

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Шиганов Александр Евгеньевич

СИНТЕЗ СХЕМ КОНТАКТНОГО ТИПА
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СМЕЖНЫЕ КОНТАКТЫ

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Ложкин Сергей Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор механико-математического
факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
Редькин Николай Петрович

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института системных исследований РАН
Кузнецов Юрий Владимирович

Ведущая организация: Институт системного анализа РАН

Защита диссертации состоится 18 июня 2010 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ <http://cs.msu.su> в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «___» мая 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.44
профессор

Трифонов Н. П.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача синтеза управляющих систем является одной из основных задач кибернетики. Она состоит в построении для заданной системы булевых функций реализующей её схемы, принадлежащей заданному классу и являющейся оптимальной по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих её элементов. В диссертации рассматривается задача массового синтеза, которая заключается в изучении асимптотического поведения так называемой функции Шеннона $L(n)$ от натурального аргумента n , равной сложности реализации самой «трудной» булевой функции от n переменных с помощью схем из заданного класса.

Среди различных моделей дискретных управляющих систем можно выделить модели схем «проводящего» или «контактного» типа, в которых реализация булевых функций осуществляется с помощью передачи сигналов по ребрам (дугам) графа схемы, называемым контактами. При этом проводимостью контактов «управляют» внешние или специальные внутренние булевы переменные.

Задача массового синтеза для класса контактных схем была впервые поставлена в работе Шеннона¹, в которой им был установлен порядок функции $L(n)$, связанной со сложностью контактных схем, где под сложностью понималось общее число контактов схемы. Асимптотически оптимальный метод синтеза контактных схем был разработан О. Б. Лупановым². Им же были установлены асимптотические значения функций Шеннона, связанных с реализацией булевых функций во всех основных классах схем (классе схем из функциональных элементов, классе формул, классе контактных и релейно-контактных схем и др.)^{2 3 4 5}.

¹Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. J., 1949, v. 28, N-1, pp. 59–98.

²Лупанов О. Б. О синтезе контактных схем // ДАН СССР. – 1958. – Т. 119, № 1. – С. 23–26.

³Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов, Радиофизика. – 1958. – Т. 1, № 1. – С.120–140.

⁴Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 61–80.

⁵Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. – М.: Наука, 1964. – С. 25–48.

При моделировании дискретных преобразователей информации обычно стремятся учесть их физические особенности, например, площадь, ёмкость или задержку функционального элемента интегральной схемы, возможность размещения транзисторов на подложке интегральной схемы и т.д. С этой целью ставится задача синтеза схем из классов с некоторыми ограничениями на структуру, а также применяются различные подходы к определению сложности схем.

Так, например, О. Б. Лупанов получил⁶ асимптотику функции Шеннона, связанной со сложностью схем из функциональных элементов, в которых выход любого элемента может соединяться не более, чем с заданным числом входов других элементов. А. Д. Коршунов разработал⁷ асимптотически оптимальный метод синтеза контактных схем, в которых степени вершин ограничены некоторой константой. Отметим, что подобные ограничения позволяют, в том числе, учитывать ограниченную ёмкость физических элементов схем.

Модели схем контактного типа являются удобными математическими моделями интегральных схем на дополняющих МОП-транзисторах (КМОП-схем)⁸. При этом, обычно, контакт с пометкой x_i^σ соответствует n -МОП или p -МОП транзистору, на затвор которого подаётся значение x_i^σ , а контактная схема описывает соединения между истоками и стоками транзисторов. Известна⁸ асимптотика функции Шеннона, связанной со сложностью КМОП-схем, для случая, когда контакты разрешается помечать только символами «внешних» булевых переменных. Этот случай соответствует моделированию КМОП-схем с помощью контактных схем. Если также допускается использование в качестве пометок контактов специальных «внутренних» булевых переменных, реализуемых в вершинах схемы, то возможно получение асимптотически в два раза более эффективной реализации булевых функций⁹. Этот случай, фактически, соответствует моделированию КМОП-схем с помощью итеративных

⁶Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов (формулы с конечной памятью) // Проблемы кибернетики. 1962. Вып. 7. С. 61–114.

