля власти в древовидной иерархии по сравнению с цепочечной. При этом с ростом степени дивергентности  $\beta$  отклонение увеличивается;
- Точка "равновесия" (точка пересечения графиков идеального и реального распределений власти) в случае древовидной иерархии сдвинута вправо в сторону младших звеньев, при этом сдвиг тем больше, чем больше величина  $\beta$ ;

- Как для цепочечной, так и для древовидной иерархии, может иметь место феномен выхода распределения власти из правового поля (на Рис.2 у небольшой части младших звеньев власть немного превышена)

В п. 1.3.3 феномен выхода распределения власти из правового поля исследуется более подробно. В частности, получен критерий нахождения власти в правовом поле:

$$\begin{cases} \left| ab \frac{q \operatorname{ch} q - c \operatorname{sh} q - qe^{-c}}{\operatorname{sh} q} \right| \leq \alpha(1-b), \\ \left| ab \frac{qe^c - q \operatorname{ch} q - c \operatorname{sh} q}{\operatorname{sh} q} \right| \leq \alpha. \end{cases} \quad (9)$$

Критерий (9) нарушается при достаточно больших  $a = \frac{\varkappa_0}{k_1 l^2}$ . Кроме того, распределение власти выходит за рамки правового поля в том числе и с ростом разветвленности иерархии (т.е. при достаточно больших  $c = \frac{\beta l}{2}$ ).

В §1.4 проводится исследование базовой модели древовидных иерархий в нестационарном случае (с учетом зависимости решения  $p(x, t)$  от времени).

$$\begin{cases} e^{\beta x} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa_0 e^{\beta x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + k_1 e^{\beta x} (H - kx - p), \quad 0 < x < l, \quad t > t_0, \\ \varkappa_0 e^{\beta x} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varkappa_0 e^{\beta x} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq t_0, \\ p(x, t_0) = p_0(x) = \varphi(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений базовой модели древовидной иерархии (10) представляет собой вторую краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения, которая решена с использованием метода Фурье (метода разделения переменных).

В п. 1.4.1 получено решение однородного уравнения, соответствующего базовой модели древовидных властных иерархий. Задача Штурма-Лиувилля для функции  $X(x)$  ( $p(x, t) = X(x)T(t)$ ) формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varkappa_0 e^{\beta x} X'(x) \right] - k_1 e^{\beta x} X(x) + \lambda e^{\beta x} X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Собственные значения этой задачи определяются соотношением

$$\begin{cases} \lambda_0 = k_1 \\ \lambda_n = \frac{\varkappa_0 \beta^2}{4} + k_1 + \varkappa_0 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Собственным значениям (12) соответствуют следующие собственные функции:

$$\begin{cases} X_0(x) = 1 \\ X_n(x) = e^{-\frac{\beta x}{2}} \left[ \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{\beta l}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (13)$$

Функция  $T(t) \neq 0$  является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (14)$$

В *п. 1.4.2* рассматривается неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями, соответствующее базовой модели древовидных властных иерархий.

В *п. 1.4.3* представлено решение для базовой модели древовидных иерархий (10) в нестационарном случае:

$$\begin{cases} p(x, t) = C_0 e^{-k_1 t} + e^{-\frac{\beta x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \left[ \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{\beta l}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \right] + \\ + f_0 (1 - e^{-k_1 t}) + e^{-\frac{\beta x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n k_1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \left[ \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{\beta l}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \right], \text{ где} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} C_0 = \frac{\beta}{e^{\beta l} - 1} \int_0^l \varphi(x) e^{\beta x} dx \\ C_n = \frac{2}{l \left[ 1 + \frac{\beta^2 l^2}{4\pi^2 n^2} \right]} \int_0^l \varphi(x) e^{\frac{\beta x}{2}} \left[ \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{\beta l}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 = \frac{\beta}{e^{\beta l} - 1} \int_0^l f(x) e^{\beta x} dx \\ f_n = \frac{2}{l \left[ 1 + \frac{\beta^2 l^2}{4\pi^2 n^2} \right]} \int_0^l f(x) e^{\frac{\beta x}{2}} \left[ \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{\beta l}{2\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f(x) = H - kx$$

$$\lambda_n = \frac{\alpha_0 \pi^2 n^2}{l^2} + \frac{\alpha_0 \beta^2}{4} + k_1, \quad n \geq 1$$

