Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

ГЕРАСИМОВ Михаил Юрьевич

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНО АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Специальность 01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2010

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Виктор Макарович Круглов.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Григорий Иванович Ивченко;
кандидат физико-математических наук, доцент
Алексей Павлович Шашкин.

Ведущая организация:
НИИ математики и механики имени Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 г. в 11.00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на портале ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова http://cs.msu.su в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан ____ ноября 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н.П. Трифонов

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации исследуются условия применимости закона больших чисел в слабой и усиленной формах к отрицательно ассоциированным случайным величинам. Понятие отрицательной ассоциированности представляет собой одну из разновидностей зависимости случайных величин, наследующем некоторые черты понятия независимости случайных величин. Оно является частным случаем общего понятия ассоциированности случайных величин. С основными свойствами ассоциированных случайных величин можно познакомиться по монографии А.В. Булинского и А.П. Шашкина[1]. Там же приведены основные вероятностные закономерности для ассоциированных случайных величин.

Понятие ассоциированных случайных величин появилось в связи с тем, что в ряде задач теоретического и прикладного характера случайные величины обладают определенными специфическими свойствами. Понятие ассоциированности случайных величин играет объединяющую роль в том смысле, что известные трудно доказуемые утверждения могут быть доказаны универсальным методом меньшими усилиями.

Понятия положительной и отрицательной ассоциированности введены в статьях Дж. Изари, Ф. Прошана и Д. Уолкапа[2], К. Жоаг-Дева и Ф. Прошана[3], К. Алама и К. Саксены[4]. Число публикаций об ассоциированных случайных величинах огромно. Например, в упомянутой монографии А.В. Булинского и А.П. Шашкина перечислено свыше четырех сотен публикаций. Пристальное внимание специалистов многих стран к ассоциированным случайным величинам делает актуальными систематические исследования на эту тему. Мы сосредоточим наше вни-

[1]Булинский А.В., Шашкин А.П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[2]Esary J., Proschan F., Walkup D. Association of random variables with applications // Annals of Mathematical Statistics. — 1967. — Vol. 11. — Pp. 1466–1474.

[3]Joag-Dev K., Proschan F. Negative association of random variables with applications // Annals of Mathematical Statistics. — 1983. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 286–295.

[4]Alam K., Saxena K.M.L. Positive dependence in multivariate distributions // Commun. Stat. Theory Methods A. — 1981. — Vol. 10. — Pp. 1183–1196.

мание на отрицательно ассоциированных случайных величинах.

Такие случайные величины, как было сказано выше, наследуют ряд свойств независимых случайных величин. Это обстоятельство позволяет предположить, что основные вероятностные закономерности, справедливые для сумм независимых случайных величин, имеют свои аналоги для отрицательно ассоциированных случайных величин. Естественно, что эта аналогия не может быть полной. Например, центральная предельная теорема для отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями может не выполняться. Напомним, что для независимых случайных величин она справедлива и известна под названием центральной предельной теоремы Леви. В диссертации доказано, что закон больших чисел в слабой и усиленной формах применим к отрицательно ассоциированным случайным величинам, если он применим к независимым случайным величинам с одинаковыми маргинальными распределениями, более точно, если выполнены классические условия применимости усиленных законов больших чисел. В ряде случаев классические условия являются необходимыми и достаточными условиями применимости законов больших чисел к отрицательно ассоциированным случайным величинам.

Цель работы

Исследовать условия применимости закона больших чисел в слабой и усиленной формах к отрицательно ассоциированным случайным величинам.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказаны экспоненциальные неравенства для максимальных сумм ограниченных отрицательно ассоциированных случайных величин.

2. Доказано, что слабый закон больших чисел применим к отрицательно ассоциированным случайным величинам, если он выполняется для независимых случайных величин с одинаковыми маргинальными распределениями. Найден критерий применимости слабого закона больших чисел к максимальным суммам отрицательно ассоциированных случайных величин.
3. Доказано, что многие критерии применимости усиленного закона больших чисел для независимых случайных величин применимы к отрицательно ассоциированным случайным величинам.