⁷Коршунов А. Д. Об асимптотических оценках сложности контактных схем заданной степени // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 5. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. С. 35–63.

⁸Сапоженко А. А., Ложкин С. А. Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. № 1. С. 42–47.

⁹Касим-Заде О. М. О сложности реализации булевых функций в одной модели электронных схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 145–160.

контактных схем¹⁰, являющихся модификацией класса релейно-контактных схем. В связи с этим интересен вопрос об асимптотике функции Шеннона, связанной со сложностью итеративных контактных схем с ограниченной степенью вершин.

К классу схем контактного типа можно также отнести впервые предложенный Ли¹¹ класс двоичных решающих диаграмм (Binary Decision Diagrams, BDDs), активно изучаемый в настоящее время и применяемый, в том числе, для «программной» реализации булевых функций. Асимптотика функции Шеннона для сложности BDD установлена В. А. Кузьминым¹².

Наряду с моделями схем с «жёсткими» структурными ограничениями, в литературе также рассматриваются модели, в которых допускается наличие незначительного числа «нарушений» ограничений. Так, А. А. Никитин получил¹³ асимптотику функции Шеннона для сложности схем из функциональных элементов и элементов задержки, в которых допускались ветвления выходов только элементов задержки, причём максимальное количество «ветвящихся» элементов задержки в схеме было ограничено.

Важным направлением теории синтеза является получение для функций Шеннона оценок высокой степени точности, то есть таких оценок некоторой функции Шеннона $L(n)$, имеющей порядок роста $2^n/n$, относительная погрешность которых имеет вид $O(1/n)$. Заметим, что указанные оценки, по сути, устанавливают значение первого остаточного члена асимптотического разложения соответствующей функции Шеннона. Методы получения оценок высокой степени точности разработаны С. А. Ложкиным^{10 14}. В своих работах С. А. Ложкин получил оценки высокой степени точности для сложности основных классов схем, в том числе ориентированных контактных схем и итеративных контактных схем.

¹⁰Ложкин С.А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.

¹¹Lee C. Y. Representation of switching circuits by binary-decision programs. Bell. Sys. Tech. J., vol. 38, 1959. – pp. 985–999.

¹²Кузьмин В. А. Оценка сложности реализации булевых функций программами простого типа. // Методы Дискретного анализа, 29, 1976. – С. 11–39.

¹³Никитин А. А. О сложности реализации функций алгебры логики в некоторых классах автоматных схем // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1999. № 3. С. 41–49.

¹⁴Ложкин С. А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-матем. наук. Москва. 1997.

Заметим, что для любого из перечисленных выше классов схем соответствующая функция Шеннона $L(n)$ асимптотически совпадает со сложностью почти всех функций от n переменных.

Цель диссертации. Первой целью диссертации является разработка методов синтеза схем контактного типа с некоторыми ограничениями на смежные контакты. Вторая цель диссертации состоит в получении асимптотических оценок функций Шеннона, связанных с различными функционалами сложности указанных схем.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. В данной работе впервые систематически исследованы вопросы реализации булевых функций схемами контактного типа с различными ограничениями на смежные контакты. Предложены новые функционалы сложности ориентированных контактных схем и двоичных решающих диаграмм, позволяющие рассматривать различные виды ограничений на смежные контакты, а также степень строгости их выполнения, и получены асимптотические оценки высокой степени точности функций Шеннона, связанных с указанными функционалами сложности. Разработан метод синтеза ориентированных контактных схем с ограничением на полустепени исхода вершин, позволяющий установить асимптотику первого остаточного члена асимптотического разложения соответствующей функции Шеннона. Разработан асимптотически оптимальный метод синтеза итеративных контактных схем с ограничением на степени вершин.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы синтеза, разработанные в диссертации, могут, по мнению автора, быть применены при решении задач синтеза различных видов схем контактного типа, в том числе, КМОП-схем.

Методы исследования. В работе используются методы синтеза схем, ориентированные на получение оценок высокой степени точности, мощностные методы установления нижних оценок, методы теории графов.

