Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский (Приволжский) федеральный университет

На правах рукописи

Новиков Петр Андреевич

Локально наиболее мощные критерии проверки гипотез о параметрах случайных процессов с дискретным временем

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Володин Игорь Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник МИАН имени В. А. Стеклова Гущин Александр Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова Бенинг Владимир Евгеньевич
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова http://www.cmc.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан 22 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Последовательный анализ является основным методом сокращения объема наблюдений при проведении статистического эксперимента. В рамках различения двух гипотез проблема оптимизации объема наблюдений обычно ставится следующим образом. Проверяемые гипотезы разделяются областью безразличия, и рассматривается класс последовательных критериев, гарантирующий заданные ограничения на вероятности ошибок I и II рода. В этом классе ищется критерий, минимизирующий среднее значение объема наблюдений при ряде фиксированных значений тестируемого параметра или минимизирующий наибольшее значение среднего объема наблюдений по всему параметрическому пространству (проблема Кифера-Вейса).

С точки зрения практики существующие последовательные гарантийные критерии обладают двумя недостатками: среднее значение объема выборки при значении параметра в области безразличия может принимать бесконечное значение, выбор области безразличия всегда составляет тяжелую проблему в практических применениях. Естественно было бы убрать область безразличия и ограничить сверху среднее число наблюдений. В связи с этим в диссертации рассматривается следующая постановка проблемы последовательной проверки гипотез. Рассматривается простая нулевая гипотеза $\theta = \theta_0$ при сложной альтернативе, не обязательно отграниченной от θ_0, а также класс последовательных критериев заданного уровня α, средний объем наблюдений которых ограничен сверху заданным числом $\mathscr{N}$. В этом классе ищется локально наиболее мощный критерий – критерий, максимизирующий производную функции мощности в точке θ_0. Естественно, при наличии некоторого монотонного относительно некоторой статистики отношения правдоподобия такой критерий является равномерно наиболее мощным среди всех критериев уровня α с ограниченным средним объемом выборки. *Актуальность* такого рода постановки для задач последовательного различения гипотез впервые, по-видимому, рассматривалась Дж. Эйбрехемом в его диссертации[1] и получила дальнейшее развитие в работе Р. Берка[2]; распространение этих результатов на

[1] Abraham J. K. The local power of sequential tests subject to an expected sample size restriction. – Unpublished Stanford technical report. – 1969.

[2] Berk R. H. Locally most powerful sequential tests. *Annals of Statistics.* – 3. – 1975. – P. 373–381.

последовательно планируемый метод содержится в монографии Н. Шмитца[3]. Во всех цитируемых работах рассматривался только случай наблюдений последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин (простой случайной выборки). В диссертации рассматривается более общий случай проверки гипотез о параметрах случайных процессов с дискретным временем и локально наиболее мощные последовательные критерии строятся при более слабых ограничениях на вероятностную модель. В качестве примеров рассматриваются локально наиболее мощные последовательные критерии для процессов Маркова, процесса авторегрессии AR(1), периодических и конечно-нестационарных процессов с дискретным временем.

Другая проблема, которая рассматривается в диссертации, – это построение локально наиболее мощного критерии проверки той же простой гипотезы, но для многомерного параметра θ, когда класс альтернатив определяется некоторым конусом в параметрическом пространстве с вершиной в точке θ_0. Строятся локально наиболее мощные критерии в особой максиминной постановке: максимизируется производная мощности по направлению наименьшего роста мощности.

Цели диссертационной работы.

1. Характеризация структуры локально наиболее мощного последовательного критерия для случайного процесса с дискретным временем в общем случае. Разработка алгоритма построения такого критерия.

2. Построение локально наиболее мощного последовательного критерия для случайного процесса с дискретным временем в случае независимых наблюдений.

3. Разработка методов построения локально наиболее мощного критерия в случае многомерного параметра.