Методы исследования

В работе использованы аналитические методы математического и функционального анализа, неравенства и предельные теоремы теории вероятностей, а также оценки вероятностей больших уклонений для максимальных сумм отрицательно ассоциированных случайных величин.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Основная значимость работы состоит в распространении законов больших чисел для независимых случайных величин на класс зависимых случайных величин.

Апробация работы и публикации

По теме диссертации опубликовано 3 статьи [1] – [3] в журналах, рекомендуемых ВАК. Статьи принадлежат единолично автору диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова «Теория риска и смежные вопросы» на факультете вычислительной математики и кибернетики (руководители: профессор В.Е. Бенинг, профессор В.Ю. Королев), «Ассимптотический анализ случайных процессов и полей» на механико-математическом факультете (руководители: профессор А.В. Булиниский, доцент А.П. Шашкин) и на заседании кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести разделов и списка цитируемой литературы, насчитывающего 54 наименования. Общий объем диссертации составляет 124 страницы.

2 Краткое содержание диссертации

Вступительная часть рассматривает общие сведения о теме исследования, подчеркивает актуальность диссертационной работы, упоминает недавно вышедшую монографию об ассоциированных случайных величинах, в которой содержится обзор асимптотических утверждений для сумм ассоциированных случайных величин.

Раздел 1 (*Отрицательно ассоциированные случайные величины*) содержит необходимые сведения об отрицательно ассоциированных случайных величинах. Все они известны специалистам. Часть утверждений приведена в более общей форме, даны новые доказательства некоторых теорем, а также приведены четыре характеризации отрицательной ассоциированности двух случайных величин, две из которых ранее никем не отмечались.

Раздел 2 (*Построение отрицательно ассоциированных случайных величин*) посвящен построению отрицательно ассоциированных случайных величин. Основной целью раздела является демонстрация практического применения «другого неравенства» Чебышева[5]. Это название используется для того, чтобы отличить его от известного неравенства Чебышева об оценке вероятности. «Другое» неравенство, открытое П.Л. Чебышевым в 1883 году, описывает экстремальные значения

[5] Чебышев П.Л. О средних величинах, Полн. собр. соч. — М.–Л., 1947. — Т. 2.

интеграла от произведения монотонных функций. Мы используем дискретный аналог «другого» неравенства Чебышева. Оказывается, что его применение значительно упрощает трудные доказательства известных утверждений, связанных с построением отрицательно ассоциированных случайных величин.

Раздел 3 (*Неравенства для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин*) содержит ряд неравенств, которые играют принципиальную роль во всем последующем изложении. В начале предлагается доказательство теоремы К.М. Шао[6], которое отличается от оригинального рядом деталей.

Приведенная ниже теорема 3.4 содержит новые экспоненциальные неравенства для максимальных сумм ограниченных отрицательно ассоциированных случайных величин. По своей структуре они напоминают классические экспоненциальные неравенства Колмогорова[7], Прохорова[8], Нагаева[9], Фука–Нагаева[10], Хеффдинга[11]и др. для сумм независимых случайных величин.

Теорема 3.4. *Если отрицательно ассоциированные случайные величины* $X_1, \ldots, X_n$ *ограничены числом* $c > 0$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| > x\right\} \leqslant \min\left\{2e^{\frac{x}{c}-\frac{x}{c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{A_{n,\gamma}}+1\right)}, e^{\frac{x}{c}-\frac{x}{2c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{A_{n,\gamma}}+1\right)}\right\} \qquad (1)$$

[6] Shao Q.M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables // Journal of Theoretical Probability. — 2000. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 343–356.

[7] Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986.

[8] Прохоров Ю.В. Одна экстремальная задача теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. — 1959. — Т. IV, № 2. — С. 211–214.

[9] Нагаев С.В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. — 1965. — Т. X, № 2. — С. 231–254.

[10] Фук Д.Х., Нагаев С.В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. — 1971. — Т. XVI, № 4. — С. 660–675.

[11] Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // Journal of the American Statistical Association. — 1963. — Vol. 58, no. 301. — Pp. 13–30.