Публикации и апробирование. По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ [1–7], из которых статьи [5, 6] – в изданиях, рекомендованных ВАК. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ, а также на семинаре ка-

федры дискретной математики механико-математического факультета МГУ и, кроме того, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. XV международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008);
2. XVII международная школа-семинар «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008);
3. XVIII международная научная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009);
4. X международный семинар «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы. Текст изложен на 124 страницах, диссертация содержит 14 рисунков. Список литературы включает 33 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение диссертации состоит из двух частей. Первая часть содержит краткий обзор исследований, связанных с темой работы. Во второй части **введения** определяются классы схем, изучаемые в диссертации, вводятся связанные с ними функции Шеннона и формулируются в виде теорем 1–8 полученные для функций Шеннона асимптотические оценки.

В диссертации изучаются следующие классы схем.

1. Класс $\mathcal{U}^{\text{ОКС}}$ всех ориентированных контактных схем (ОКС), то есть контактных схем из ориентированных контактов, проводящих только в соответствующем направлении.
2. Класс $\mathcal{U}^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-ОКС}}$ всех ОКС, в которых из каждой вершины исходит не более λ дуг и для каждой вершины среди пометок исходящих из неё дуг встречается не более, чем ν , различных переменных.
3. Класс $\mathcal{U}^{\text{BDD}}$ двоичных решающих диаграмм (BDD), причём под BDD от переменных $x_1, \dots, x_n$ в диссертации понимается произвольная ациклическая схема Σ из класса $\mathcal{U}^{\langle 2, 1 \rangle\text{-ОКС}}$, граф которой содержит два стока, помеченных 0 и 1 и являющихся выходами схемы, один или несколько

истоков, являющихся входами схемы, а из каждой вершины Σ , отличной от выходов исходит пара противоположных контактов вида x_i и $\bar{x}_i$, где $1 \leq i \leq n$.

4. Класс $\mathcal{U}^{k\text{-OBDD}}$ ($\mathcal{U}^{k\text{-SOBDD}}$) упорядоченных (строго) k -считывающих двоичных решающих диаграмм, то есть схем Σ из класса $\mathcal{U}^{\text{BDD}}$, в которых произвольная простая цепь из входа в выход Σ разбивается на k сегментов, таких, что на каждом сегменте переменные встречаются в порядке, одинаковом для всех сегментов и указанных цепей, и при этом на каждом сегменте каждая входная переменная Σ встречается не более одного раза (соответственно в точности один раз).
5. Класс $\mathcal{U}^{\text{ИКС}}$ всех итеративных контактных схем (ИКС), где под итеративной контактной схемой понимается схема Σ' , полученная из некоторой контактной схемы Σ , имеющей один вход и m выходов $b_1, \dots, b_m$ и зависящей от переменных $x_1, \dots, x_n$, в результате применения операции присоединения различных переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ к различным выходам $b_{j_1}, \dots, b_{j_k}$ соответственно. При этом накладывается ограничение, связанное с тем, что переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ входят в схему Σ без отрицаний, а функции, реализуемые в выходах $b_{j_1}, \dots, b_{j_k}$, не зависят существенно от переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.

Пусть схема Σ принадлежит одному из введённых классов схем, тогда под *сложностью* $L(\Sigma)$ *схемы* Σ понимается число контактов в Σ . Далее, если схема Σ является ОКС или BDD, то для фиксированных положительных действительных чисел w' и w'' , где $w'' > w'$, дополнительно определим *вес* $W_{w',w''}(\Sigma)$ *схемы* Σ , как сумму весов вершин Σ , причём вес истока и вершины с одной входящей дугой равен w' , а все остальные вершины имеют вес w'' .

Для булевой функции f в диссертации определяются следующие функционалы сложности:

1. Величина $L^A(f)$, где $\mathcal{U}^A$ – один из введённых классов схем, равна минимуму сложностей $L(\Sigma)$, где минимум берётся по множеству всех схем Σ из класса $\mathcal{U}^A$, реализующих f .
2. Величина $W_{w',w''}^A(f)$, где $\mathcal{U}^A$ – один из введённых классов ОКС или BDD, равна минимуму весов $W_{w',w''}(\Sigma)$, где минимум берётся по множеству

всех схем Σ из класса $\mathcal{U}^A$, реализующих f .

