Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Шаманаев Антон Сергеевич

Методы расчета равновесий Нэша для некоторых аукционов однородного товара

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научные руководители: академик РАН
Краснощеков Павел Сергеевич,

доктор физико-математических наук,
профессор Васин Александр Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент кафедры оптимального управления
факультета ВМиК МГУ
Потапов Михаил Михайлович,

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник ВЦ РАН
Меньшиков Иван Станиславович

Ведущая организация: Институт проблем управления РАН

Защита диссертации состоится “ 18 ” июня 2010 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК МГУ http://cs.msu.su в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан “ 17 ” мая 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
профессор Н.П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Рынки однородных товаров, к которым относятся металлы, энергоресурсы, электроэнергия и др., играют важнейшую роль в современной экономике. Интерес к их исследованию связан с тем, что в течение последних 30 лет в разных странах активно развиваются рынки электроэнергии и газа. Оптовые рынки упомянутых товаров, как правило, являются олигополиями, т.е. рынками, на которых действует небольшое количество фирм – продавцов. Каждая из фирм на таком рынке обладает *рыночной властью*, т.е. способна своими действиями влиять на рыночную цену. Важная практическая задача – организовать рынок таким образом, чтобы не допустить большого отклонения цены от значения, оптимального с точки зрения суммарного выигрыша участников рынка. Такое значение реализуется в состоянии конкурентного равновесия. В связи с этим особый интерес представляет изучение моделей аукционов однородного товара, то есть возможных форм организации такого рынка. В каждом случае аукцион описывают как игру в нормальной форме, в которой игроками являются производители, а функции выигрыша определяют их прибыли в зависимости от стратегий. В качестве модели поведения участников аукциона обычно рассматривают равновесие по Нэшу соответствующей игры.

В существующей литературе (Amir, Ausubel, Cramton, Allen, Hellwig, Васин и др. авторы) исследованы свойства различных аукционов (Курно, Викри, Бертрана-Эджворта, единой цены) и получены методы расчета равновесий Нэша в соответствующих теоретико-игровых моделях. Однако для многих рынков однородных товаров важную роль играет сетевая структура связей производителей и потребителей, ограничения пропускной способности линий и потери или затраты при транспортировке. Для сетевых рынков в условиях совершенной конкуренции получены[1,2] достаточно полные результаты относительно расчета состояния конкурентного

[1] См. Hogan, W. Electricity Transmission and Merging Competition: Why the FERC’s Mega-NOPR Falls Short // Public Utilities Fortnightly, v. 133, no. 13, 1995, pp. 32–36.
[2] Давидсон М. Р. и др. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.

равновесия. Однако задача расчета равновесий Нэша и анализа их свойств для сетевых рынков – олигополий не решена даже в простейшем случае: для рынка с двумя узлами. Простейший вариант аукциона однородного товара – аукцион Курно. Для этого аукциона установлена[3] связь с аукционом единой цены, который широко используется на практике. Для модели двухузлового аукциона Курно в общем виде сформулированы[3] методы расчета равновесий Нэша, однако они предполагают ряд существенных допущений, а также неудобны для анализа конкретных рынков, поскольку их использование связано с решением сложных экстремальных задач. Кроме того, не исследован вопрос существования и единственности равновесий. В диссертации рассматривается двухузловой аукцион Курно в предположении одинаковых предельных издержек производителей в каждом из узлов. Для этого аукциона в диссертации решаются вопросы о существовании и структуре множества равновесий Нэша, разрабатываются методы расчета равновесий.

Другая актуальная проблема – изучение возможных альтернатив аукциону единой цены. Недостатком аукциона единой цены является то, что на нем создаются благоприятные условия для реализации продавцами рыночной власти. В результате отклонение исхода Курно от конкурентного равновесия (по Вальрасу) может быть довольно велико, что неблагоприятно для конечных потребителей. В качестве альтернативы аукциону Курно в диссертации рассматривается аукцион Викри[4]. На таком аукционе цена и объемы выпуска определяются так же, как на стандартном аукционе единой цены, однако оплата товара, приобретаемого у некоторого производителя, происходит по резервным ценам, рассчитываемым на основе функции спроса и заявок других компаний. Преимуществом этого аукциона является достижение максимального суммарного выигрыша участников (производителей и потребителей) при индивидуально рациональном поведении, соответствующем равновесию Нэша в доминирующих стратегиях.

---

[3] Васин А. А. Некооперативные игры в природе и обществе // М.: МАКС пресс, 2005.
[4] Ausubel, M., Cramton, P. Vickrey Auctions with Reserve Pricing // Economic Theory, 2004, v. 23, pp. 493–505.

Преимущество аукциона Викри не абсолютно, и существуют ситуации, в которых аукцион Курно дает лучшую цену с точки зрения конечных потребителей, нежели аукцион Викри. Проведение сравнительного анализа этих аукционов позволяет определить оптимальную форму аукциона в зависимости от параметров реального рынка.

Цель работы – разработка методов расчета равновесий Нэша для теоретико-игровых моделей некоторых рынков однородного товара; изучение вопросов существования и эффективности этих равновесий в смысле цен для конечных потребителей.

Задачи работы:

1. Уточнить и упростить имеющиеся критерии существования равновесия Нэша и методы его расчета для некоторых типичных вариантов структуры двухузлового аукциона Курно.
2. Рассмотреть вопросы сосуществования равновесий различных типов и описать структуру множества равновесий Нэша для двухузлового аукциона Курно в зависимости от параметров.
3. Аналитически решить задачу сравнения исходов аукционов Курно и Викри для ряда типичных вариантов структуры одноузлового рынка.

Методы исследования базируются на теории игр, математическом аппарате исследования операций, теории оптимизации и микроэкономике.

Обоснованность научных положений. Теоретические положения и выводы диссертаций сформулированы в виде утверждений и теорем и строго доказаны.

Научная новизна работы определяется следующим.

Для двухузлового аукциона Курно в общем виде получены необходимые и достаточные условия существования равновесий Нэша всех типов.

Для двухузлового аукциона Курно, на котором в каждом из узлов действуют одинаковые фирмы (т.н. *симметричная олигополия*) с постоянными предельными издержками, удалось свести задачу расчета равновесия Нэша к простой системе линейных и квадратичных уравнений и неравенств, допускающей наглядную геометрическую интерпретацию.

В дополнительном предположении малых потерь товара при передаче изучена структура множества равновесий Курно и определены все возможные комбинации сосуществования равновесий различных типов в этой модели.