для любых $\gamma \in (0,1]$ *и* $x > 0$,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k - \mathsf{E}S_k| > x\right\}$$
$$\leqslant \frac{4}{1+\left(1+\frac{xc^{\gamma-1}}{B_{n,\gamma}}\right)^{-\frac{2x}{c}}}\, e^{\frac{x}{2^{\gamma-1}c}-\frac{x}{2c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{B_{n,\gamma}}+1\right)} \tag{2}$$

для любых $\gamma \in [1,2]$ *и* $x > 0$.

Неравенства (1) и (2) можно рассматривать как обобщения и усиления классических неравенств. Правые части неравенств (1) и (2) имеют одинаковый порядок убывания с правыми частями классических неравенств при неограниченном увеличении аргумента. Неравенство (1) имеет определенное преимущество перед классическими неравенствами. Именно, классические неравенства дают неприемлемую оценку $\mathsf{P}\{|S_n| \geqslant 0\} \leqslant 2$. Неравенство (1) дает правильную оценку $\mathsf{P}\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant 0\right\} \leqslant 1$. Здесь $S_k = X_1 + \dots + X_k$ — сумма случайных величин.

Идея доказательства неравенства (1) и (2) давно известна и состоит в минимизации по $h > 0$ при фиксированном $x > 0$ правой части в неравенстве Маркова

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant x\right\} \leqslant e^{-hx}\mathsf{E}e^{h\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|}.$$

При доказательстве неравенства (2) мы исходим из равенства

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k - \mathsf{E}S_k| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{1}{\cosh x}\mathsf{E}\cosh\left(h\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\right).$$

Использование гиперболического косинуса имеет некоторые преимущества. В ряде случаев[12] этот прием приводит к неулучшаемым неравенствам.

Теорема 3.5 содержит два неравенства для максимальных сумм отрицательно ассоциированных величин. По своей структуре они напо-

[12] Antonov S.N., Kruglov V.M. Sharpened versions of a Kolmogorov's inequality // Statstics and Probability Letters. — 2010. — Vol. 80. — Pp. 155–160.

минают неравенства Фука–Нагаева[10] для сумм независимых случайных величин.

Теорема 3.5. *Пусть даны отрицательно ассоциированные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$. Для любых $x > 0$ и $c > 0$ справедливы следующие неравенства*

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| > x\right\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k| > c\right\} + \min\left\{2e^{\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{A'_{n,\gamma}}+1\right)}, e^{\frac{x}{c} - \frac{x}{2c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{A'_{n,\gamma}}+1\right)}\right\}$$

для $\gamma \in (0,1]$,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k - \mathsf{E}T_k| > x\right\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k| > c\right\} + \frac{4}{1+\left(1+\frac{xc^{\gamma-1}}{B'_{n,\gamma}}\right)^{-\frac{2x}{c}}}\, e^{\frac{x}{2^{\gamma-1}c} - \frac{x}{2c}\ln\left(\frac{xc^{\gamma-1}}{B'_{n,\gamma}}+1\right)}$$

для $\gamma \in [1,2]$.

Раздел 4 (*Закон больших чисел*) посвящен доказательству (слабого) закона больших чисел для отрицательно ассоциированных случайных величин. Его история представлена в монографии Я. Бернулли[13]. Мы трактуем закон больших чисел в рамках общей теории слабой сходимости вероятностных распределений, следуя А.Н. Колмогорову[7] и монографиям Б.В. Гнеденко и А.Н. Комогорова[14], В.В. Петрова[15], П. Ревеза[16].

Теоремы 4.2 и 4.3 являются обобщениями в части достаточности классических законов больших чисел для независимых случайных величин. Доказательство основано на связи между моментами для сумм независимых и отрицательно ассоциированных случайных величин с

[13]Бернулли Я. О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986.

[14]Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.: Гостехиздат, 1949.

[15]Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987.

[16]Révész P. The law of large numbers. — Budapest: Akadémia Kiadó, 1967.

общими маргинальными распределениями.