3. Величина $L^A(f, t)$, где t – натуральное, а $\mathcal{U}^A$ – один из введённых классов ОКС или BDD, равна минимуму сложностей $L(\Sigma)$, где минимум берётся по множеству всех схем Σ из класса $\mathcal{U}^A$, реализующих f , таких, что схема Σ содержит не более t вершин, в которые заходит более одной дуги.
4. Величина $L_\lambda^{\text{ОКС}}(f)$ (соответственно $L_\lambda^{\text{ИКС}}(f)$) равна минимуму сложностей $L(\Sigma)$, где минимум берётся по множеству всех ОКС (соответственно ИКС) Σ , реализующих f , таких, что степень вершин Σ ограничена константой λ .

Для натурального n функции Шеннона вида $L^A(n)$, $W_{w', w''}^A(n)$, $L^A(n, t)$ и $L_\lambda^A(n)$ традиционно определяются, как максимум величин $L^A(f)$, $W_{w', w''}^A(f)$, $L^A(f, t)$ и $L_\lambda^A(f)$ соответственно, где максимум берётся по множеству булевых функций f от n переменных.

В **первой главе** вводится ряд определений и утверждений, используемых в диссертации при описании методов синтеза схем.

Разбиение D множества переменных булевой функции $\varphi(y_1, \dots, y_t)$ называется *селекторным*, если для каждой переменной y из произвольной компоненты Y' разбиения D можно подобрать набор булевых констант $\tilde{\alpha}$, такой, что переменные из одной компоненты разбиения D принимают на наборе $\tilde{\alpha}$ одинаковые значения и что после подстановки в функцию φ констант набора $\tilde{\alpha}$ на места всех переменных, за исключением переменных компоненты Y' , функция φ совпадает с y или $\bar{y}$.

В §1.1 диссертации формулируются леммы 1.1 и 1.2, в которых описаны способы получения «хороших» селекторных разбиений при суперпозициях булевых функций. Формулировки леммы 1.2 в различных вариантах встречаются у С. А. Ложкина^{10 14}, а сама лемма 1.2 доказывается с использованием леммы 1.1, являющейся, по сути, более сильным утверждением. С содержательной точки зрения лемма 1.1 позволяет упростить процесс получения селекторных разбиений, сводя его к проверке некоторых свойств функций, участвующих в суперпозиции.

В §1.2 вводится понятие *φ -универсального множества функций порядка m* , то есть такого множества функций G от переменных $x_1, \dots, x_m$, что

для любой функции $g(x_1, \dots, x_m)$ в множестве G найдутся функции, которые можно подставить в функцию φ так, что полученная в результате суперпозиции функция совпадает с g . Главным критерием «качества» универсального множества является число функций в нём. В лемме 1.5 утверждается возможность построения «эффективного» φ -универсального множества при наличии подходящего селекторного разбиения функции φ .

Некоторые вопросы суперпозиции ОКС изложены в §1.3. Там же вводятся вспомогательные классы схем, с помощью которых удобно описывать построение упорядоченных (строго) k -считывающих BDD, и приводятся простейшие методы синтеза ОКС. В лемме 1.7 даётся оценка сложности реализации булевой функции посредством моделирования её совершенной ДНФ с использованием контактного дерева. В лемме 1.8 приводится оценка сложности реализации системы булевых функций с помощью одного шага разложения по методу каскадов, после чего остаточные функции реализуются по лемме 1.7.

Во **второй главе** диссертации описывается метод синтеза ОКС и BDD с близким к оптимальному значением веса, а также близким к оптимальному значением сложности при наличии ограничения на число вершин, в которые заходит более одной дуги, для почти всех функций.