Используя аналитическое представление (15), можно объяснить некоторые (полученные с помощью вычислительных экспериментов) результаты исследования модели "Власть–Общество" с теоретических позиций. В частности, результат, свидетельствующий о том, что скорость приближения решения параболической задачи (10) к стационарному определяется в первую очередь интенсивностью реакции гражданского общества, а не степенью разветвленности властной структуры.

Во **второй главе** на основе аналитического исследования базовой модели древовидной иерархии в стационарном случае изучены определенные сценарии реформирования (изменения конфигурации) властных структур. Выбор той или иной конфигурации властной структуры — весьма непростая задача.

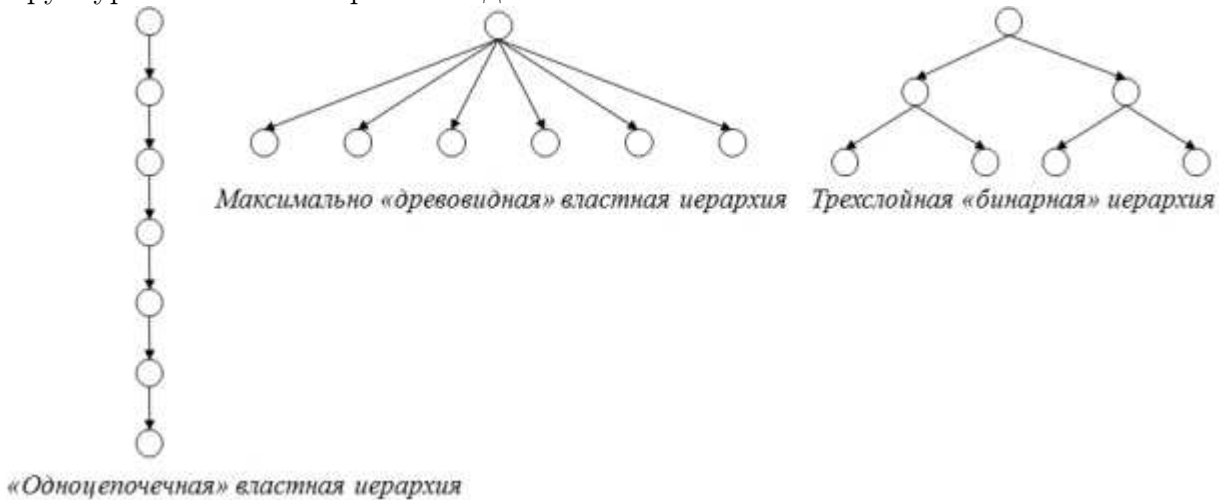


Рис. 3: Различные конфигурации властных структур

Иерархии, представленные на Рис.3, отличаются по своей топологии. Кроме того, им соответствуют различные принципы функционирования. С другой стороны, в них содержится одинаковое число чиновников и их можно наделить одним и тем же объемом властных полномочий. В этом смысле иерархии одинаковы и возникает вопрос — какую из них следует предпочесть? Как известно, "предельные" случаи (левая и центральная иерархии на Рис.3) на практике редко реализуются, а выбираются иерархии с промежуточной "древовидностью" (правая иерархия на Рис.3).

Основные проблемы, возникающие при решении задач реформирования властной иерархии, можно сформулировать следующим образом:

- выбор стратегии преобразования, приводящей к **заданным** результатам
- определение разумных пределов проводимых реформ.

В §2.2 перечислены основные определения, используемые при моделировании сценариев реформирования властных структур. В этом параграфе вводится понятие *дефекта власти*:

$$Z(t) = \int_0^{x_*} |p^0(x, t) - p(x, t)|n(x)dx + \int_{x_*}^l |p^0(x, t) - p(x, t)|n(x)dx > 0. \quad (16)$$

Функционал (16) характеризует абсолютное отклонение реального профиля власти  $p(x, t)$  от идеального распределения  $p^0(x, t)$  с учетом разветвленности иерархии  $n(x)$ . Точка  $x_* \in (0, l)$  — точка пересечения идеального и реального профилей власти.