Для одноузлового рынка аналитически решена задача расчета и сравнения исходов аукционов Курно и Викри для типичных вариантов структуры рынка:

1) симметричная олигополия;
2) рынок с одной крупной компанией и группой мелких;
3) рынок с двумя группами однородных производителей.

Практическая ценность

Полученные результаты могут быть использованы для выработки рекомендаций относительно конкретной формы аукциона и оптимальных значений параметров рынка при решении задач экономического проектирования. В рамках работы над диссертацией был разработан программный пакет, позволяющий рассчитывать равновесные цены и объемы для одно- и двухузловых аукционов Курно и Викри и сравнивать их между собой, а также с ценами и объемами равновесий по Вальрасу. Применение данного программного пакета может быть полезно для дальнейших научных исследований различных моделей сетевых аукционов, а также в качестве пособия для студентов математических и экономических специальностей.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 6 работ [1–6], в том числе [1] и [3] – статьи в реферируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации научных результатов кандидатских диссертаций.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на 4-й международной конференции по исследованию операций (ORM2004), выездных научных конференциях факультета ВМиК МГУ (2006, 2008 гг.), на международной конференции «Ломоносов-2008».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 37 наименований. Общий объем работы составляет 108 страниц.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Для модели двухузлового аукциона Курно в общем виде получены необходимые и достаточные условия существования равновесий Нэша всех типов.
2. Критерии существования равновесий Нэша всех типов для ситуации двух симметричных олигополий Курно, соединенных линией передачи, получены в виде систем линейных и квадратичных уравнений и неравенств.
3. Для модели двухузлового аукциона Курно в предположении малых потерь изучена структура множества равновесий Нэша: модель параметризована через 3 переменные, в множестве параметров выделены области существования равновесий различных типов и область отсутствия равновесий.
4. Задача сравнения цен исходов аукционов Курно и Викри решена аналитически для ряда типичных случаев структуры одноузлового рынка.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована проблематика диссертации, обсуждены известные результаты в области теоретико-игрового моделирования олигополистической конкуренции на рынках однородного товара.

Необходимые определения и предшествующие результаты. В диссертации рассматривается основная модель рынка однородного товара с конечным множеством производителей A. Каждый производитель $a \in A$ характеризуется функцией затрат $C^a(v)$ с неубывающими предельными издержками $C^{a\prime}(v)$ для $v \in [0,V^a]$. Поведение потребителей характеризуется общеизвестной функцией спроса $D(p)$, которая непрерывно дифференцируема и убывает по p.

В стандартной **модели Курно** (1838) стратегией производителя a является его объем производства $v^a \in [0, V^a]$. Производители устанавливают свои объемы одновременно. Обозначим через $\vec{v} = (v^a, a \in A)$ набор стратегий всех производителей. Рыночная цена $p(\vec{v})$ уравнивает спрос и фактическое предложение: $p(\vec{v}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^a)$. Функция выигрыша производителя a определяет его прибыль: $f^a(\vec{v}) = v^a p(\vec{v}) - C^a(v^a)$. Таким образом, взаимодействие в модели Курно соответствует игре в нормальной форме $\Gamma_C = \left\langle A, [0, V^a],\ f^a(\vec{v}), \vec{v} \in \bigotimes_{a \in A} [0, V^a], a \in A \right\rangle$, где игроками являются производители, и $[0, V^a]$ – множество стратегий производителя $a \in A$.

Вектор $(v^{a*}, a \in A)$ объемов производства – *равновесие Курно*, если он является равновесием Нэша в игре Γ_C. Обозначим через $(v^{a*}, a \in A)$ равновесные по Нэшу производственные объемы, а через $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^{a*})$ соответствующую цену.

Вектор $\left(\tilde{v}^a, a \in A\right)$ объемов производства называется *конкурентным равновесием*, а $\tilde{p}$ – *ценой Вальраса*, если для любого a верно: $\tilde{v}^a \in S^a\left(\tilde{p}\right) \overset{def.}{=} Arg\max_{v^a}\left(v^a \tilde{p} - C^a\left(v^a\right)\right)$, $\sum_{a \in A} \tilde{v}^a = D\left(\tilde{p}\right)$. В этом состоянии максимизируется суммарный выигрыш производителей и потребителей.

Получено[5] следующее условие первого порядка для равновесия Курно:

$$\left(p^* - C_-^{a'}\left(v^{a*}\right)\right)\left|D'\left(p^*\right)\right| \ge v^{a*} \ge \left(p^* - C_+^{a'}\left(v^{a*}\right)\right)\left|D'\left(p^*\right)\right|, \text{если } C^{a'}\left(0\right) < p^*, \quad (1)$$

$$v^{a*} = 0, \text{ если } C^{a'}\left(0\right) \ge p^*. \quad (2)$$

Набор $\left(p^*, v^{a*}, a \in A\right)$ называется *локальным равновесием Курно*, если удовлетворяет условиям первого порядка (1)–(2). *Функция предложения Курно* $S_C^a(p)$ производителя a при $p > 0$ определяется как решение системы (1)–(2). Значением этой функции является локально равновесный по Курно объем выпуска производителя a при заданной цене p.

---

[5] См. Васин А. А. «Некооперативные игры в природе и обществе» // М.: МАКС пресс, 2005.

Цена Курно p^* определяется из уравнения: $\sum_a S_C^a(p^*) = D(p^*)$. (3)

Простейший вариант **сетевого аукциона Курно** – два локальных рынка (узла), соединенных линией передачи. Каждый отдельный рынок $i = 1, 2$ характеризуется конечным множеством A_i производителей, $|A_i| = n_i$, их функциями затрат $C^a(v)$, $a \in A_i$, и функцией спроса $D_i(p)$ так же, как локальный рынок, рассмотренный ранее. Пусть $k \in (0,1)$ – коэффициент потерь товара при передаче с одного узла на другой, $\lambda \overset{def.}{=} (1-k)^{-1}$, Q – пропускная способность линии передачи. Стратегией производителя a является его объем производства $v^a \in \left[0, V^a\right]$. Обозначим через $\vec{v}_i = \left(v^a, a \in A_i\right)$ набор стратегий производителей узла i; $\vec{v} = (v^a, a \in A_1, A_2)$ – набор стратегий всех производителей в обоих узлах рынка.