В §2.1 изучаются вопросы реализации схемами из класса $\mathcal{U}^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-ОКС}}$ ряда вспомогательных функций, для которых можно «эффективно» строить универсальные множества. Отдельно рассматриваются два случая: случай $\nu = \lambda$ и случай $\nu < \lambda$. В обоих случаях указанные функции получаются в результате многократной суперпозиции некоторых базисных функций, причём множество переменных базисных функций условно разделяется на множество прямых и множество итеративных переменных, а при суперпозиции базисных функций подстановка одних функций осуществляется на места итеративных переменных других функций. Для получения необходимых селекторных разбиений при суперпозиции функций в случае $\nu = \lambda$ используется лемма 1.2, а в случае $\nu < \lambda$ – лемма 2.3, вытекающая из леммы 1.1.

Метод синтеза ОКС и BDD, основанный на специальных разбиениях единичного куба и универсальных множествах функций, описан в §2.2. Построение схемы, принадлежащей классу $\mathcal{U}^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-ОКС}}$ и реализующей заданную булеву

функцию f от переменных $x_1, \dots, x_n$, включает в себя:

1. построение специальной схемы Σ_φ , реализующей вспомогательную булеву функцию φ , и построение φ -универсального множества G порядка m , где $m < n$;
2. построение специального разбиения Δ множества наборов q -мерного единичного куба, где $m < q < n$, от переменных $x_1, \dots, x_q$, такого, что функции из множества G' , где $G' \subset G$, «моделируются» указанными переменными или их отрицаниями на компонентах разбиения Δ ;
3. моделирование значений каждой функции вида

$$f(x_1, \dots, x_q, \sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n),$$

где $\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n$ – булевы константы, на каждой компоненте разбиения Δ с помощью суперпозиции схемы Σ_φ и схемы $\Sigma_{G''}$, реализующей систему $G'' = G \setminus G'$.

4. «сборка» схемы Σ_f , реализующей f , из схем, построенных в п.3, на основе разложения f по переменным $x_{q+1}, \dots, x_n$.

Метод синтеза схем класса $\mathcal{U}^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-ОКС}}$ приводится в теореме 2.1. Метод синтеза упорядоченных (строго) k -считывающих, где $k \geq 2$, двоичных решающих диаграмм описан в теореме 2.2 (соответственно теореме 2.3) и представляет собой, по сути, незначительную модификацию метода синтеза схем класса $\mathcal{U}^{\langle 2, 1 \rangle\text{-ОКС}}$.

В §2.3 доказываются верхние оценки числа схем определённого вида из классов ОКС и BDD, которые затем используются при получении мощностных неравенств для доказательства нижних оценок функций Шеннона, связанных с классами ОКС и BDD и различными функционалами сложности схем.

Из результатов §2.2 и §2.3 вытекают теоремы 1–4, сформулированные во введении диссертации.

Теорема 1. *Для любых натуральных λ и ν , где $\lambda \geq 2$ и $1 \leq \nu \leq \lambda$, а также положительных вещественных величин w' и w'' , где $w'' > w'$,*

при $n = 1, 2, \dots$ справедливо¹⁵

$$W_{w', w''}^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-OKC}}(n) = \frac{w'}{\lambda - 1} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\frac{2\lambda - \nu - 2}{\lambda - 1} \log n \pm O(1)}{n} \right).$$

Теорема 2. Для любого натурального $k \geq 2$, а также положительных вещественных величин w' и w'' , где $w'' > w'$, при $n = 1, 2, \dots$ справедливо

$$W_{w', w''}^{\text{BDD}}(n) = \frac{w' 2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n \pm O(1)}{n} \right),$$

$$W_{w', w''}^{k\text{-OBDD}}(n) = \frac{w' 2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n \pm O(1)}{n} \right),$$

$$W_{w', w''}^{k\text{-SOBDD}}(n) = \frac{w' 2^n}{n} \left(1 + \frac{2 \log n \pm O(1)}{n} \right).$$