В случае правовой властной системы *дефект власти определяет политическую напряженность* в обществе.

В §2.3 рассмотрены два сценария реформирования, примененных к базовой модели древовидных иерархий в стационарном случае. В обоих сценариях сравниваются различные иерархии, **реализующие одну и ту же суммарную власть**.

В *п. 2.3.1* рассмотрен первый сценарий реформирования и представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов. Постановка задачи формулируется следующим образом: иерарх намерен сократить *на определенную величину* число инстанций в цепочечной иерархии, сохранив при этом свою идеальную и реальную власть. Как для этого он должен распределить самих чиновников и как должны определяться их идеальные властные полномочия?



Рис. 4: Первый сценарий реформирования

С математической точки зрения задача состоит в решении серии систем трансцендентных уравнений, соответствующих различным значениям варьируемых параметров, с учетом выполнения ряда условий для рассматриваемых иерархий.

При моделировании первого сценария реформирования для иерархий задаются следующие условия (характеристики реформированной иерархии для удобства помечены крышечкой):

1. Полная власть чиновников в цепочечной (исходной) иерархии равна полной власти чиновников в реформированной (искомой) иерархии:  $\int_0^l p^0(x) dx = \int_0^{\hat{l}} \hat{p}^0(x) \hat{n}(x) dx$ ;
2. Идеальная власть высшего чиновника в иерархии сохраняется:  $H = \hat{H}$ ;
3. Поведенческая характеристика чиновников  $\varkappa$  и коэффициент реакции общества  $k_1$  остаются неизменными:  $\varkappa = \hat{\varkappa}$ ,  $k_1 = \hat{k}_1$ ;
4. Реальная власть высшего чиновника в иерархии сохраняется:  $p(0) = \hat{p}(0)$ .

В качестве входных данных брались следующие значения параметров:

характеристики цепочечной (исходной) иерархии:  $l = 1$ ,  $p^0(x) = H - kx = 1 - 0.9x$ ,  
 $\varkappa = 0.01$ ,  $k_1 = 1$ ,  $\beta = 0$ ;

заданные характеристики реформированной иерархии:  $\hat{\varkappa} = \varkappa = 0.01$ ,  $\hat{k}_1 = k_1 = 1$ ,  
 $\hat{H} = H = 1$ .

При сокращении параметра  $l$  (характеризующего число инстанций) от  $l = 1$  до  $\hat{l} = 0.1$  с шагом  $\Delta l = 0.1$ , получены следующие результаты:

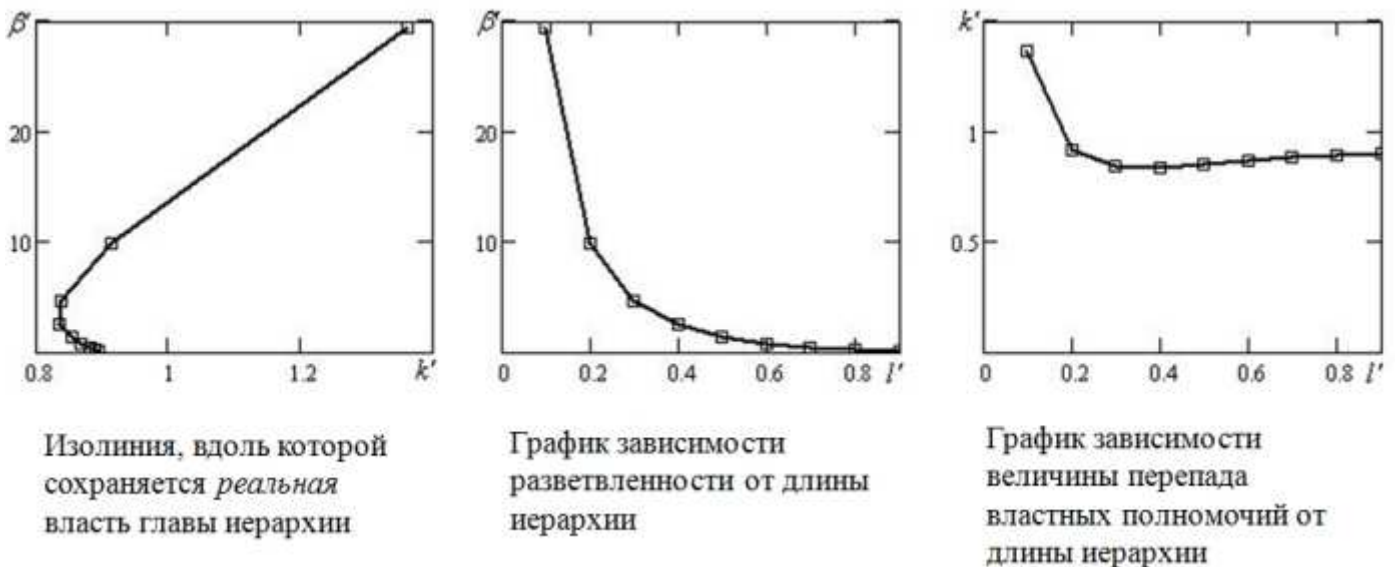


Рис. 5: Результаты численных экспериментов

В заключительном разделе *п. 2.3.1* представлены основные выводы по первому сценарию реформирования, свидетельствующие о том, что при сокращении числа иерархических слоев (инстанций):

- происходит "сокращение штатов" (при условии сохранения реальной власти высшего чиновника);
- необходимо распределить значительное число чиновников в низшие слои реформированной иерархии;
- дефект власти меняется слабо;
- относительный перепад идеальных властных полномочий между слоями реформированной иерархии ведет себя немонотонным образом при сокращении числа инстанций: сначала он убывает, а потом, при значительном (*более чем в три раза*) сокращении инстанций, начинает возрастать.

В п. 2.3.2 рассмотрен второй сценарий реформирования и представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов. Постановка задачи формулируется следующим образом: требуется сократить *на определенную величину* число чиновников в иерархии, сохранив при этом число иерархических слоев в иерархии. При этом идеальная и реальная власть низшего слоя чиновников должна остаться неизменной (как, впрочем, и полная власть, реализуемая всеми инстанциями). Как в этом случае необходимо распределить чиновников и определить их идеальные властные полномочия?

При моделировании второго сценария реформирования для иерархий задаются следующие условия (характеристики реформированной иерархии для удобства помечены крышечкой):

1. Полная власть чиновников иерархии сохраняется:  $\int_0^l p^0(x)n(x) dx = \int_0^{\hat{l}} \hat{p}^0(x)\hat{n}(x) dx$ ;
2. Полная идеальная власть низшего слоя чиновников иерархии сохраняется:  $p^0(l)e^{\beta l} = \hat{p}^0(\hat{l})e^{\beta \hat{l}}$ ;
3. Число инстанций  $l$  в иерархии и поведенческая характеристика чиновников  $\varkappa$  остаются неизменными:  $l = \hat{l}$ ,  $\varkappa = \hat{\varkappa}$ ;
4. Полная реальная власть низшего слоя чиновников иерархии сохраняется:  $p(l)e^{\beta l} = \hat{p}(\hat{l})e^{\beta \hat{l}}$ .

В качестве входных данных брались следующие значения параметров:

характеристики древовидной (исходной) иерархии:  $l = 1$ ,  $p^0(x) = H - kx = 1 - 0.9x$ ,  $\varkappa = 0.01$ ,  $k_1 = 1$ ,  $\beta = 3$ ;

заданные характеристики реформированной иерархии:  $\hat{l} = l = 1, \hat{\varkappa} = \varkappa = 0.01$ .