Общая методика исследований. Основным методом, используемым в диссертации, является метод, впервые примененный Ан. А. Новиковым[4] для характеризации структуры последовательного критерия проверки простой гипотезы при простой альтернативе, идея которого заключается в рассмотрении задачи построения оптимального в том или ином смысле критерия как задачи оптимизации. В диссертации задача построения локально наиболее мощного последовательного

[3]Schmitz N. Optimal sequentially planned decision procedures. Lecture notes in statistics 79. – New York: Springer-Verlag. – 1993.

[4]Novikov A. Optimal sequential tests for two simple hypotheses. *Sequential analysis.* – 2009. – 28(2). – P. 188–217.

критерия (ψ, ϕ) представляет из себя задачу оптимизации с производной функции мощности критерия в точке $\theta = \theta_0$ в качестве целевой функции и ограничениями на средний объем выборки и вероятность ошибки первого рода в качестве ограничений типа неравенств. Для такой задачи составляется «функция Лагранжа» и показывается, что пара (ψ, ϕ), доставляющая минимум «функции Лагранжа», является оптимальной в смысле максимизации производной функции мощности в $\theta = \theta_0$ среди всех пар (ψ', ϕ'), удовлетворяющих указанным ограничениям на средний объем наблюдений и вероятность ошибки первого рода. При этом нахождение пары функций (ψ, ϕ), доставляющей минимум «функции Лагранжа», оказывается возможным без привлечения вариационных методов.

Научная новизна. Основные результаты работы следующие:

1. Получена структура локально наиболее мощного последовательного критерия в общем случае (в случае зависимых наблюдений). Разработан алгоритм построения такого критерия.
2. Построены локально наиболее мощные последовательные критерии для независимых наблюдений и марковских процессов с дискретным временем.
3. Получены неравенства, связывающие производную функции мощности критерия с другими характеристиками критерия: средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки первого рода.
4. Введено понятие критерия, локально максиминного по направлениям, – обобщение понятия локально наиболее мощного критерия на случай многомерного параметра – и получен его вид. Построен асимптотический критерий, локально максимнный по направлениям, и доказано свойство асимптотической оптимальности такого критерия.

В совместной работе [1] соавтору принадлежит постановка задачи. Все остальные результаты работы [1] получены автором самостоятельно. Работа [2] выполнена автором без соавторов.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при построении локально наиболее мощных последовательных критериев. Такие критерии, в свою очередь, могут находить приложения в таких областях, как обработка радиосигналов, обработка изображений, клинических исследованиях фармацевтических препаратов и других областях науки и практики.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались на международной конференции «Prague Stochastics» (2006 г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры математической статистики МГУ под руководством В. Ю. Королева (2009 г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры математической статистики КФУ под руководством И. Н. Володина (2010 г.).

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] и [2].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих семнадцать параграфов, и изложена на ста четырех страницах. Список литературы содержит тридцать девять наименований, включая работы автора.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность выбранной темы, дан обзор литературы по теме диссертации, сформулированы цели, представлены выносимые на защиту научные положения и кратко изложено содержание работы.

Первая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе производится постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – случайный процесс с дискретным временем, такой, что для любого n вектор $X^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет плотность f_θ^n, $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Цель главы – характеризация локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе последовательных критериев с некоторым максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и некоторым уровнем α.

Вводятся следующие условия регулярности

C1) дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 совместной функции плотности f_θ^n для любого n,

C2) дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ функции мощности с конечным средним объемом наблюдений и

C3) существования таких $\gamma > 0$ и $N_0 > 0$, что $E_{\theta_0}(\dot{f}_{\theta_0}^n / f_{\theta_0}^n)^2 \leqslant \gamma n$ для всех $N \geqslant N_0$.

Во втором параграфе для поставленной задачи составляется «функция Лагранжа»

$$L(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + b\alpha(\psi, \phi) - \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi),$$