Теорема 3. Для любых натуральных λ и ν , где $\lambda \geq 2$ и $1 \leq \nu \leq \lambda$, при $n = 1, 2, \dots$ и $t = t(n)$, где¹⁶ $\log t(n) = \Omega(n)$ и $t(n)$ не превосходит $2^n/n^2$, справедливо

$$L^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-OKC}}(n, t) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{2^n}{\log t + \frac{\nu}{\lambda - 1} \log n} \left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Теорема 4. Для любого натурального $k \geq 2$ при $n = 1, 2, \dots$ и $t = t(n)$, где $t(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $t(n)$ не превосходит $2^n/n^2$, справедливо

$$L^{k\text{-SOBDD}}(n, t) = \frac{2^{n+1}}{\log t} \left(1 \pm O\left(\frac{1}{\log t}\right) \right),$$

и если, кроме того, $\log t(n) = \Omega(n)$, то

$$L^{\text{BDD}}(n, t) = \frac{2^{n+1}}{\log nt} \left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

$$L^{k\text{-OBDD}}(n, t) = \frac{2^{n+1}}{\log nt} \left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

¹⁵Равенство $r(n) = p(n) \pm O(q(n))$ означает, что $|r(n) - p(n)| = O(q(n))$. В данной работе основание 2 у логарифмов опускается.

¹⁶Равенство $p(n) = \Omega(q(n))$ означает, что $p(n) = O(q(n))$ и $q(n) = O(p(n))$.

В §2.3 также установлено, что если в определении веса $W_{w',w''}(\Sigma)$ ОКС Σ учитывать с весом w'' вершины, в которые заходит более d дуг, где d – натуральная константа, а все остальные вершины учитывать с весом w' , то асимптотика функций Шеннона по-прежнему составляет $\frac{w'}{\lambda-1} 2^n/n$ для класса $\mathcal{U}^{\langle\lambda,\nu\rangle\text{-ОКС}}$ и $w'2^n/n$ для классов BDD соответственно.

В **третьей главе** диссертации приводятся методы синтеза схем из класса $\mathcal{U}^{\langle\lambda,\lambda\rangle\text{-ОКС}}$ и BDD, близких по сложности к оптимальным для почти всех функций. Построение схемы, реализующей заданную булеву функцию f от n переменных, включает в себя:

1. разбиение множества наборов n -мерного единичного куба на два подмножества A_1 и A_2 , причём A_1 является n_1 -мерным единичным кубом, где $n_1 < n$, а $A_2 = \{0, 1\}^n \setminus A_1$.
2. построение специальных схем Σ_{φ_1} и Σ_{φ_2} , реализующих вспомогательные булевы функции φ_1 и φ_2 соответственно;
3. построение множества функций G , такого, что на наборах каждого из множеств A_1 и A_2 функции из G совпадают с функциями некоторых φ_1 -универсальных множеств, а на наборах множества A_2 на промежуточных входах схем Σ_{φ_1} , определённым образом соединённых со схемой Σ'' , реализующей часть функций из G , реализуются функции некоторого φ_2 -универсального множества;
4. построение для $i = 1, 2$ специального разбиения Δ_i множества наборов A_i , такого, что некоторые функции системы G можно «про моделировать» переменными или их отрицаниями на компонентах разбиения Δ_i ;
5. моделирование значений функции f на каждой компоненте разбиения Δ_1 с помощью суперпозиции схемы Σ_{φ_1} и схемы Σ'' ;
6. моделирование значений функции f на каждой компоненте разбиения Δ_2 с помощью суперпозиции схем Σ_{φ_2} и промежуточных входов схем, построенных в п.5;
7. «сборка» схем, построенных в пп.5–6 в схему Σ_f , реализующую f .

Метод синтеза схем класса $\mathcal{U}^{\langle\lambda,\lambda\rangle\text{-ОКС}}$ приводится при доказательстве теоремы 3.1, а метод синтеза упорядоченных k -считывающих, где $k \geq 4$, двоичных решающих диаграмм – при доказательстве теоремы 3.2. В §3.2 также

делается замечание к теореме 3.1 об одном свойстве схемы Σ_f , построенной при доказательстве этой теоремы. В замечании приводится оценка суммарной полустепени захода тех вершин схемы Σ_f , в которые заходит более одной дуги.