При сокращении параметра  $\beta$  (характеризующего число чиновников) от  $\beta = 3$  до  $\hat{\beta} = 0$

получены следующие результаты:

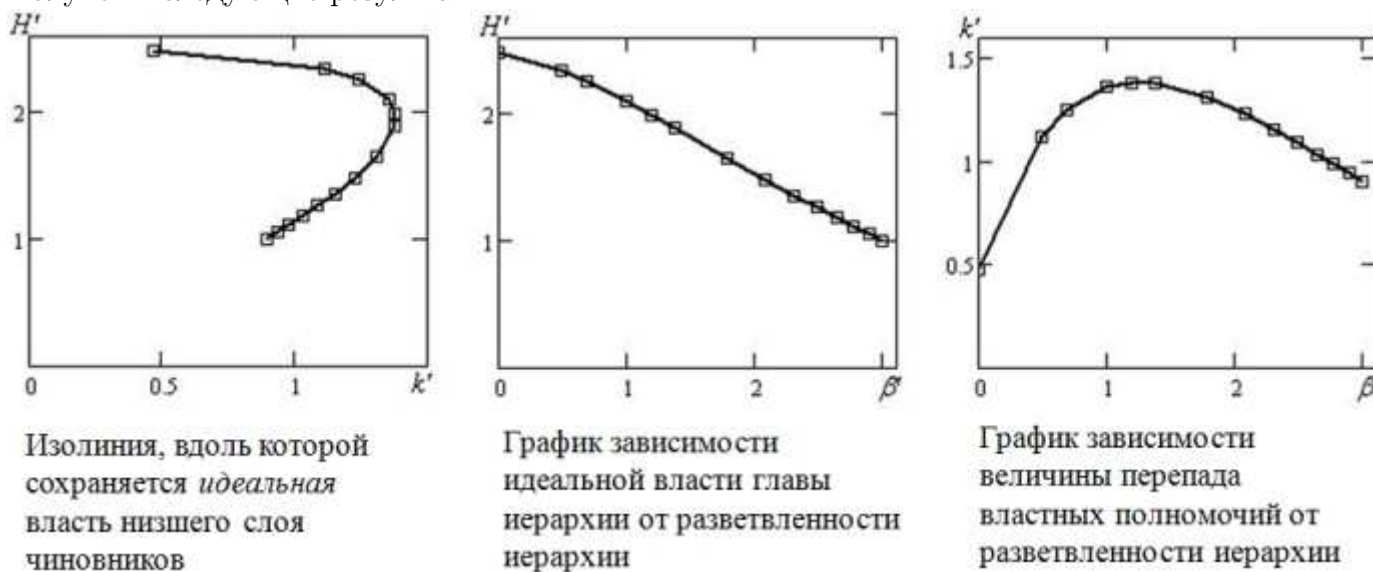


Рис. 6: Результаты численных экспериментов

В заключительном разделе *п. 2.3.2* представлены основные выводы по второму сценарию реформирования, свидетельствующие о том, что при сокращении числа чиновников и сохранении числа инстанций в иерархии:

- Политическая напряженность в системе возрастает;
- Задача реформирования (в рассматриваемой постановке) не имеет решения при значительном (*более чем в три раза*) сокращении числа чиновников;
- Идеальные властные полномочия чиновников возрастают: это определенная "плата" за сохранение полной власти иерархии;
- Относительный перепад идеальных властных полномочий между слоями реформированной иерархии ведет себя немонотонным образом при сокращении числа чиновников: сначала он возрастает, а потом, при экстремальном (*более чем в три раза*) сокращении числа чиновников, начинает резко убывать.

Выводы по второй главе приведены в §2.4.

В **третьей главе** на основе математической модели коррумпированных властных иерархий проведен сравнительный анализ стратегий ограничения коррупции и выделены наиболее эффективные из них по критерию "затраты-прибыль".



В §3.1 приведено краткое описание модели коррумпированных властных иерархий<sup>2</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} n(x) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa_f n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + n(x) F(x, t, p, p_1, p_2), \\ \varkappa_f = \left[ 1 + \frac{c_+(x, t) - c_-(x, t)}{1 + c_0(x, t) + c_-(x, t)} \right] \varkappa(x, t, p, p_1, p_2), \\ \text{с краевыми условиями второго рода:} \\ \varkappa_f(x, t, p, \dots) n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varkappa(x, t, p, \dots) n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \\ \text{и начальным распределением власти:} \\ p(x, t_0) = p_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq t_0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Коррумпированная инстанция функционирует следующим образом:  $M > 0$  приказов подчиненным отдается как и в законопослушном случае, т.е. без взятки; число  $M_0 \geq 0$  отвечает обычной коррупции — правильные приказы, но за определенную взятку;  $M_- \geq 0$  приказов не отдаются в результате коррупции бездействия и, наконец, отдаются лишние  $M_+ \geq 0$  приказов.