Объем q товара, переброшенного с рынка 1 на рынок 2, и итоговые узловые цены p_i^{fin}, $i = 1, 2$, определяются в зависимости от $\vec{v}$ следующим образом. Обозначим через $p_i^{loc}\left(\vec{v}_i\right) = D^{-1}\left(\sum_{a \in A_i} v^a\right)$, $i = 1, 2$, цены на изолированных рынках. Если $\lambda^{-1} \le p_2^{loc}\left(\vec{v}_2\right) / p_1^{loc}\left(\vec{v}_1\right) \le \lambda$, то $q = 0$ и $p_i^{fin}\left(\vec{v}\right) = p_i^{loc}\left(\vec{v}_i\right)$, $i = 1, 2$, т.е. рынки остаются изолированными. Если $p_2^{loc}\left(\vec{v}_2\right) / p_1^{loc}\left(\vec{v}_1\right) > \lambda$, то p_i^{fin} и q – решение следующей системы:

$$D_2(p_2^{fin}) = \sum_{a \in A_2} v^a + q/\lambda, \tag{4}$$

$$D_1(p_1^{fin}) = \sum_{a \in A_1} v^a - q, \tag{5}$$

$p_2^{fin} = \lambda p_1^{fin}$, если найденное значение $q < Q$. (6)

В противном случае ограничение на максимальный объем переброски становится активным: $q = Q$, а цены определяются из уравнений (4), (5), $p_2^{fin} > \lambda p_1^{fin}$. Случай $p_1^{loc}\left(\vec{v}_1\right) / p_2^{loc}\left(\vec{v}_2\right) > \lambda$ трактуется симметричным образом.

По этому правилу осуществляется переброска товара администратором торговой системы на оптовом рынке электроэнергии. Выигрышем производителя $a \in A_i$ является его прибыль: $f^a(\vec{v}) = v^a p_i^{fin}(\vec{v}) - C^a(v^a)$.

Существует 5 возможных типов локальных равновесий Курно для данного двухузлового рынка.

Тип a)**:** цены Курно для изолированных рынков p_1^*, p_2^* удовлетворяют условию: $\lambda^{-1} < p_2^* / p_1^* < \lambda$, $q = 0$; узлы рынка остаются разделенными.

В этом случае ограничение на пропускную способность несущественно, и можно формально считать $Q = \infty$.

Полученные в указанной работе Васина А. А. условия 1-го порядка аналогичны условиям (1)–(2) для локального рынка:

$v^{a*} = (p_i^* - C^{a\prime}(v^{a*}))\,|\,D_i{}'(p_i^*)\,|$ для любого $a \in A_i$ такого, что $C^{a\prime}(0) = c_1^a < p_i^*$,

$v^{a*} = 0$ при $c_1^a \geq p_i^*$.

Условия первого порядка являются необходимыми, но не достаточными для существования равновесий Курно на двухузловом рынке. При достаточно большом увеличении объема v^{a_1} для некоторого $a_1 \in A_1$ цена на рынке 1 может уменьшиться до уровня p_2^* / λ, и между рынками появится переток товара. Дальнейшее увеличение объема позволит производителю a продавать продукцию и на 2-м узле рынка.

Пусть v^{a_1**} – оптимальный объем производителя a_1 при его отклонении от локально равновесной стратегии, определяемый из условия 1-го порядка: $v^{a_1**} \in \left(p_1^{**} - C^{a_1\prime}\left(v^{a_1**}\right)\right)\left|D_1'\left(p_1^{**}\right) - \lambda^2 D_2'\left(\lambda p_1^{**}\right)\right|$, а p_1^{**} – соответствующая оптимальная цена, получаемая из условия баланса: $D_1\left(p_1^{**}\right) - \sum_{u \in A_1 \setminus a_1} S_C^u\left(p_1^*\right) + \lambda\left(D_2\left(\lambda p_1^{**}\right) - \sum_{u \in A_2} S_C^u\left(p_2^*\right)\right) = v^{a_1**}$ (функция спроса в данном случае соответствует объединенному рынку). Симметричным образом определяются величины v^{a_2**} и p_2^{**} для некоторого производителя $a_2 \in A_2$.

Отметим, что при достаточно малом значении Q производитель a_1, отклоняясь, может не достичь оптимального объема v^{a_1**}, поскольку ограничение пропускной способности начнет действовать. В этом случае выгодным может оказаться увеличение объема производства до пограничного уровня $v^{a_1**Q} = D_1\left(p_1^{**Q}\right) - \sum_{u \in A_1 \setminus a_1} v^{u*} + Q < v^{a_1}$, при котором объем переброски товара достигает значения Q. Соответствующая этому объему цена $p_1^{**Q} > p_1^{**}$ определяется из уравнения: $\lambda\left(D_2\left(\lambda p_1^{**Q}\right) - \sum_{u\in A_2} v^{u*}\right) = Q$.

Симметричные рассуждения справедливы и для производителя $a_2 \in A_2$.

Утверждение 1.1. *Точка локального равновесия типа* ***a*** *является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда:*

1) *ни для какого производителя $a_1 \in A_1$ выигрыш при спросе $D_1(p_1) - \sum_{u\in A_1\backslash a_1} v^{u*} + \lambda\left(D_2(\lambda p_1) - \sum_{u\in A_2} v^{u*}\right)$ по оптимальной цене p_1^{**}, если $p_1^{**} \ge p_1^{**Q}$; либо выигрыш при объеме производства v^{a_1**Q} по цене p_1^{**Q}, если $p_1^{**} < p_1^{**Q}$ — не превышает его выигрыш в локальном равновесии* ***a*** *по оптимальной цене p_1^*;*
2) *и ни для какого производителя $a_2 \in A_2$ выигрыш при спросе $D_2(p_2) - \sum_{u\in A_2\backslash a_2} v^{u*} + \lambda\left(D_1(\lambda p_2) - \sum_{u\in A_1} v^{u*}\right)$ по оптимальной цене p_2^{**}, если $p_2^{**} \ge p_2^{**Q}$; либо выигрыш при объеме производства v^{a_2**Q} по цене p_2^{**Q}, если $p_2^{**} < p_2^{**Q}$ — не превышает его выигрыш в локальном равновесии* ***a*** *по оптимальной цене p_2^*.*

Тип $b_{1\to 2}$. Пусть $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ – цены Курно в узлах 1 и 2 в случае объединенного рынка; $\bar{v}^a$ – равновесный объем фирмы a. В данном случае переток с узла 1 в узел 2 происходит при неактивном ограничении пропускной способности: $\lambda \bar{p}_1 = \bar{p}_2,\ \ 0 < q < Q$.

Для любого $a \in A_1$ выполнены следующие условия первого порядка:

$\bar{v}^a = (\bar{p}_1 - C^{a\prime}(\bar{v}^a))\,|\,D_1{}'(\bar{p}_1) + \lambda^2 D_2{}'(\lambda \bar{p}_1)\,|$ при $c_1^a < \bar{p}_1$,

$\bar{v}^a = 0$ при $c_1^a \ge \bar{p}_1$.