Из теорем 3.1 и 3.2, из соотношений между классами схем $\mathcal{U}^{\langle 2,1 \rangle\text{-OKC}}$, $\mathcal{U}^{\text{BDD}}$, $\mathcal{U}^{k\text{-OBDD}}$, а также из нижних оценок функций Шеннона, доказанных в §2.3, вытекают теоремы 5 и 6, сформулированные во введении диссертации.

Теорема 5. *Для любых натуральных λ и ν , где $\lambda \geq 2$ и $1 \leq \nu \leq \lambda$, при $n = 1, 2, \dots$ справедлива нижняя оценка*

$$L^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-OKC}}(n) \geq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\frac{\lambda - \nu - 1}{\lambda - 1} \log n - O(1)}{n} \right),$$

а также в случае $\nu = 1$, $\lambda = 2$ и в случае $\nu = \lambda$ при $n = 1, 2, \dots$ справедлива верхняя оценка

$$L^{\langle \lambda, \nu \rangle\text{-OKC}}(n) \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\frac{\lambda - \nu - 1}{\lambda - 1} \log n + \log \log n + O(1)}{n} \right).$$

Теорема 6. *Для любого натурального $k \geq 4$ при $n = 1, 2, \dots$ справедливы оценки*

$$\frac{2^{n+1}}{n} \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq L^{\text{BDD}}(n) \leq \frac{2^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{\log \log n + O(1)}{n} \right).$$

$$\frac{2^{n+1}}{n} \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq L^{k\text{-OBDD}}(n) \leq \frac{2^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{\log \log n + O(1)}{n} \right).$$

Четвёртая глава диссертации посвящена методам синтеза итеративных контактных схем и ориентированных контактных схем с ограничением на степени вершин.

Построения для класса итеративных контактных схем приводятся в п. 4.1.1. В нём описывается подход А. Д. Коршунова⁷ к построению контактных схем с ограниченной степенью вершин для функций вида $y^\sigma f$, где $\sigma \in \{0, 1\}$, если известна контактная схема для функции f . Этот подход сформулирован в лемме 4.2 и сводится к добавлению в схему для f необходимого количества

контактов вида y^σ . Также в п. 4.1.1 формулируется следствие из теоремы Холла, которое заключается в том, что в двудольном графе, таком, что степень вершин одной доли равна d , а степень вершин второй доли не превосходит d , существует паросочетание, насыщающее вершины первой доли.

Построение итеративной контактной схемы, реализующей заданную булеву функцию f от переменных $x_1, \dots, x_n$ и имеющую вершины степени не более λ , происходит следующим образом. Функция f представляется в виде $f = \bar{x}_n f_0 \vee x_n f_1$, где $f_\gamma = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma)$, $\gamma \in \{0, 1\}$. Для $\gamma = 0, 1$ строится схема Σ_{f_γ} , реализующая функцию f_γ , из которой с использованием леммы 4.2 получается схема Σ'_{f_γ} , реализующая функцию $x_n^\gamma f_\gamma$ с вершинами степени не более λ . Схема Σ_f , реализующая f , получается в результате параллельного соединения схем Σ'_{f_0} и Σ'_{f_1} . Метод синтеза схемы Σ_{f_γ} , $\gamma \in \{0, 1\}$, включает в себя:

1. построение специальной схемы Σ_φ , реализующей вспомогательную булеву функцию φ , и построение φ -универсального множества G порядка m , где $m < (n-1)$, причём множество G имеет вид $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, а его функции зависят от переменных $x_1, \dots, x_m$;
2. построение схемы Σ_i , реализующей функции множества G_i , $i = 1, 2, 3$;
3. построение по функции f_γ специальных двудольных графов и получение по следствию из теоремы Холла в каждом из графов паросочетания, насыщающего вершины одной из долей;
4. присоединение схем $C_1, \dots, C_k$, представляющих собой цепочки контактов, к выходам схемы Σ_1 ;
5. выбор в соответствии с правилами, определяемыми построенными паросочетаниями, для каждого контакта схем $C_1, \dots, C_k$ функции из системы G_2 для «управления» указанным контактом;
6. реализация каждой функции вида

$$f_\gamma(x_1, \dots, x_m, \sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{n-1}),$$

где $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{n-1}$ — булевы константы, с помощью суперпозиции схемы Σ_φ и некоторых выходов цепочек $C_1, \dots, C_k$, причём контакты схемы Σ_φ «управляются» функциями системы G_3 ;

7. «сборка» схемы Σ_{f_γ} из схем, построенных в п.6, на основе разложения

f_γ по переменным $x_{m+1}, \dots, x_{n-1}$.