Рис. 7: Работа "идеального" и коррумпированного институтов власти

Функции  $c_0(x, t) = M_0/M$ ,  $c_-(x, t) = M_-/M$ ,  $c_+(x, t) = M_+/M$  есть парциальные *степени коррумпированности* института из слоя с координатой  $x$  в данный момент времени  $t$ , соответствующие трем рассматриваемым типам коррупции (*обычная коррупция, коррупция бездействия и коррупция сверхдействия*).

Функция  $\varkappa_f$ , включающая коррупционные характеристики властной структуры, отражает **наличие** в иерархии **фиктивных (обязанных коррупции) потоков власти**.

<sup>2</sup> Михайлов А.П. Модель коррумпированных властных иерархий. // Математическое моделирование. — 1999. — т.11, №1. — С. 3-19.

В §3.2 даны определения основных функционалов, характеризующих коррумпированную иерархию. *Общий относительный ущерб* от коррупции определяется как отношение суммы локальных ущербов (суммы локальных потоков власти, потраченных на частные интересы) к сумме потоков власти, потраченных в интересах общества:

$$D(t) = \left[ \int_0^l \frac{c_0 b_0 + c_- + c_+}{1 + c_0 + c_-} \chi n(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] / \left[ \int_0^l \frac{1 + c_0}{1 + c_0 + c_-} \chi n(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx \right]. \quad (18)$$

*Общая относительная стоимость* подавления коррупции определяется как отношение суммы локальных ущербов, умноженных на текущий уровень власти, к сумме потоков власти, потраченных в интересах общества:

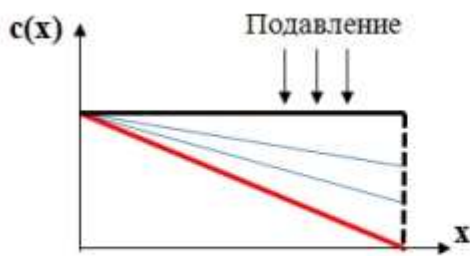
$$V(t) = \left[ \varepsilon_0 \int_0^l \frac{c_0 b_0 + c_- + c_+}{1 + c_0 + c_-} p \chi n(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] / \left[ \int_0^l \frac{1 + c_0}{1 + c_0 + c_-} \chi n(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx \right]. \quad (19)$$

*Эффективность подавления коррупции* определяется как отношение предотвращенного ущерба к стоимости соответствующих мер:

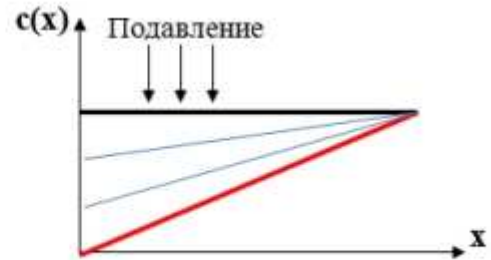
$$E(t) = \frac{\Delta D}{\Delta V} = \frac{D(C + \Delta C) - D(C)}{V(C + \Delta C) - V(C)}, \quad (20)$$

где  $\Delta C$  — уменьшение степени коррумпированности,  $\Delta V$  — стоимость этого изменения,  $\Delta D$  — уменьшение наносимого коррупцией ущерба, обусловленное проведенными мероприятиями.

В §3.3 приведены результаты серии вычислительных экспериментов с моделью коррумпированных властных иерархий, целью которых являлось проведение сравнительного анализа определенных стратегий ограничения коррупции по их эффективности для различных иерархий. Под **стратегией ограничения коррупции** понимается преимущественная направленность антикоррупционных мероприятий (т.е. уменьшение степени коррумпированности) против определенных участков властной структуры.



