Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Федорова Валентина Сергеевна

Системы функциональных уравнений многозначной логики

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ Марченков Сергей Серафимович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета МГУ Буевич Вячеслав Александрович;
	кандидат физико-математических наук, доцент Московского энергетического института (технического университета) Мещанинов Дмитрий Германович.
Ведущая организация:	Вычислительный центр РАН.

Защита дисертации состоится 12 ноября 2010 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова http://www.cmc.msu.ru в разделе „Наука“ — „Работа диссертационных советов“ — „Д 501.001.44“.

Автореферат разослан 8 октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В математике функциональным уравнением называется уравнение, выражающее связь между значениями функции в нескольких точках. Это весьма общий класс уравнений, в которых искомой является некоторая функция, а не значения переменных. Функциональными уравнениями, по существу, являются дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, уравнения в конечных разностях, однако само название „функциональные уравнения“ обычно не относят к уравнениям этих типов. Под функциональными уравнениями в узком смысле слова понимают уравнения, в которых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Решения функционального уравнения могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящими от произвольных параметров или произвольных функций.

Одно из простейших функциональных уравнений — это уравнение Коши $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Его непрерывные решения имеют вид $f(x) = C \cdot x$, где C — произвольная константа.

Также одним из видов функциональных уравнений является рекуррентное соотношение, содержащее неизвестную функцию от целочисленных переменных и оператор сдвига.

Даже свойства коммутативности и ассоциативности суть не что иное как функциональные уравнения. В привычной всем записи эти законы выглядят следующим образом:

$$a \circ b = b \circ a, \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

где $\circ$ — символ некоторой бинарной операции. Но если представить эту операцию в эквивалентном виде $a \circ b = f(a, b)$, то получится как раз то, что обычно называют функциональным уравнением:

$$f(a, b) = f(b, a), \quad f\big(f(a, b), c\big) = f\big(a, f(b, c)\big).$$

Этот пример показывает, что функциональные уравнения можно также рассматривать как выражение некоторого свойства, характеризующего то или иное множество функций. Так, для периодических с периодом π функций — это $f(x + \pi) = f(x)$, а для четных функций — $f(x) = f(-x)$.

В теории аналитических функций функциональные уравнения часто применяются для введения новых классов функций. Например, автоморфные функции описываются функциональными уравнениями вида $f(s_a z) = f(z)$, где s_a есть элемент некоторой счетной подгруппы группы дробно-линейных преобразований комплексной плоскости, двоякопериодические функции — парой функциональных уравнений $f(z+a) = f(z)$ и $f(z+b) = f(z)$.

Постановка задач математической физики заключается в построении математических моделей, описывающих основные закономерности изучаемого класса физических явлений. Такая постановка состоит в выводе функциональных уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных или алгебраических), которым удовлетворяют величины, характеризующие физический процесс.

Обобщая вышеизложенное, можно сказать, что функциональные уравнения применяются практически во всех разделах математики: от теории множеств и общей (универсальной) алгебры до сугубо прикладных направлений математической физики. Особенно часто системы функциональных уравнений используются в разделах математики, включающих теории функций той или иной природы.

Если же обратиться к дискретной математике, то можно увидеть, что целые теории строятся и развиваются на базе подходящих языков функциональных уравнений. Так, одним из первых определений рекурсивных функций в теории алгоритмов стало эрбран-геделевское определение, основанное на решениях систем функциональных уравнений специального вида[1]. Системы канонических уравнений в теории автоматов представляют собой основной инструмент как для задания и изучения собственно конечно-автоматных функций, так и для исследования разнообразных их обобщений[2,3,4].