Теорема 4.2. *Пусть дана последовательность серий* $\{X_{n,k}, k=1,\ldots,k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *попарно отрицательно ассоциированных в каждой серии случайных величин. Обозначим* $m_{n,k}$ *медиану случайной величины* $X_{n,k}$. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\left\{|X_{n,k} - m_{n,k}| > 1\right\} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left(|X_{n,k} - m_{n,k}|^2 I_{\{|X_{n,k}-m_{n,k}|\leqslant 1\}}\right) = 0, \tag{4}$$

то, последовательность серий

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} - A_n\right| > \varepsilon\right\} = 0,\ \forall \varepsilon > 0,$$

подчиняется закону больших чисел с центрирующими постоянными

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left(\mathsf{E}\left((X_{n,k} - m_{n,k}) I_{\{|X_{n,k}-m_{n,k}|\leqslant 1\}}\right) + m_{n,k}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4.2 допускает существенное усиление для отрицательно ассоциированных случайных величин.

Теорема 4.3. *Пусть дана последовательность серий* $\{X_{n,k}, k=1,\ldots,k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *отрицательно ассоциированных в каждой серии случайных величин. Если выполнены условия* (3) *и* (4), *то для любого* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant k_n} \left|\sum_{k=1}^{m} (X_{n,k} - A_m)\right| > \varepsilon\right\} = 0, \tag{5}$$

где $A_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\mathsf{E}\left((X_{n,k} - m_{n,k}) I_{\{|X_{n,k}-m_{n,k}|\leqslant 1\}}\right) + m_{n,k}\right)$.

Если выполняется условие (5), *то справедливо* (3).

Теорема 4.6. *Пусть даны последовательности* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *и* $\{B_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных случайных величин и положительных чисел. Если выполняется* *условие* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\mathsf{E}\frac{(X_k-m_k)^2}{B_n^2+(X_k-m_k)^2}=0$, *то для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-A_{n,m})\right|>\varepsilon B_n\right\}=0,$$

где $A_{n,m}=\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\mathsf{E}\left((X_k-m_k)I_{\{|X_k-m_k|\leqslant B_n\}}\right)+m_k\right)$.

Следующая теорема имеет своим предшественником теорему Колмогорова[7].

Теорема 4.8. *Если последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных случайных величин с конечными математическими ожиданиями удовлетворяет условиям*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{|X_k-\mathsf{E}X_k|>n\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}\mathsf{E}\left((X_k-\mathsf{E}X_k)I_{\{|X_k-\mathsf{E}X_k|\leqslant n\}}\right)\right|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left(|X_k-\mathsf{E}X_k|^2 I_{\{|X_k-\mathsf{E}X_k|\leqslant n\}}\right)=0,$$

то для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-\mathsf{E}X_k)\right|>\varepsilon n\right\}=0.$$

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы Хинчина[17] для независимых случайных величин на попарно отрицательно ассоциированные случайные величины.

Теорема 4.9. *Любая последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *попарно отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями подчиняется закону больших чисел:*

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathsf{E}X_k)\right|>\varepsilon n\right\}=0,\quad\forall\varepsilon>0.$$

[17] Khinchin A.Ya. Sur la loi forte des grands nombres // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris. — 1928. — Vol. 186. — Pp. 285–287.

Теорема 4.10 существенно усиливает теорему 4.9 для отрицательно ассоциированных случайных величин и является новой.

Теорема 4.10. *Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{E}\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-\mathsf{E}X_k)\right|\right)=0.$$

Следующие две теоремы имеют своим источником знаменитый критерий Колмогорова[7] о слабом законе больших чисел, который мы сначала обобщаем в части достаточности.

Теорема 4.11. *Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ попарно отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин. Если*

$$\lim_{n\to\infty} n\mathsf{P}\{|X_1|>n\}=0, \tag{6}$$

то, для любого $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mathsf{E}\left(X_1 I_{\{|X_1|\leqslant n\}}\right)\right|>\varepsilon n\right\}=0.$$

Теорема 4.12 существенно усиливает теорему 4.11 для отрицательно ассоциированных случайных величин и является новой. Таким образом, ее можно рассматривать как аналог закона больших чисел Колмогорова для максимальных сумм отрицательно ассоциированных случайных величин.