Аналогично, для любого $a \in A_2$ выполнено:

$\bar{v}^a = \left(\lambda \bar{p}_1 - C^a{}'(\bar{v}^a)\right)\left|D_2{}'(\lambda \bar{p}_1) + D_1{}'(\bar{p}_1)/\lambda^2\right|$ при $c_1^a < \bar{p}_2$,

$v^{a*} = 0$ при $c_1^a \ge \bar{p}_2$.

Тип $c_{1\to 2}$. Пусть $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ – цены Курно в узлах 1 и 2 в случае объединенного рынка с активным ограничением пропускной способности; $\hat{v}^a$ – равновесный объем фирмы a. В данном случае цены Курно в узлах рынка связаны неравенством: $\lambda \hat{p}_1 < \hat{p}_2,\ q = Q$.

Условия первого порядка имеют вид:

$\hat{v}^a = (\hat{p}_i - C^{a'}(\hat{v}^a))\,|\,D_i{}'(\hat{p}_i)\,|$ для любого $a \in A_i$ такого, что $c_1^a < \hat{p}_i$,

$\hat{v}^a = 0$ при $c_1^a \geq \hat{p}_i$, $i = 1, 2$.

Типы $b_{2\to 1}$ и $c_{2\to 1}$ аналогичны двум предыдущим типам равновесий и определяются симметричным образом с перетоком из узла 2 в узел 1.

Условия существования равновесий Курно формулировались в той же работе Васина А. А. для равновесий всех типов. Однако их формулировки предполагали ряд существенных допущений (в частности, в равновесии типа *a* предполагалось, что ограничение пропускной способности является несущественным: $Q = \infty$). В диссертации эти допущения сняты и необходимые и достаточные условия получены в более общем виде.

Первая глава настоящей диссертационной работы посвящена вопросу существования и задаче поиска равновесий Нэша для двухузлового аукциона Курно. Рассматривается модель двухузлового рынка, в каждом из узлов $i = 1, 2$ которого m_i производителей с постоянными и одинаковыми предельными издержками c_i. Максимальный объем выработки товара каждым производителем не ограничен. Функции спроса в узлах имеют вид $D_i(p) = \max\{\bar{D}_i - d_i p, 0\}$. В общем случае предполагается, что объемы производства и потребления товара в каждом узле положительны:

$$p_i^* > c_i,\ \ D_i\left(p_i^*\right) > 0, \text{ где } i = 1, 2.$$

Для данной модели в главе 1 в упрощенном виде получены необходимые и достаточные условия существования локальных и глобальных равновесий Курно всех типов.

Тип *a*. Цена Курно на изолированном рынке $i = 1, 2$ может быть найдена из (1)–(2) и (3) по формуле: $p_i^* = \dfrac{\bar{D}_i + m_i d_i c_i}{d_i\left(m_i + 1\right)}$. Обозначим $t_{ij} \overset{def.}{=} d_i + \lambda^2 d_j$.

Утверждение 1.4. *Необходимым и достаточным условием существования локального равновесия типа **a** является выполнение неравенства*

$$\lambda^{-1} < \frac{\bar{D}_2 + m_2 d_2 c_2}{d_2\left(m_2+1\right)} \Big/ \frac{\bar{D}_1 + m_1 d_1 c_1}{d_1\left(m_1+1\right)} < \lambda .$$

Цены отклонения p_i^{**} и p_i^{**Q} в данном случае вычисляются по формулам:

$$p_i^{**} = \frac{\bar{D}_i + m_i d_i c_i}{t_{ij}\left(m_i+1\right)} + \lambda \frac{\bar{D}_j + m_j d_j c_j}{2t_{ij}\left(m_j+1\right)} + \frac{\lambda^2 d_j c_i}{2t_{ij}},$$

$$p_i^{**Q} = \frac{1}{\lambda d_j}\left(\bar{D}_j - \frac{Q}{\lambda} - \frac{m_j}{m_j+1}\cdot\left(\bar{D}_j - d_j c_j\right)\right), \text{где } i=1,2,\ j=3-i .$$

Теорема 1.1. *Локальное равновесие типа **a** является равновесием Нэша в том и только том случае, если для* $i=1,2$ *выполнена совокупность:*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p_i^{**} \geq p_i^{**Q}, \\ 2p_i^*\left(\sqrt{d_i t_{ij}} - d_i\right) - p_j^*\lambda d_j + c_i\left(d_i - 2\sqrt{d_i t_{ij}} + t_{ij}\right) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p_i^{**} < p_i^{**Q}, \\ p_i^{**Q} - c_i \leq \dfrac{d_i}{Q}\cdot\left(p_i^* - p_i^{**Q}\right)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тип $b_{1\to2}$**.** Цена Курно в узле 1, как и ранее, рассчитывается из условий 1-го порядка с учетом баланса спроса и предложения по следующей формуле: $\bar{p}_1 = \dfrac{\bar{D}_1 + \lambda\bar{D}_2 + \left(c_1 m_1 + c_2 m_2/\lambda\right)\left(d_1 + \lambda^2 d_2\right)}{\left(m_1+m_2+1\right)\left(d_1+\lambda^2 d_2\right)}$.

Утверждение 1.5. *Необходимым и достаточным условием существования локального равновесия* $b_{1\to2}$ *является выполнение неравенства:*

$$0 < \lambda\bar{D}_2 + \frac{c_2 m_2}{\lambda}\left(d_1 + \lambda^2 d_2\right) - \left(m_2\left(d_1 + \lambda^2 d_2\right) + \lambda^2 d_2\right)\bar{p}_1 < Q .$$

Условие существования локального равновесия $b_{2\to1}$ *описывается симметричным неравенством.*

В работах Васина А.А. с соавторами показано, что при типичных малых значениях коэффициента потерь (менее 10%) равновесия Нэша на рынке с потерями могут быть аппроксимированы равновесиями аналогичного рынка без потерь. Далее необходимые и достаточные условия существования равновесий Курно типов b и c приводятся в предположении $\lambda = 1$.