В теории булевых функций и теории функций многозначной логики функциональные уравнения представлены также достаточно широко. Укажем лишь три „хрестоматийных“ примера. Все линейные булевы функции, зависящие от n переменных, могут быть определены как решения функционального уравнения

$$\varphi(x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n) \oplus \varphi(0, \ldots, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \oplus \varphi(y_1, \ldots, y_n),$$

где 0 и $\oplus$ суть заданные функциональные константы ноль и сложение по модулю два. Все монотонные булевы функции от n переменных определяются функциональным уравнением

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \varphi(x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n) = \varphi(x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n),$$

[1]Клини С. К. *Введение в метаматематику.* М.: ИЛ, 1957.
[2]Бардзинь Я. М., Трахтенброт Б. А. *Конечные автоматы (поведение и синтез).* М.: Наука, 1970.
[3]Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. *Введение в теорию конечных автоматов.* М.: Физматгиз, 1962.
[4]Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов.* М.: Наука, 1986.

а все самодвойственные булевы функции от n переменных — уравнением

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\bar{\varphi}(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n).$$

Также подобные примеры можно найти в различных работах, касающихся, в частности, замкнутых классов булевых функций[5,6,7,8,9,10,11].

В названных выше разделах дискретной математики функциональные уравнения применяются чаще всего для построения разложений различных типов, для исследования сложности реализации функций в разнообразных базисах (к примеру, оценка глубины формул и схем), в вопросах надежности и контроля управляющих систем, а также в ряде других направлений. Вместе с тем следует особо отметить, что, несмотря на широкое использование уравнений и систем функциональных уравнений, систематического исследования решений систем функциональных уравнений в рамках теорий булевых функций и функций многозначной логики не проводилось.

Цели диссертации:

- исследовать множества решений систем функциональных уравнений;
- изучить зависимость решений систем функциональных уравнений от функциональных констант, используемых в уравнениях;
- оценить сложность поиска решения системы функциональных уравнений;
- построить классификацию функций многозначной логики на основе функциональных уравнений.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. В данной работе впервые систематически исследованы решения систем функциональных уравнений в рамках теорий булевых функций и

[5] *Избранные вопросы теории булевых функций.* Под редакцией Винокурова С. Ф. и Перязева Н. А. М.: Физматлит, 2001.

[6] Гаврилов Г. П. *Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста.* Алгебра и логика. 1984. Т. 23, вып. 1. С. 88–99.

[7] Марченков С. С. *Замкнутые классы булевых функций.* М.: Физматлит, 2000.

[8] Марченков С. С. *Конечная порождаемость замкнутых классов булевых функций.* Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2005. Т. 12, № 1. С. 101–118.

[9] Угольников А. Б. *О замкнутых классах Поста.* Известия вузов. Математика. 1988. Вып. 7. С. 79–88.

[10] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста.* М.: Наука, 1966.

[11] Kuntzman J. *Algébre de Boole.* Paris: Dunod, 1965.

функций многозначной логики. Предложен новый сильный оператор замыкания, изучены его свойства. Впервые получена нетривиальная нижняя оценка сложности проблемы существования решения систем функциональных булевых уравнений.

Научная и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по теориям булевых функций и функций многозначной логики, в исследованиях классификаций функций многозначной логики. В области функциональных уравнений с дискретными функциями найдена естественная проблема разрешимости с гарантированно высокой сложностью.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории булевых функций и функций многозначной логики, моделирование абстрактных вычислительных устройств формулами.

Публикации и апробирование. Результаты диссертации были представлены на VI Молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16 – 20 апреля 2007 г.), XVII Международной школе-семинаре „Синтез и сложность управляющих систем“ имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.), Восьмой Международной научной конференции „Дискретные модели в теории управляющих систем“ (Москва, 6 – 9 апреля 2009 г.), XVIII Международной школе-семинаре „Синтез и сложность управляющих систем“ имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.), а также докладывались на семинаре кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова „Дискретные функции и сложность алгоритмов“.

Результаты диссертации опубликованы в 8 работах, пять из которых в соавторстве с научным руководителем профессором С. С. Марченковым. Три работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 57 наименований. Общий объем работы — 83 страницы.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обоснование актуальности темы исследований и обзор основных результатов по вопросам, рассматриваемым в диссертации. Кроме того, во введении сформулированы цели диссертации и описана ее структура.