Теорема 4.12. *Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин с частичными суммами $S_n=X_1+\cdots+X_n$. Условие* (6) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|S_k-k\mathsf{E}\left(X_1 I_{\{|X_1|\leqslant n\}}\right)\right|>\varepsilon n\right\}=0,\quad \forall\varepsilon>0.$$

Заметим, что большинство теорем данного раздела доказаны для попарно отрицательно ассоциированных случайных величин. Они, в частности, справедливы для попарно независимых случайных величин, так как попарно независимые случайные величины являются попарно отрицательно ассоциированными. Этот факт ранее никем не отмечался.

Раздел 5 (*Усиленный закон больших чисел*) содержит доказательство обобщений классических усиленных законов больших чисел для независимых случайных величин на отрицательно ассоциированные случайные величины. Мы руководствовались идеями А.Н. Колмогорова[7], Ю.В. Прохорова[8,18,19,20] и С.В. Нагаева[21].

Следующая теорема 5.3 содержит в качестве частного случая $b_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, теорему Брунка–Прохорова–Чжуна[22,8,23].

Теорема 5.3. *Пусть даны последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных случайных величин с частичными суммами* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *и неограниченная возрастающая последовательность* $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ *положительных чисел. Если для некоторого* $r > 1$ *ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1}\mathsf{E}|X_n - \mathsf{E}X_n|^{2r}}{b_n^{2r}}, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{b_n^{2r}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2r} \tag{8}$$

сходятся, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{b_n} = 0 \quad \textit{п.в.} \tag{9}$$

[18] Прохоров Ю.В. Об усиленном законе больших чисел // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1960. — Т. XIV, № 6. — С. 523–536.

[19] Прохоров Ю.В. Усиленная устойчивость сумм и неограниченно-делимые распределения // Теория вероятностей и ее применения. — 1958. — Т. III, № 2. — С. 153–165.

[20] Прохоров Ю.В. Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел // Теория вероятностей и ее применения. — 1959. — Т. IV, № 2. — С. 215–220.

[21] Нагаев С.В. О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел // Теория вероятностей и ее применения. — 1972. — Т. XVII, № 4. — С. 609–618.

[22] Brunk H.D. The strong law of large numbers // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15. — Pp. 181–195.

[23] Chung K.L. The strong law pf large numbers // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Statistics and Probability (California, 1950). — 1951. — Pp. 341–352.

Следующая теорема уточняет теорему 5.3. Частный случай теоремы 5.4 для мартингал-разностей, когда последовательность $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}_{n\geqslant 1}$ возрастает, доказана Л. Фазекашем и О. Клесовым[24]. Упомянутая теорема Фазекаша–Клесова представляет собой некоторое обобщение теоремы Чоу[25]. В свою очередь, теорема Чоу является аналогом упомянутой выше теоремы Брунка–Прохорова–Чжуна для мартингал-разностей.

Теорема 5.4. *Если последовательность* $\{\mathsf{E}|X_n - \mathsf{E}X_n|^{2r}\}_{n\geqslant 1}$ *не убывает или для некоторого* $\delta > \frac{r-1}{2r}$ *последовательность* $\left\{\frac{b_n}{n^\delta}\right\}_{n\geqslant 1}$ *не убывает, то сходимость ряда* (7) *влечет сходимость ряда* (8).

Теорема 5.5 является аналогом теоремы Круглова[26] для мартингал-разностей.

Теорема 5.5. *Пусть даны последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных случайных величин и неограниченная возрастающая последовательность* $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ *положительных чисел, удовлетворяющие условию* (7) *для некоторого* $r > 1$. *Предположим, что существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ *такая, что* $\sup\limits_{n\geqslant 1} k_{n+1}k_n^{-1} = d < \infty$ *и* $0 < b = \inf\limits_{n\geqslant 1} b_{k_n} b_{k_{n=1}}^{-1} \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} b_{k_n} b_{k_{n=1}}^{-1} = c < 1$. *Тогда справедливо* (9).

В разделе 5 также доказаны аналоги усиленных законов больших чисел из монографии В.В. Петрова[15] для независимых случайных величин на случай отрицательно ассоциированных случайных величин.