**Стратегия ограничения коррумпированности младших чинов**



**Стратегия ограничения коррумпированности старших чинов**

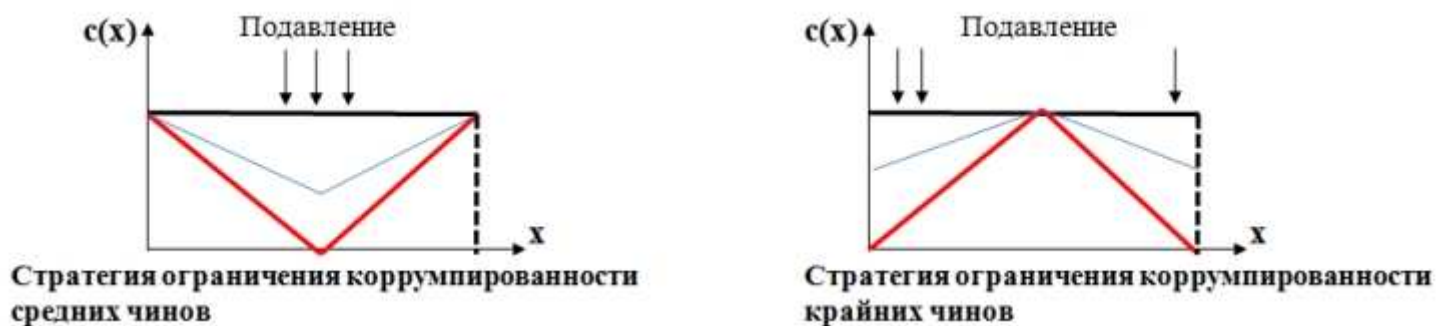


Рис. 8: Различные стратегии ограничения коррупции

Расчеты проводились для иерархий, различных по степени централизации (от сильноцентрализованных до децентрализованных) и степени разветвленности (от цепочечных до сильноразветвленных). Для получения решения  $p(x, t)$  использовалась нелинейная разностная схема, которая решалась на равномерной сетке на отрезке  $[0, 1]$  с  $N = 50$  узлами. В качестве функции реакции общества бралась функция  $F = p^0(x, t) - p(x, t)$ , где  $p^0(x, t)$  — желаемое (с точки зрения общества) распределение власти, параметр  $\varkappa$ , характеризующий меру безответственности чиновников, брался равным  $\varkappa = 0.005$ . Расчеты проводились для каждого типа коррупции отдельно (при условии отсутствия коррупции других типов), в качестве начальной степени коррумпированности для иерархии бралось значение  $c(x, t) \equiv 2$ , в качестве конечной ( $c + \Delta c$ ) — значение, которое соответствовало конкретной стратегии подавления коррупции. Например, в случае подавления младших чиновников конечный "профиль" коррупции в иерархии брался в виде  $c + \Delta c = 2 - 2x$  (тогда низший чиновник в итоге вообще не подвержен коррупции). Характеристикой степени централизации считалось значение  $p^0(x = 0.5)$  — чем меньше эта величина по сравнению с  $p^0(0)$ , тем иерархия более централизованна.

В Табл. 1 приведены результаты расчета эффективности различных стратегий ограничения для рассматриваемых видов коррупции в случае сильноцентрализованной цепочечной иерархии. В качестве функции  $p^0(x, t)$  была использована функция  $p^0(x) = \frac{1}{(1 + 99x)}$ ,  $p^0(0.5) \approx 0.02$ ,  $p^0(0) = 1$ .

Табл. 1

Тип коррупции	Подавление	$E$
$c_0$	<b>Младших</b>	2.06
$c_0$	Старших	0.9
$c_0$	Средних	1.95
$c_0$	Крайних	0.83
$c_+$	<b>Младших</b>	1.70
$c_+$	Старших	0.93
$c_+$	Средних	1.55
$c_+$	Крайних	0.87
$c_-$	<b>Младших</b>	1.25
$c_-$	Старших	0.95
$c_-$	Средних	1.24
$c_-$	Крайних	0.93

Сопоставляя значения эффективности подавления коррупции для цепочечных иерархий с различной степенью централизации (от сильной централизации до случая линейного перепада властных полномочий), можно сделать следующие основные выводы:

- Наибольшее значение эффективности достигается при давлении на младших чиновников, наименьшее — при давлении на крайних чиновников;
- Отношение максимальной к минимальной эффективности подавления коррупции уменьшается (до 2,5 раз) с увеличением степени децентрализации (т.е. *сильноцентрализованная иерархия оказывается наиболее чувствительной к выбору стратегии подавления коррупции*).