Теорема 1.2. *Локальные равновесия* $b_{1\to2}$ *и* $b_{2\to1}$ *являются равновесиями Нэша в том и только том случае, если выполнена система:*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + t_{12}\left(c_1 m_1 - c_2\left(m_1+1\right)\right)}{t_{12}\left(m_1+m_2+1\right)} \right)\left(2\sqrt{d_2 t_{12}} + t_{12}\left(m_2-1\right)\right) - \bar{D}_2 + d_2 c_2 + Q \ge 0, \\ \left(\dfrac{\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + t_{12}\left(c_2 m_2 - c_1\left(m_2+1\right)\right)}{t_{12}\left(m_1+m_2+1\right)} \right)\left(2\sqrt{d_1 t_{12}} + t_{12}\left(m_1-1\right)\right) - \bar{D}_1 + d_1 c_1 + Q \ge 0. \end{cases}$$

Тип $c_{1\to2}$**.** Цены Курно в узлах рынка в данном случае рассчитываются по формулам: $\hat{p}_1 = \dfrac{\bar{D}_1 + Q + m_1 d_1 c_1}{d_1\left(m_1+1\right)}$, $\hat{p}_2 = \dfrac{\bar{D}_2 - Q/\lambda + m_2 d_2 c_2}{d_2\left(m_2+1\right)}$.

Утверждение 1.6. *Локальное равновесие* $c_{1\to2}$ *существует тогда и только тогда, когда выполнено:*

$$\frac{\bar{D}_2 - Q/\lambda + m_2 d_2 c_2}{d_2\left(m_2+1\right)} > \lambda \cdot \frac{\bar{D}_1 + Q + m_1 d_1 c_1}{d_1\left(m_1+1\right)}.$$

Условие существования локального равновесия $c_{2\to1}$ *описывается симметричным неравенством.*

Теорема 1.3. *Пусть* $\lambda = 1$. *Тогда локальное равновесие* $c_{1\to2}$ *является равновесием Нэша в том и только том случае, если выполнено следующее:*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{d_1 \hat{p}_1 + 2 d_2 \hat{p}_2 + d_1 c_2}{2\left(d_1+d_2\right)} \ge \hat{p}_1 - \dfrac{2Q}{d_1}, \\ \left(\left(\hat{p}_1 - c_2\right) d_1 + 2\left(\hat{p}_2 - c_2\right) d_2\right)\sqrt{1 + d_1/d_2} \le 2\left(\hat{p}_2 - c_2\right)\left(d_1+d_2\right), \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{d_1 \hat{p}_1 + 2 d_2 \hat{p}_2 + d_1 c_2}{2\left(d_1+d_2\right)} < \hat{p}_1 - \dfrac{2Q}{d_1}, \\ \hat{p}_1 - \dfrac{2Q}{d_1} - c_2 \le \dfrac{d_2}{2Q}\left(\hat{p}_2 - \hat{p}_1 + \dfrac{2Q}{d_1}\right)^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Необходимое и достаточное условие существования равновесия $c_{2\to1}$ *описывается совокупностью систем симметричных неравенств.*

Теоремы 1.1–1.3 и утверждения 1.4–1.6 в работе обобщены и для случая неодинаковых постоянных предельных издержек производителей (см. утв. 1.7–1.9 и теоремы 1.4–1.6).

Глава 2 диссертации посвящена изучению структуры равновесий Курно различных типов для двухузлового аукциона Курно в зависимости от параметров модели.

Рассматривается описанная ранее модель двухузлового аукциона с одинаковыми предельными издержками производителей в каждом из узлов. Дополнительно делается предположение о незначительном уровне потерь в линии передачи ($\lambda = 1$). В такой модели структура равновесий Курно различных типов полностью описывается теоремой 2.1.

Теорема 2.1. *В данных предположениях утверждается следующее.*

1. *Равновесия Курно типа* ***a*** *не существует.*
2. *Сосуществование равновесий* $b_{1\to 2}$ *и* $b_{2\to 1}$ *невозможно.*
3. *Сосуществование равновесий* $c_{1\to 2}$ *и* $c_{2\to 1}$ *невозможно.*

Таким образом, в каждой точке фазового множества параметров модели могут одновременно существовать не более 2 равновесий Курно. Сосуществовать могут следующие пары равновесий: $b_{1\to 2}$ *и* $c_{1\to 2}$, $b_{1\to 2}$ *и* $c_{2\to 1}$, $b_{2\to 1}$ *и* $c_{1\to 2}$, $b_{2\to 1}$ *и* $c_{2\to 1}$.

Отметим, что сосуществование равновесий с противоположным направлением переброски товара действительно возможно (см. рис. 1).

Пусть далее $d_1 = d_2 = d_0$. Введем 3 новые переменные: $h_1 \overset{def.}{=} \bar{D}_1 - d_0 c_1$, $h_2 \overset{def.}{=} \bar{D}_2 - d_0 c_1$, $H \overset{def.}{=} d_0 (c_2 - c_1)$. Экономический смысл переменных h_1 и h_2 – уровень спроса в узлах 1 и 2 по цене, соответствующей предельным издержкам производителей узла 1. H обозначает изменение спроса при переходе от цены c_1 к цене c_2.

В новых переменных необходимые и достаточные условия существования локальных равновесий *b* и *c*, следуя утверждениям 1.4–1.6, будут выглядеть следующим образом:

$$b_{1\to2}:\begin{cases}0<h_2-\left(m_2+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{h_1+h_2+2m_2H}{m_1+m_2+1}+2m_2H<Q,\\ h_1+h_2+2m_2H>0,\\ h_1+h_2-2\left(m_1+1\right)H>0,\\ \left(2\left(m_1+m_2\right)+1\right)h_1-h_2-2m_2H>0,\\ \left(2\left(m_1+m_2\right)+1\right)h_2-h_1-2m_2H>0.\end{cases} \tag{7}$$

$$b_{2\to1}:\begin{cases}0<h_1-\left(m_1+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{h_1+h_2-2(m_1+1)H}{m_1+m_2+1}+2H\right)<Q,\\ h_1+h_2-2\left(m_1+1\right)H>0,\\ h_1+h_2+2m_2H>0,\\ \left(2\left(m_1+m_2\right)+1\right)h_2-h_1-2m_2H>0,\\ \left(2\left(m_1+m_2\right)+1\right)h_1-h_2-2m_2H>0.\end{cases} \tag{8}$$

$$c_{1\to2}:\begin{cases}\left(h_2-Q+m_2H\right)\left(m_1+1\right)-\left(h_1+Q\right)\left(m_2+1\right)>0,\\ h_1+Q>0,\\ h_2-Q-H>0,\\ m_1h_1-Q>0,\\ m_2\left(h_2-H\right)+Q>0.\end{cases} \tag{9}$$

$$c_{2\to1}:\begin{cases}\left(h_1-Q-\left(m_1+1\right)H\right)\left(m_2+1\right)-\left(h_2+Q-H\right)\left(m_1+1\right)>0,\\ h_2+Q-H>0,\\ h_1-Q>0,\\ m_2\left(h_2-H\right)-Q>0,\\ m_1h_1+Q>0.\end{cases} \tag{10}$$