В качестве следствий перечисленных теорем мы получаем обобщения классических теорем Колмогорова и Зигмунда–Марцинкевича для независимых одинаково распределенных случайных величин на случай отрицательно ассоциированных случайных величин. Ранее эти обобще-

[24]Fazekas L., Klesov O.A. A general approach to the strong laws of large numbers // Теория вероятностей и ее применения. — 2000. — Т. 45, № 3. — С. 568–583.

[25]Chow Y.S., Teicher H. Probability theory. — Springer-Verlag, 1988. — 2-nd ed., — P. 345

[26]Круглов В.М. Обобщение усиленного закона больших чисел Брунка–Прохорова // Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — Т. 47, № 2. — С. 347–349.

ния были доказаны другими методами П. Матулой[27], Р.Л. Тейлором и др.[28]

С. Сцéрго и др.[29] построили последовательность попарно независимых случайных величин, которая удовлетворяет условию Колмогорова, но не подчиняется усиленному закону больших чисел. Они также указали достаточные условия, при которых теорема Колмогорова справедлива для попарно независимых случайных величин. Теорема 5.13 является аналогом теоремы из упомянутой статьи[30] для попарно отрицательно ассоциированных случайных величин.

Теорема 5.13. *Пусть дана последовательность попарно отрицательно ассоциированных случайных величин* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}X_n}{n^2} < \infty, \quad \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k| < \infty. \tag{10}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E}X_k) = 0 \quad \textit{п.в.}$$

Теорема 5.14 является аналогом теорем Круглова[31,32] для попарно независимых одинаково распределенных случайных величин. Теорема

[27] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variable // Statist. Probab. Lett. — 1992. — Vol. 15. — Pp. 209–213.

[28] Taylor R.L., Patterson R.F., Bozorgnia A. A strong law of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables // Stochastic Analisis and Applications. — 2002. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 643–656.

[29] Csörgő S., Tandori K., Totik V. On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables // Acta Math. Hungar. — 1983. — Vol. 42, no. 3–4. — Pp. 319–330.

[30] Csörgő S., Tandori K., Totik V. On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables // Acta Math. Hungar. — 1983. — Vol. 42, no. 3–4. — Pp. 319–330.

[31] Kruglov V.M. A strong law of large numbers for pairwise independent identically distributed random variables with infinite means // Stat. Probab. Lett. — 2008. — Vol. 72. — Pp. 890–895.

[32] Круглов В.М. Рост сумм попарно независимых случайных величин с бесконечными средними // Теория вероятностей и ее применения. — 2006. — Т. 51, № 2. — С. 382–385.

Круглова[33], в свою очередь, представляет собой обобщение и уточнение теоремы Феллера[34] о росте сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 5.14. *Пусть даны последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин и последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_{n>1}$. *Обозначим* $T_n = |X_1| + \cdots + |X_n|$. *Если* $\mathsf{E}X_1^- < \infty$, $\mathsf{E}X_1^+ = \infty$ *и* $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{n+1}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{S_n > a_n \ \ \textit{б.ч.}\right\} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{X_n > a_n\right\} = \infty,$$

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{a_n} = 0\right\} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{X_n > a_n\right\} < \infty.$$

Раздел 6 (*О связи между полной сходимостью и центральной предельной теоремой для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин*). Понятие полной сходимости сумм независимых случайных величин было введено П. Хсу и Г. Роббинсоном[35]. Их исследования были продолжены П. Эрдешем[36,37], Ф. Спитцером[38], Л. Баумом и М. Катцем[39]. Последние годы интерес к этой тематике сильно вырос. Наиболее значимые утверждения о полной сходимости для сумм независимых случайных величин были передоказаны для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин, например, Р.Л. Тейлор и

[33] Kruglov V.M. A strong law of large numbers for pairwise independent identically distributed random variables with infinite means // Stat. Probab. Lett. — 2008. — Vol. 72. — Pp. 890–895.

[34] Feller W. A limit theorem for random variables with infinite moments // Amer. J. Math. — 1946. — Vol. 66, no. 2. — Pp. 257–262.