Глава 1 посвящена общим свойствам решений систем функциональных уравнений многозначной логики.

В параграфе 1.1 определяются основные понятия и терминология, принятые при изложении результатов.

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $E_k^n = \underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n}$ — n-ая декартова степень множества E_k. Отображение $f : E_k^n \to E_k$ назовем *n-местной функцией k-значной логики* (в случае $k = 2$ — *булевой функцией*). P_k — множество всех функций k-значной логики (соответственно, P_2 — множество всех булевых функций). Если $Q \subseteq P_k$ и $n \geqslant 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначим множество всех n-местных функций из Q.

Определим язык функциональных уравнений многозначной логики. Предполагаем, что каждая функция из P_k имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n-местных функций из P_k используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем *функциональными константами*. Наряду с функциональными константами рассматриваем *функциональные переменные*, для которых используем символы $\varphi_i^{(n)}$, с областью значений $P_k^{(n)}$. В случае, когда это не приводит к недоразумению, верхние индексы у функциональных переменных будем опускать. Кроме функциональных переменных используем обычные индивидные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений E_k.

Пусть $Q \subseteq P_k$. Определим понятие *терма над Q*: всякая индивидная переменная есть терм над Q; если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n), \quad \varphi_j^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$$

суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q считаем также *функциональными уравнениями над Q*.

Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. Тогда *решением уравнения* $t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_k, которая после замены каждой переменной

$\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество относительно всех входящих в уравнение индивидных переменных. Отметим, что решением уравнения над Q могут быть функции, не входящие в множество Q.

Если Ξ — конечная система уравнений, то *решением системы уравнений* Ξ называем систему функций из P_k, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Иногда будем выделять одну из функциональных переменных системы Ξ, называя ее *главной функциональной переменной* системы Ξ.

Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $F \subseteq P_k^{(n)}$. Говорим, что множество функций F *определяется системой уравнений* Ξ, если F является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$. Наконец, говорим, что множество функций F *определимо* системой уравнений над Q, если существует система уравнений над Q, которая определяет множество F.

В параграфе 1.2 рассматриваются общие вопросы, относящиеся к решениям систем функциональных уравнений многозначной логики: зависимость решений от функциональных констант, возможность построения систем уравнений с заданным единственным решением или заданным множеством решений (в зависимости от свойств этого множества).

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 2$, Q — замкнутый класс функций из P_k и для любого $n \geqslant 1$, любого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ найдутся такие функции $g_1, \ldots, g_n$ из $Q^{(1)} \cup \{x\}$ и такой элемент $b \in E_k$, что*

$$(a_1, \ldots, a_n) = (g_1(b), \ldots, g_n(b)).$$

Тогда для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m) \in Q$ существует система функциональных уравнений над $Q^{(1)}$ с одной функциональной переменной, единственным решением которой служит g.

В дальнейшем нам понадобится *тернарный дискриминатор* p, который определяется следующими соотношениями:

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{ если } x = y, \\ x \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если $a, b \in E_k$ и $a < b$, то пусть

$$\max_{ab}(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), \text{ если } x, y \in \{a, b\}, \\ x \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть π — перестановка на множестве E_k и $f \in P_k$. Функция $f^\pi(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-1}\bigl(f(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))\bigr)$ называется *двойственной* к функции f относительно перестановки π. Функция, двойственная самой себе относительно перестановки π, называется *самодвойственной* относительно перестановки π.

Теорема 2. *Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $F \subseteq P_k^{(n)}$ и $F \neq \emptyset$. Тогда существует система функциональных уравнений с функциональными константами p, $\max_{01}, \max_{02}, \ldots, \max_{k-2,k-1}$, которая определяет множество F.*

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ и F — непустое множество функций из $P_k^{(n)}$, которое для любой перестановки π на множестве E_k наряду с любой функцией f содержит двойственную ей функцию f^π. Тогда существует система функциональных уравнений с единственной функциональной константой p, которая определяет множество F.*

В параграфе 1.3 более подробно исследуются решения функциональных булевых уравнений ввиду существования некоторых отличий от случая функциональных уравнений многозначной логики.