Согласно теоремам 1.1–1.3, в новых переменных необходимыми и достаточными условиями «глобальности» локальных равновесий являются следующие неравенства:

$$b_{1\to2},b_{2\to1}):\begin{cases}\dfrac{h_1+h_2-2\left(m_1+1\right)H}{m_1+m_2+1}\left(m_2+\sqrt{2}-1\right)-h_2+H+Q\geq0,\\ \dfrac{h_1+h_2+2m_2H}{m_1+m_2+1}\left(m_1+\sqrt{2}-1\right)-h_1+Q\geq0.\end{cases}. \tag{11}$$

$$c_{1\to2}):\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}h_1+h_2+3m_1\cdot\dfrac{h_1+Q}{m_1+1}-\dfrac{(h_2-Q-H)(m_2-1)}{m_2+1}-2H-4(h_1-Q-H)\ge0,\\ h_1+h_2-(h_1+Q)\dfrac{m_1}{m_1+1}-(h_2-Q-H)\dfrac{m_2+2\sqrt{2}-1}{m_2+1}-2H\le0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}h_1+h_2+3m_1\cdot\dfrac{h_1+Q}{m_1+1}-\dfrac{(h_2-Q-H)(m_2-1)}{m_2+1}-2H-4(h_1-Q-H)<0,\\ \dfrac{h_1+Q}{m_1+1}-2Q-H\le\dfrac{1}{2Q}\cdot\left(\dfrac{h_2-Q+m_2H}{m_2+1}-\dfrac{h_1+Q}{m_1+1}+2Q\right)^2.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{12}$$

$$c_{2\to1}):\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}h_1+h_2+3m_2\cdot\dfrac{h_2+Q-H}{m_2+1}-\dfrac{(h_1-Q)(m_1-1)}{m_1+1}-4(h_2-Q)\ge0,\\ h_1+h_2-(h_2+Q-H)\dfrac{m_2}{m_2+1}-(h_1-Q)\dfrac{m_1+2\sqrt{2}-1}{m_1+1}\le0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}h_1+h_2+3m_2\cdot\dfrac{h_2+Q-H}{m_2+1}-\dfrac{(h_1-Q)(m_1-1)}{m_1+1}-4(h_2-Q)<0,\\ \dfrac{h_2+Q-H}{m_2+1}-2Q+H\le\dfrac{1}{2Q}\cdot\left(\dfrac{h_1-Q}{m_1+1}-\dfrac{h_2+Q-H}{m_2+1}+2Q-H\right)^2.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{13}$$

Для иллюстрации теоремы 2.1 на конкретном числовом примере, возьмем следующие исходные данные. Рассмотрим оптовый рынок электроэнергии, состоящий из двух узлов – симметричных олигополий, число производителей на которых $m_1=10$ и $m_2=25$. Предельные издержки производителей установим на уровне $c_1=600$, $c_2=800$, таким образом, чтобы цены (в руб. за МВт·ч) конкурентного равновесия в узлах рынка округленно соответствовали вальрасовским ценам для объединенных энергетических систем (ОЭС) Урала и Средней Волги, согласно данным об издержках производителей на 2008 г. Пропускную способность Q линии передачи примем равной 2600 МВт·ч, что соответствует пропускной способности линии между ОЭС Урала и Средней Волги[6].

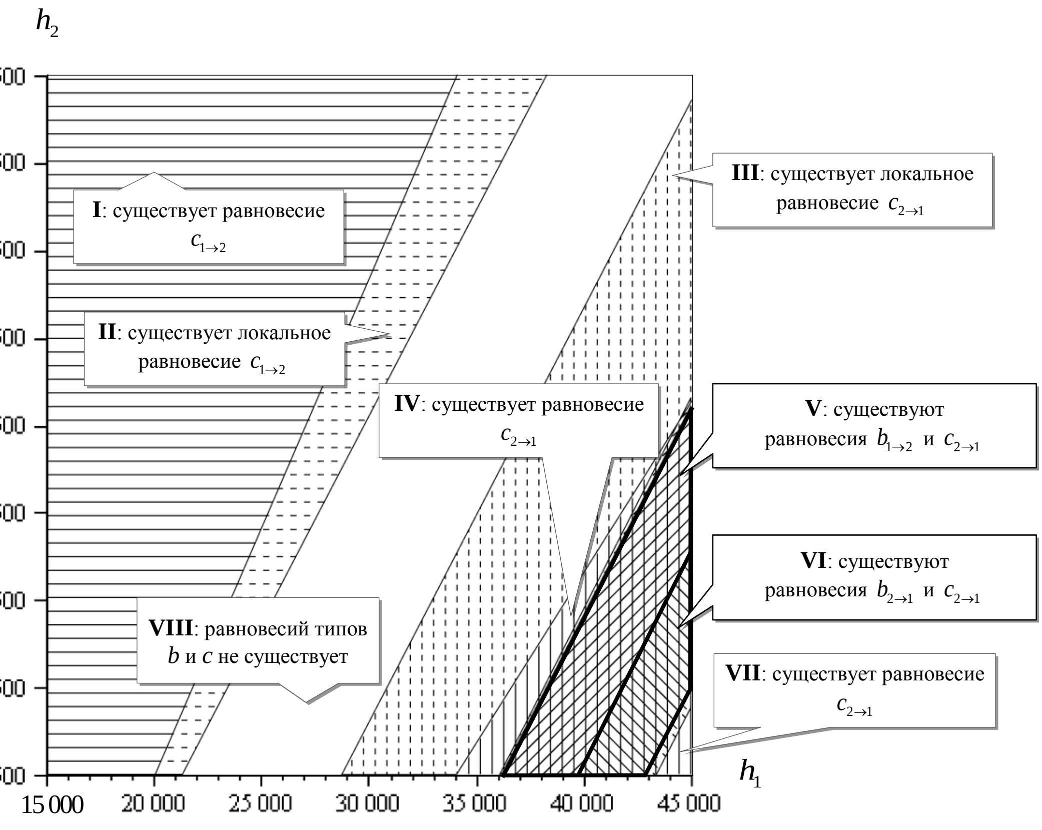
Скорость убывания спроса зафиксируем на уровне $d_0=7.5$, а величины $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ будем варьировать в промежутках $\bar{D}_1\in[19500;49500]$,

[6] По данным работы А б о л м а с о в а А., К о л о д и н а Д. «Конкурентный рынок или создание монополий: структурные проблемы российского оптового рынка электроэнергии» // EERC final report. 2002.

$\bar{D}_2 \in [26000; 66000]$, что соответствует типичным характеристикам спроса на электроэнергию в указанных регионах. В указанных предположениях параметр $H = 1500$, а h_1 и h_2 варьируются в промежутках $h_1 \in [15000; 45000]$, $h_2 \in [21500; 61500]$.