[35] Hsu P.L., Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1947. — Vol. 33. — Pp. 25–31.

[36] Erdös P. On a theorem of Hsu and Robbins // Annals of Mathematical Statistics. — 1949. — Vol. 20. — Pp. 286–291.

[37] Erdös P. Remark on my paper „On a theorem of Hsu and Robbins“ // Annals of Mathematical Statistics. — 1950. — Vol. 21. — P. 138.

[38] Spitzer F. A combinatorial lemma and its application to probability theory // Transaction of the American Mathematical Society. — 1956. — Vol. 82. — Pp. 323–339.

[39] Baum L.E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers // Transaction of the American Mathematical Society. — 1965. — Vol. 120. — Pp. 108–23.

др.[28], В.М. Круглов и др.[40,41,42,43] и цитируемую там литературу.

Полная сходимость сумм случайных величин представляет собой своеобразную форму усиленного закона больших чисел и дает представление о скорости сходимости нормированных центрированных сумм случайных величин к нулю. К. Хейди[44], подытоживая ряд предшествующих исследований, указал на тесную связь между полной сходимостью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями и центральной предельной теоремой Леви. Мы доказываем аналог теоремы Хейди, теорема 6.2, для отрицательно ассоциированных случайных величин. На самом деле, эта аналогия не является полной, так как центральная предельная теорема для отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин может не выполняться.

Теорема 6.2. *Пусть дана последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *отрицательно ассоциированных одинаково распределенных случайных величин. Предположим, что* $0 < \sigma^2 = E(X_1 - EX_1)^2 < \infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{S_n - \mathsf{E}S_n < x\sqrt{n}\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du,$$

для любых $x \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|S_n - \mathsf{E}S_n| > \varepsilon n\} = \sigma^2. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 6.2 основано на теореме Хсу–Роббинса о полной сходимости сумм для отрицательно ассоциированных случай-

[40] Kruglov V.M., Volodin A.I., Hu T.-C. On complete convergence for arrays // Statistics and Probability Letters. — 2006. — Vol. 76. — Pp. 1631–1640.

[41] Kruglov V.M., Volodin A.I. Convergence rates in the law of large numbers for arrays // Probab. and Mathem. Statist. — 2006. — Vol. 1. — Pp. 63–76.

[42] Chen P., Yu N.-C., Liu X., Volodin A.I. On complete convergence for arrays of rowwise negatively associated random variables // Theory of Probability and Its Applications. — 2007. — Vol. 52. — Pp. 393–397.

[43] Kruglov V.M. Complete convergence for maximal sums of negatively associated random variables // Hindawi Publishing Corporation. Journal of Probability and Statistics. — Vol. 2010, Article ID 764043, 17 pages.

[44] Heyde C.C. A Supplement to the Strong Law of Large Numbers // J. Appl. Prob. — 1975. — Vol. 12. — Pp. 173–175.

ных величин. Точнее нам нужны некоторые специальные оценки, которые мы выводим, при доказательстве аналога теоремы Хсу–Роббинса. Наше доказательство основано на экспоненциальном неравенстве (2). Сам аналог теоремы Хсу–Роббинса для отрицательно ассоциированных случайных величин был ранее доказан в ряде публикаций[43,45].

Благодарности

Автор диссертации глубоко признателен своему научному руководителю профессору Виктору Макаровичу Круглову за постановку задачи, постоянное внимание и критические замечания.

3 Список публикаций автора по теме диссертации

1. Герасимов М.Ю. Усиленный закон больших чисел для попарно отрицательно зависимых случайных величин // Вестник Московского Университета. — 2009. — Т. 2. — С. 7–13.
2. Герасимов М.Ю. О полной сходимости сумм отрицательно ассоциированных случайных величин // Вестник Тверского Государственного Университета. — 2010. — Т. 9. — С. 29–42.
3. Герасимов М.Ю. Неравенства для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин // Вестник Тверского Государственного Университета. — 2010. — Т. 14. — С. 5–12.

[45] Su Chun, Qin Yongson. Two limit theorems for NA random variables // Chinese science bulletin. — 1997. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 356–359.