Функция *сохраняет 0* (*сохраняет 1*), если на наборе, состоящем из всех нулей, она принимает значение 0 (соответственно, на наборе, состоящем из всех единиц, она принимает значение 1). Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *самодвойственной*, если справедливо следующее равенство:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n).$$

Пусть T_0, T_1, S суть соответственно классы всех функций, сохраняющих 0, всех функций, сохраняющих 1, и всех самодвойственных функций. Положим

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, \quad S_{01} = S \cap T_{01}.$$

Теорема 4. *Для каждого из классов P_2, T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01} пусть символ Q обозначает соответственно множество функций*

$$\{0,1\}, \quad \{0\}, \quad \{1\}, \quad \{\bar{x}\}, \quad \{\vee, \&\}, \quad \emptyset.$$

Тогда для любой функции g из рассматриваемого класса существует система функциональных булевых уравнений над Q с одной функциональной переменной, единственным решением которой служит функция g.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 1$, $F \subseteq P_2^{(n)}$ и $F \neq \emptyset$. Тогда существует система функциональных булевых уравнений с функциональными константами $\vee$, $\&$ и двумя функциональными переменными, которая определяет множество F.*

Теорема 6. *Пусть $n \geqslant 1$ и F — непустое подмножество множества $P_2^{(n)}$, которое наряду с любой функцией содержит двойственную ей функцию. Тогда существует система функциональных булевых уравнений с двумя функциональными переменными и без функциональных констант, которая определяет множество F.*

Во второй главе на множестве функций многозначной логики вводится сильный оператор SFE-замыкания, основывающийся на системах функциональных уравнений, который существенно отличается от известных сильных операторов замыкания как по способу задания, так и по порождаемым классификациям функций многозначных логик. По-видимому, оператор SFE-замыкания является наиболее сильным из известных операторов замыкания. В частности, в классе P_2 булевых функций образуется лишь два SFE-замкнутых класса: сам класс P_2 и класс S самодвойственных функций.

В параграфе 2.1 для введенного оператора сильного замыкания на множестве функций многозначной логики строятся некоторые SFE-полные системы функций, доказывается SFE-замкнутость классов функций определенного типа, конечность числа SFE-замкнутых классов в любой многозначной логике, а также находятся все SFE-замкнутые классы множества P_2 всех булевых функций.

Определим оператор SFE-замыкания. Пусть $Q \subseteq P_k$. *Замыканием множества Q относительно систем функциональных уравнений* (коротко SFE-*замыканием*) назовем множество всех тех функций из P_k, которые могут быть получены как единственное решение некоторой системы функциональных уравнений над Q. SFE-замыкание множества Q обозначим через SFE$[Q]$. Множество Q назовем SFE-замкнутым, если $Q = \mathrm{SFE}[Q]$. Понятия SFE-*полноты*, SFE-*предполноты* и SFE-*порождающей системы* вводятся по аналогии с соответствующими понятиями для операции суперпозиции.

Пусть для $i \in E_k$

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = i, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 7. *Справедливы следующие равенства:*

1. $\mathrm{SFE}[0, 1, \ldots, k-1] = P_k$ $(k \geqslant 2)$.

2. *Для любого $s \in E_k$ имеет место* $\mathrm{SFE}[0, 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k-1] = P_k$ $(k \geqslant 3)$.

3. $\mathrm{SFE}[j_0, j_1, \ldots, j_{k-1}] = P_k$ $(k \geqslant 3)$.

4. Для любого $s \in E_k$ имеет место $\mathrm{SFE}[j_0, j_1, \ldots, j_{s-1}, j_{s+1}, \ldots, j_{k-1}] = P_k$ *($k \geqslant 3$).*

Отметим, что вместо функций $j_0(x), \ldots, j_{k-1}(x)$ в четвертом пункте теоремы 7 можно использовать функции

$$f_{ijr}(x) = \begin{cases} j, & \text{если } x = i, \\ r & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где j, r — различны, i, j, $r \in E_k$.

Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — *предикат* на множестве E_k, то есть отображение $\rho : E_k^m \to \{T,\ F\}$, где T, F — истинностные значения „истина“ и „ложь“. Набор $(a_1, \ldots, a_m)$ из E_k^m *удовлетворяет предикату* ρ, если $\rho(a_1, \ldots, a_m) = T$.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ *сохраняет предикат* ρ, если для любых n наборов $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$, удовлетворяющих предикату ρ, набор $\big(f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})\big)$ также удовлетворяет предикату ρ.

Обозначим через $\mathrm{Pol}(\rho)$ множество всех функций из P_k, сохраняющих предикат ρ.

Напомним[12], что каждый предполный в P_k класс определяется (в смысле функтора Pol) предикатом одного из шести семейств **P**, **O**, **L**, **E**, **C**, **B**. При этом семейство **P** состоит из предикатов, которые являются графиками перестановок на E_k, разлагающихся в произведение циклов одной и той же простой длины, а все одноместные предикаты семейства **C** имеют вид $x \in D$, где $\emptyset \neq D \subset E_k$.

Теорема 8. *Пусть Q — предполный в P_k класс, который определяется предикатом одного из семейств* **O**, **L**, **E**, **C**, **B**. *Тогда* $\mathrm{SFE}[Q] = P_k$.

Множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_π. Если G — непустое множество перестановок на E_k, то пусть S_G есть пересечение всех множеств S_π, где $\pi \in G$. Справедливо следующее утверждение:
для любой группы G перестановок на множестве E_k класс S_G является SFE-*замкнутым.*

Теорема 9. *При любом $k \geqslant 2$ любой* SFE-*замкнутый класс функций из P_k* SFE-*порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от k переменных.*

[12] Rosenberg I. G. Ü*ber die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Československe Akad. Věd. Řada Math. Přir. Věd. Praha. 1970. V. 80. S. 3–93.

Следствие. *При любом* $k \geqslant 2$ *число* SFE*-замкнутых классов в* P_k *конечно.*

Теорема 10. *В* P_2 *выполняется равенство* $\mathrm{SFE}[\emptyset] = S$.

Следствие. *В* P_2 *существует всего два* SFE*-замкнутых класса — это класс самодвойственных функций* S *и класс всех булевых функций* P_2.

В параграфе 2.2 на множестве функций трехзначной логики строится полная решетка SFE-замкнутых классов с указанием порождающих функций для каждого класса.

Обозначим через H_3 класс всех тех функций трехзначной логики, которые самодвойственны относительно любых перестановок множества E_3.

Теорема 11. *Имеет место равенство* $\mathrm{SFE}[\emptyset] = H_3$.

Определим следующие предикаты:

$$\begin{array}{ll}
e_a(x) \equiv (x = a), & e_{ab}(x) \equiv (x \in \{a, b\}), \\
\sigma(x, y) \equiv (x + 1 = y), & \sigma_{ab}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \,\&\, \sigma(x, y), \\
\sigma^0(x, y) \equiv (2x = y), & \sigma^0_{ab}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \,\&\, \sigma^0(x, y), \\
\sigma^1(x, y) \equiv (2x + 2 = y), & \sigma^1_{ab}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \,\&\, \sigma^1(x, y), \\
\sigma^2(x, y) \equiv (2x + 1 = y), & \sigma^2_{ab}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\}) \,\&\, \sigma^2(x, y),
\end{array}$$

где $a \in \{0, 1, 2\}$, $ab \in \{01, 02, 12\}$, а сложение и умножение выполняются по модулю 3.