Изобразим на плоскости (h_1, h_2) области существования равновесий всех 4 типов (см. рис. 1), согласно (7)–(10) и (11)–(13). Можно видеть, что почти на всей области существования локальные равновесия типа *b* являются настоящими равновесиями Нэша. Области существования равновесий $c_{1\to 2}$ и $c_{2\to 1}$ гораздо больше по площади, нежели равновесий типа *b*, и составляют соответственно 40% и 9.8% от общей площади прямоугольника. Область, в которой не существует ни одного настоящего равновесия Нэша, весьма велика и составляет 50% площади всего рассматриваемого прямоугольника. Одной из причин столь больших размеров этой области является тот факт, что почти все равновесия типа *b* в данном примере существуют только совместно с $c_{2\to 1}$.

*Рис. 1. Области существования равновесий типов **b** и **c**.*



В рассматриваемом примере имеет место сосуществование равновесий с противоположными направлениями перетока: площадь области V сосуществования равновесий $b_{1\to 2}$ и $c_{2\to 1}$ составляет 5% от общей площади прямоугольника.

Глава 3 посвящена сравнительному анализу аукционов Курно и Викри с точки зрения цен для конечных потребителей товара.

В теоретико-игровой модели **аукциона Викри с резервными ценами**[7], которая является обобщением классической модели аукциона Викри (1961), игроками являются производители, их стратегиями – функции предложения $R^a(p)$. Функция выигрыша производителя на аукционе Викри учитывает не только собственный объем и издержки производителя, но и издержки других производителей, а также резервные цены, которые потребители готовы заплатить за товар:

$$f^a(R^a, a \in A) = \int_0^{R^a(\tilde{c})} \min\{(R^{A\setminus a})^{-1}(R^{A\setminus a}(\tilde{c})+v), D^{-1}(R^{A\setminus a}(\tilde{c})+v)\}dv - C^a(R^a(\tilde{c})).$$

Первая функция под знаком min указывает предельную цену за дополнительный объем dv, которую пришлось бы заплатить, если исключить участника a из аукциона. Эта цена определяется, исходя из заявленных функций предложения остальных игроков: $R^{A\setminus a}(p) = \sum_{u\in A\setminus a} R^u(p)$. Вторая функция характеризует резервную цену, которую потребители готовы заплатить за этот объем. Цена $\tilde{c}$ определяется из условия $D(\tilde{c}) \in \sum_{u\in A} R^u(\tilde{c})$. Поскольку функция спроса $D(p)$ является суммой функций спроса $D^b(p)$ отдельных потребителей $b \in B$, каждый из них получает объем товара $D^b(\tilde{c})$.

Следующий вариант распределения суммарной выплаты между потребителями учитывает их резервные цены и при этом минимизирует максимальную цену, которую они платят за товар. Потребитель b покупает товар по максимальной цене p_V до тех пор, пока закупаемый объем не

[7] Модель аукциона Викри с резервными ценами описана в работе В а с и н А. А., В а с и н а П. А., Р у л е в а Т. Ю. Об организации рынков однородных товаров // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.

превысит $D^b\left(p_V\right)$. Остаток товара он покупает по резервным ценам. Таким образом, общие затраты потребителя b составляют:

$$C^b(p_V) = p_V D^b(p_V) + \int\limits_{D^b(p_V)}^{D^b(\tilde{c})} (D^b)^{-1}(v)dv.$$

Максимальная цена p_V (далее называемая *ценой Викри*) уравнивает общие затраты потребителей и суммарный платеж производителям за товар:

$$\sum_{b\in B} C^b(p_V) = \sum_{a\in A}\left(f^a\left(R^a, a\in A\right) + C^a\left(R^a\left(\tilde{c}\right)\right)\right).$$

Поскольку каждая функция $C^b\left(p\right)$ монотонно возрастает по p, единственное решение последнего уравнения может быть получено стандартным вычислительным методом.

Данная процедура определяет условия игры в нормальной форме Γ_V, соответствующей аукциону Викри с резервными ценами. Игроками являются производители $a\in A$. В данной игре стратегия $R^a\left(p\right)\equiv S^a\left(p\right)$ (где $S^a\left(p\right)$ – вальрасовская функция предложения фирмы a, определяющая оптимальный объем выпуска при фиксированной цене p) является слабо доминирующей. Главным преимуществом выбора аукциона Викри является максимизация суммарного выигрыша производителей и потребителей.

В **третьей главе** диссертации рассматривается модель локального (одноузлового) рынка в трех типичных конфигурациях:

1) симметричная олигополия,
2) рынок с одним крупным производителей и группой мелких,
3) рынок с двумя группами однородных производителей.

Поведение потребителей описывается аффинной функцией спроса: $D(p) = \max\left\{0; \bar{D} - d_0 p\right\}$. Предполагается, что зафиксированы все параметры модели, кроме $\bar{D}$. Для каждой из трех вышеописанных конфигураций рынка найдено множество значений $\bar{D}$, для которых цена Викри ниже цены Курно.

В **пункте 3.1** рассматривается симметричная олигополия с n производителями. Каждый производитель характеризуется максимальным объемом выработки V и предельными издержками c.

Теорема 3.1. *В данных условиях цена Викри* p_V *не превышает цену Курно* p^**, если и только если* $\bar{D} \le D^*$*, где* $D^* = V(n+1)\sqrt{1-1/n} - d_0 c$.

В **пункте 3.2** рассматривается рынок, на котором присутствует один крупный производитель a (с неограниченным объемом выработки) с предельными издержками c_1, а также группа из n производителей $b_i,\ i=\overline{1,n}$, которые однородны по своим производственным характеристикам. Предельные издержки каждого равны c_2, максимальный объем выработки – V. Предполагается, что $c_2 > c_1$.