Дальнейшее уменьшение степени централизации иерархии приводит к следующему основному выводу:

- В случае сильной децентрализации выбор стратегии подавления коррупции любого типа не имеет принципиального значения.

Еще более интересные свойства эффективности ограничения коррупции проявляются для **древовидной** иерархии.

Основные выводы по результатам сравнительного анализа, проведенного для случая сильной централизации (как наиболее чувствительного к выбору стратегии ограничения коррупции) для различных по степени разветвленности древовидных иерархий, следующие:

- Эффективность ограничения коррупции в сильноразветвленной иерархии слабо зависит от применяемой стратегии (здесь, скорее всего, основное внимание следует уделять изменению конфигурации властного древа);
- Эффективность подавления младших и крайних чиновников ведет себя немонотонным образом с увеличением числа чиновников в слое.

Выводы по третьей главе сделаны в §3.4.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

## Основные результаты работы

1. Предложена и изучена базовая модель древовидных властных иерархий, в том числе получено аналитическое решение для базовой модели в явном виде как в стационарном, так и в нестационарном случае.
2. На основе базовой модели древовидных иерархий аналитически и численно изучены нетривиальные зависимости между параметрами системы "Власть-Общество" для различных сценариев реформирования властной иерархии.
3. В рамках математической модели коррумпированных властных иерархий предложены различные стратегии ограничения коррупции, проведен их сравнительный анализ и выделены более эффективные из них.
4. Полученным результатам моделирования дана социологическая и политологическая трактовка.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции. // Математическое моделирование.— 2006. — Т.18, №12, с. 115-124
- [2] *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* О конструкциях властных иерархий. // Математическое моделирование.— 2009 — Т.21, №18, с. 108-120
- [3] *Ланкин Д.Ф., Петров А.П.* Численные эксперименты с моделью "Власть–Общество" с кубической функцией реакции общества. // Сб. "Математическое моделирование соц. процессов", М.: МГУ. — 2005. — вып. 7 — С. 197–208.
- [4] *Ланкин Д.Ф.* Об оптимизации властных иерархий. // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2006 года. — М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. с. 14
- [5] *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* Свойства иерархий и антикоррупционная активность. // Сб. "Математическое моделирование социальных процессов: Сорокинские чтения — 2005". — Выпуск 8. — М.: изд-во МГУ, Социологический факультет, 2006. с. 6-14
- [6] *А.П. Михайлов, Д.Ф. Ланкин, Н.А. Маревцева* О пределах реформирования властных структур. // Сб. "Математическое моделирование социальных процессов". — Выпуск 11. —М.: изд-во МГУ, Социологический факультет, 2007. с. 18-28
- [7] *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* О конструкциях властных иерархий. - Третья международная конференция по проблемам управления (20-22 июня 2006 года): Пленарные доклады и избранные труды. — М.: Институт проблем управления, 2006. с. 573-580
- [8] *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции. // Тезисы докладов и выступлений Всероссийского социологического конгресса "Глобализация и социальные изменения в современной России". — М.: Альфа-М, 2006. — Т.11., с. 119-120.
- [9] *A.P. Mikhailov, D.F. Lankin* The modeling of optimal strategies of corruption suppression. // Труды 2-й международной конференции "Математическое моделирование социаль-

ной и экономической динамики” (MMSED-2007). 20-22 июня 2007г. Москва, Россия.  
— М.: РУДН, 2007. с. 139-141

- [10] *Dmitry Lankin* The modelling of optimal strategies of corrupt suppression. // Sixth International Seminar ”Mathematical models&modeling in laser-plasma processes” — AP Print, Podgorica, Montenegro, 2009. p. 33-34