Теорема 12. *Следующие классы функций являются* SFE*-предполными в* P_3:

$$S_{x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma),\ S_{2x} = \mathrm{Pol}(\sigma^0),\ S_{2x+2} = \mathrm{Pol}(\sigma^1),\ S_{2x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma^2).$$

Теорема 13. *Следующие классы функций* SFE*-полны в* P_3:

$$\begin{array}{l}
S^{01}_{x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma_{01}),\ S^{02}_{x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma_{02}),\ S^{12}_{x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma_{12}), \\
S^{01}_{2x} = \mathrm{Pol}(\sigma^0_{01}),\ S^{01}_{2x+2} = \mathrm{Pol}(\sigma^1_{01}),\ S^{02}_{2x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma^2_{02}), \\
S^{12}_{2x} = \mathrm{Pol}(\sigma^0_{12}),\ S^{02}_{2x+2} = \mathrm{Pol}(\sigma^1_{02}),\ S^{01}_{2x+1} = \mathrm{Pol}(\sigma^2_{01}).
\end{array}$$

Теорема 14. $S_{x+1} = \mathrm{SFE}[x + 1]$, $S_{2x} = \mathrm{SFE}[2x]$, $S_{2x+2} = \mathrm{SFE}[2x + 2]$ *и* $S_{2x+1} = \mathrm{SFE}[2x + 1]$.

Теорема 15. *Пусть*

$$R = \mathrm{Pol}(e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{02}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^1_{12}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}, \sigma^2_{12}).$$

Тогда $\mathrm{SFE}[R] = P_3$.

Следствие. *В P_3 существует ровно четыре* SFE-*предполных класса:* S_{x+1}, S_{2x}, S_{2x+2}, S_{2x+1}.

Теорема 16. *Класс H_3* SFE-*предполон в классах* S_{x+1}, S_{2x}, S_{2x+2}, S_{2x+1}.

Следствие. *В P_3 существует ровно шесть* SFE-*замкнутых классов:*

$$P_3,\ S_{x+1},\ S_{2x},\ S_{2x+2},\ S_{2x+1},\ H_3.$$

В третьей главе рассматриваются системы функциональных булевых уравнений с булевыми функциями-константами 0 и 1 в качестве функциональных констант и проблема выполнимости для них, которая состоит в следующем: существуют ли булевы функции, удовлетворяющие данному функциональному уравнению. Во всех случаях разрешимых проблем выполнимости существует тривиальный алгоритм решения проблемы выполнимости, перебирающий все возможные значения входящих в формулу переменных и вычисляющий соответствующие значения данной формулы. Такой переборный алгоритм предоставляет достаточно грубую верхнюю оценку временной сложности решения проблемы распознавания выполнимости. Наиболее трудной задачей, как правило, является установление нетривиальной нижней оценки временной сложности решения упомянутой проблемы. Для получения нижних оценок используется моделирование абстрактных вычислительных устройств формулами рассматриваемого типа. Величина нижней оценки при этом может существенно зависеть как от выбранных вычислительных устройств, так и от способа моделирования вычислений на этих устройствах. Чаще всего в качестве абстрактного вычислительного устройства используются различные варианты машин Тьюринга (например, с ограничениями на время или зону работы), а моделирование состоит в описании с помощью формул процесса вычисления на этих машинах.

Будем говорить, что данные значения всех функциональных переменных, входящих в систему функциональных булевых уравнений, *выполняют* эту систему, если эти значения функциональных переменных принадлежат множеству решений данной системы. Конечная система уравнений является *выполнимой*, если на множестве всех булевых функций существуют значения всех функциональных переменных, которые выполняют эту систему.

Для языка функциональных уравнений сформулируем следующую алгоритмическую проблему: *по произвольной конечной системе уравнений выяснить, является ли она выполнимой.*

В параграфе 3.1 приводится верхняя оценка временной сложности решения этой проблемы. Если l — длина кода системы функциональных булевых уравнений, то существует недетерминированная процедура, которая по коду системы проверяет ее выполнимость за время

$$\left(\frac{l \cdot 2^l}{\log_2 l}\right)^2.$$

Детерминизация этой процедуры приводит к экспоненциальному увеличению времени.