Метод синтеза ориентированных контактных схем, имеющих вершины степени не более λ , излагается в п. 4.1.2 и заключается в незначительной модификации схемы из класса $\mathcal{U}^{(\lambda-1, \lambda-1)\text{-окс}}$, построенной при доказательстве теоремы 3.1 с учётом замечания к ней.

Из результатов §4.1 и §4.2 вытекают теоремы 7 и 8, сформулированные во введении диссертации.

Теорема 7. *Для любого натурального $\lambda \geq 3$ при $n = 1, 2, \dots$ справедливы оценки*

$$L_\lambda^{\text{окс}}(n) \geq \frac{\lambda}{\lambda-2} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 - \frac{\frac{2}{\lambda-2} \log n + O(1)}{n} \right),$$

$$L_\lambda^{\text{окс}}(n) \leq \frac{\lambda}{\lambda-2} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{-\frac{1}{\lambda-2} \log n + \log \log n + O(1)}{n} \right).$$

Теорема 8. *Для любого натурального $\lambda \geq 3$ при $n = 1, 2, \dots$ справедливы оценки*

$$\frac{\lambda}{2\lambda-2} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - O(1)}{n} \right) \leq L_\lambda^{\text{икс}}(n) \leq \frac{\lambda}{2\lambda-2} \cdot \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Заметим, что нижние оценки функций Шеннона, приведённые в теоремах 1–8, справедливы для сложности (относительно соответствующих функционалов) почти всех функций от n переменных.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена модель схем контактного типа и введены новые функционалы сложности схем, позволяющие рассматривать различные виды ограничений на смежные контакты, а также учитывать степень строгости их выполнения.
2. В рамках предложенной модели разработаны методы синтеза ориентированных контактных схем и двоичных решающих диаграмм. Установлены асимптотические оценки высокой степени точности для функций

Шеннона, связанных с введенными функционалами сложности указанных схем.

3. Созданы методы синтеза ориентированных контактных схем с ограничением на полустепени исхода вершин, позволяющие установить асимптотику первого остаточного члена асимптотического разложения функций Шеннона для сложности указанных схем.
4. Разработаны методы синтеза итеративных контактных схем с ограничением на степени вершин. Впервые установлено асимптотическое поведение функции Шеннона, связанной со сложностью указанных схем.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] Шиганов А. Е. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности схем из некоторых классов // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2006 года. – М.: Издательский отдел фак-та ВМиК, 2006, С. 73–74
- [2] Шиганов А. Е. О сложности ориентированных контактных схем с ограниченной полустепенью исхода // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докл. XV Международной конф. Казань: Отечество, 2008. С. 133.
- [3] Шиганов А. Е. О сложности ориентированных контактных схем с весовыми и структурными ограничениями // Материалы XVII Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.) – Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 2008, С. 190–192.
- [4] Ложкин С. А., Шиганов А. Е. О синтезе ориентированных и итеративных контактных схем заданной степени // Труды VIII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 6-9 апреля 2009 г.). – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2009. – С. 201–203.

- [5] Шиганов А. Е. О синтезе ориентированных контактных схем с некоторыми ограничениями на смежные контакты // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. №3. С. 46–52.
- [6] Шиганов А. Е. О сложности ориентированных контактных схем с ограниченной полустепенью исхода // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2 – С. 164–172.
- [7] Ложкин С. А., Шиганов А. Е. Некоторые оценки сложности ориентированных контактных схем с ограниченной полустепенью исхода // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"(Москва, МГУ, 1-6 февраля 2010 г.). – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. – С. 122–123.