Определим следующие критические значения параметра $\bar{D}$: $\bar{D}_L \overset{def.}{=} d_0(2c_2 - c_1)$, $\bar{D}_H \overset{def.}{=} \bar{D}_L + V(n+2)$,

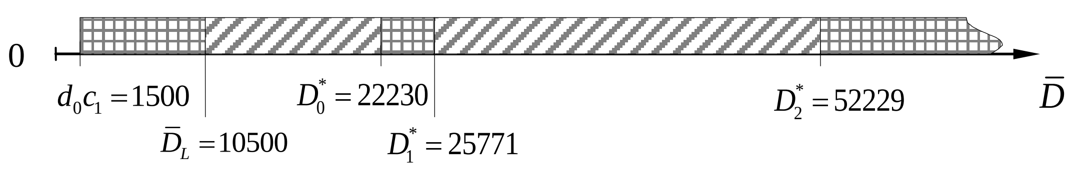
$$D_0^* \overset{def.}{=} \frac{V(n+2)\left(n^2 + 2n + \sqrt{n\left(2n^2 + 3n - 2d_0(c_2 - c_1)(n+1)/V\right)}\right)}{(n+1)^2} + \frac{d_0(c_1 + nc_2)}{n+1},$$

$$D_1^* \overset{def.}{=} 3Vn - 2\sqrt{Vn\left(Vn - 2d_0(c_2 - c_1)\right)} + d_0 c_1,\quad D_2^* \overset{def.}{=} 3Vn + 2\sqrt{Vn\left(Vn - 2d_0(c_2 - c_1)\right)} + d_0 c_1.$$

Теорема 3.2. *Если выполнено* $2d_0(c_2 - c_1) < Vn$ *и* $D_0^* \le \bar{D}_H$*, то* $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \in \left[\bar{D}_L; D_0^*\right] \cup \left[D_1^*; D_2^*\right]$*. Если* $2d_0(c_2 - c_1) < Vn$ *и* $D_0^* > \bar{D}_H$*, то* $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \in \left[\bar{D}_L; D_2^*\right]$*. Если же* $2d_0(c_2 - c_1) \ge Vn$*, то* $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \in \left[\bar{D}_L; D_0^*\right]$.

Иллюстрация теоремы 3.2 для $d_0 = 7.5$, $c_1 = 200$, $c_2 = 800$, $V = 500$ и $n = 25$ приведена на рис. 2.

Рис. 2. Оптимальная форма аукциона в зависимости от значений $\bar{D}$.



На рис. 2 штриховкой обозначены интервалы значений $\bar{D}$, в которых цена Викри ниже цены Курно; штриховкой – интервалы, в которых цена Курно ниже цены Викри.

В **пункте 3.3** рассматривается рынок с двумя группами однородных производителей. В каждой группе имеется n_i производителей с одинаковыми предельными издержками c_i и максимальными объемами V_i, $i = 1,2$. Для определенности считается, что $c_2 > c_1$.

Введем следующие обозначения:

$$D_3^* \overset{def.}{=} \frac{V_1\left(n_1+1\right)\sqrt{n_1\left(n_1+1\right)}}{n_1} + d_0 c_1,\ D_4^* \overset{def.}{=} \frac{\left(n_2+1\right)\sqrt{\left(V_1 n_1 + V_2 n_2\right)^2 - V_1^2 n_1 - V_2^2 n_2} - V_1 n_1}{n_2} + d_0 c_2,$$

$$D_5^* \overset{def.}{=} \frac{\left(n_1+n_2+1\right)\sqrt{\left(V_1 n_1 + V_2 n_2\right)^2 - V_1^2 n_1 - V_2^2 n_2} + d_0\left(n_1 c_1 + n_2 c_2\right)}{n_1+n_2},$$

$$p_{\min} \overset{def.}{=} \min\left\{c_1 + V_1/d_0 ; c_2 + V_2/d_0\right\},\ p_{\max} \overset{def.}{=} \left\{c_1 + V_1/d_0 ; c_2 + V_2/d_0\right\};$$

$$D_6^* \overset{def.}{=} \frac{\left(n_2+1\right)\sqrt{\left(V_1 n_1 + V_2 n_2\right)^2 - V_1^2 n_1 - V_2^2 n_2} - V_k n_k}{n_2} + d_0 c_2,\ \text{где}\ k \overset{def.}{=} \begin{cases} 1,\ \text{если}\ p_{\min} = c_1 + V_1/d_0, \\ 2,\ \text{если}\ p_{\min} = c_2 + V_2/d_0. \end{cases}$$

Т е о р е м а 3.3. *Если* $c_2 > c_1 + V_1/d_0$, *то* $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \in \left[0; D_3^*\right] \cup \cup \left[V_1 n_1 + d_0 c_2; D_4^*\right]$.

В случае $c_1 < c_2 < c_1 + V_1/d_0$, *если выполнено неравенство:*

$$V_1 n_1 + V_2 n_2 + d_0 c_2 \le \bar{D} \le d_0\left(\left(p_{\min} - c_1\right) n_1 + \left(p_{\min} - c_2\right) n_2\right) + d_0 p_{\min}, \qquad (14)$$

то $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \le D_5^*$. *Если же (14) не выполнено, то* $p_V \le p^* \Leftrightarrow \bar{D} \le D_6^*$.

В третьей главе диссертации также представлены результаты численного сравнения исходов аукционов Курно и Викри на основе модельных данных по оптовому рынку электроэнергии России. В подавляющем большинстве рассмотренных примеров аукцион Викри дает более низкую цену, нежели аукцион Курно.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

1. Шаманаев А. С. «*Сравнительный анализ аукционов Курно и Викри для рынков однородного товара*» // Труды Института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем, 2008, т. 32 (2), с. 262-278. – М.: Издательство ЛКИ, 2008.
2. Васин А. А., Шаманаев А. С. «*Равновесия Курно в модели двухузлового рынка однородного товара*» // Труды факультета ВМиК МГУ им.

Ломоносова. Прикладная математика и информатика, 2009, № 32, с. 46-66. – М.: МАКС Пресс, 2009.

3. Vasin, A. A. and Shamanaev, A. S. Cournot Equilibria in a Model of Two-Hub Homogeneous Commodity Market // Computational Mathematics and Modeling, vol. 21, no. 1, pp. 51-69. – Springer New York, NY, 2010.
4. Vasin, A., Sazanov, A., Alefirenko, M. and Shamanaev, A. *Simulation of the Russian Electricity Market* // Труды 4-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2004), с. 223-226. – М.: МАКС Пресс, 2004.
5. Шаманаев А. С. «*Моделирование аукционов Курно и Викри для двухточечного сетевого рынка*» // Материалы XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2008», с. 90. – М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2008.
6. Шаманаев А. С. «*Анализ устойчивости равновесий Курно для двухузлового рынка*» // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2006 года, с. 26-28. – М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2006.

В работах [2] и [3] Шаманаеву А. С. принадлежат формулировки и доказательства критериев существования локальных и глобальных равновесий Курно на двухузловом рынке с одинаковыми предельными издержками производителей и аффинными функциями спроса, а также построение областей существования равновесий Курно различных типов для случая двухузлового рынка с малыми потерями.

В работе [4] Шаманаеву А. С. принадлежит численное сравнение цен исходов аукционов Курно и Викри для ряда модельных вариантов рынка.