В параграфе 3.2 приводится нижняя оценка временной сложности решения проблемы выполнимости с использованием конечных недетерминированных однородных структур[13]. По произвольной конечной недетерминированной однородной структуре эффективно строится система функциональных булевых уравнений $\mathcal{T}$, которая выполнима в том и только том случае, когда однородная структура преобразует начальную конфигурацию в заключительную. Тем самым сложность проверки выполнимости системы уравнений $\mathcal{T}$ оценивается снизу сложностью преобразования начальной конфигурации однородной структуры в заключительную и сложностью построения системы $\mathcal{T}$ по однородной структуре.

Однородная структура M_m, состоящая из m копий некоторого недетерминированного автомата A, *допускает* конфигурацию, если она способна преобразовать ее в заключительную конфигурацию. Множество всех конфигураций, допускаемых однородной структурой M_m, обозначим через $\mathbf{Rec}(M_m)$. Пусть

$$\mathbf{R}(A) = \bigcup_{m \geqslant 1} \mathbf{Rec}(M_m).$$

Теорема 17. *Существует алгоритм временной сложности $O(m \cdot \log m)$, который для любого недетерминированного автомата A сводит проблему принадлежности конфигурации множеству $\mathbf{R}(A)$ к проблеме выполнимости некоторой системы функциональных булевых уравнений.*

Следствие. *Нижняя оценка временной сложности недетерминированного распознавания выполнимости системы функциональных булевых уравнений на одноленточной машине Тьюринга, работающей с линейной зоной, по порядку не меньше $d^{\frac{l}{\log_2 l}}$, где l — длина входа, $d > 1$.*

[13]Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. *Основы теории однородных структур.* М.: Наука, 1990.

Основные результаты диссертации

1. Для заранее заданного класса A функций многозначной логики определена система функциональных уравнений с заранее заданным единственным решением из A, набор функциональных констант в которой определяется классом A.

2. Построены системы функциональных уравнений с заранее заданными множествами решений, в которых наборы используемых функциональных констант определяются свойствами двойственности данных множеств решений.

3. Введен оператор SFE-замыкания, определяемый на основе систем функциональных уравнений, выявлены его основные свойства, построена полная решетка SFE-замкнутых классов функций трехзначной логики.

4. Получены верхняя и нижняя оценки сложности решения проблемы выполнимости для систем функциональных булевых уравнений, доказана невозможность решения этой проблемы существенно проще, чем непосредственным перебором.

Публикации по теме диссертации

1. Марченков С. С., Федорова В. С. *О решениях систем функциональных булевых уравнений* // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 6. С. 48–57.

2. Марченков С. С., Федорова В. С. *О решениях систем функциональных булевых уравнений* // Материалы XVII Международной школы-семинара „Синтез и сложность управляющих систем“ имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.), изд-во Института математики, Новосибирск 2008. С. 108–113.

3. Марченков С. С., Федорова В. С. *О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики* // Доклады РАН. 2009. Т. 426, № 4. С. 448–449.

4. Марченков С. С., Федорова В. С. *О свойствах решений систем функциональных уравнений многозначной логики* // Труды VIII Международной конференции „Дискретные модели в теории управляющих систем“ (Москва, 6–9 апреля 2009 г.), издательский отдел факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, Москва, 2009. С. 210–213.

5. Марченков С. С., Федорова В. С. *Решения систем функциональных уравнений многозначной логики* // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 29–33.

6. Федорова В. С. *О сложности выполнимости системы функциональных булевых уравнений* // Материалы XVIII Международной школы-семинара „Синтез и сложность управляющих систем“ имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.), изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2009. С. 84–88.

7. Федорова В. С. *Сложность проблемы выполнимости для одного языка с функциональными булевыми переменными* // Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 апреля 2007 г.), часть 3. Изд-во ИПМ РАН, Москва, 2007. С. 17–23.

8. Федорова В. С. *SFE-замкнутые классы трехзначной логики* // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, 2010, вып. 7. Москва, издательский отдел факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова. С. 23–33.