где $\mathscr{N}(\psi)$ – средний объем наблюдений, $\alpha(\psi, \phi)$ – размер критерия, $\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi)$ – производная в точке $\theta = \theta_0$ функции мощности критерия (ψ, ϕ), и доказывается, что критерий (ψ, ϕ), доставляющий минимум $L(\psi, \phi)$ со средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и размером α, является критерием, максимизирующим производную функции мощности в точке $\theta = \theta_0$ в классе критериев с максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и уровнем α. Для нахождения формы решающего правила ϕ при данном правиле остановки ψ $L(\psi, \phi)$ представляется в виде

$$L(\psi, \phi) = c\mathscr{N}(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^{\psi} \phi_n (b f_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $s_n^{\psi} = (1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{n-1})\psi_n$ – вероятность остановки на n-м этапе, $\dot{f}_{\theta_0}^n$ – производная $f_{\theta_0}^n$ в точке $\theta = \theta_0$, и к интегралу в выражении для $L(\psi, \phi)$ применяется утверждение о том, что минимум интеграла

$$\int (\phi(x) F_1(x) + (1 - \phi(x)) F_2(x)) dx,$$

где $0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1$, равен

$$\int \min\{F_1(x), F_2(x)\} dx$$

и достигается при $\phi = I_{\{F_1 \leqslant F_2\}}$ почти наверное, с $F_1 = s_n^{\psi} \phi_n (b f_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n)$, $F_2 = 0$, что дает форму оптимального решающего правила ϕ_n с критической областью

$$b f_{\theta_0}^n < \dot{f}_{\theta_0}^n.$$

Таким образом, изначальная задача сводится к задаче нахождения правила остановки ψ, минимизирующего

$$L(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^{\psi} (cnf^n + l_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где f^n – функция плотности, по которой считается мат. ожидание момента остановки

$$\mathscr{N}(\psi) = E\tau_{\psi} = \int s_n^{\psi} n f^n dx_1 \dots dx_n,$$

$l_n = \min\{0, b f_{\theta_0}^n - \dot{f}_{\theta_0}^n\}$.

В третьем параграфе рассматривается класс $\mathscr{F}^N$ правил остановки, прекращающих эксперимент на N-м (конечном) этапе с вероятностью 1, – усеченных правил остановки – и в этом классе путем проведения рассуждений, во многом аналогичных рассуждениям второго параграфа для ψ, характеризуется структура правила остановки, минимизирующего $L(\psi)$: момент остановки

$$\tau_\psi = \min\{n:\, l_n < cf^n + \int V_{n+1}^N dx_{n+1}\},$$

где $V_N^N = l_N$,

$$V_n^N = \min\{l_n, cf^n + \int V_{n+1}^N dx_{n+1}\}$$

для $n = N-1,\, N-2, \ldots, 1$.

В четвертом параграфе этот результат обобщается на случай неусеченных правил остановки, когда требуется лишь конечность среднего объема наблюдений: момент остановки

$$\tau_\psi = \min\{n:\, l_n < cf^n + \int V_{n+1} dx_{n+1}\},$$

где $V_n = \lim_{N\to\infty} V_n^N$.

Основной результат первой главы приводится в пятом параграфе. Назовем критерий (ψ, ϕ) регулярным, если выполняется

$$t_n^\psi (V_n - l_n) d\mu^n \to 0 \text{ при} n \to \infty,$$

где $t_n^\psi = (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})$. Справедлива следующая

Теорема 1 *Предположим, что выполнены условия регулярности C1, C2, C3. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что*

$$I_{\{l_n < cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{l_n \leqslant cf^n + \int V_{n+1} d\mu(x_{n+1})\}}(x^{(n)}) \qquad (1)$$

μ^n-почти наверное на $T_n^\psi = \{(x_1, \ldots, x_n):\, t_n^\psi(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$, для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{bf_{\theta_0}^n < \dot f_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{bf_{\theta_0}^n \leqslant \dot f_{\theta_0}^n\}}(x^{(n)}) \qquad (2)$$

μ^n-почти наверное на $S_n^\psi = \{(x_1, \ldots, x_n):\, s_n^\psi(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть (ψ, ϕ) – регулярный критерий с конечным средним объемом наблюдений и пусть $\inf_{\psi'} L(\psi') > -\infty$. Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально *наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с конечным средним объемом наблюдений в том смысле, что*

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{3}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}(\psi') \leqslant \mathscr{N}(\psi). \tag{4}$$

Неравенство (3) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (4).

Если во всех неравенствах в (3) и (4) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ'_n вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (2) (с ϕ'_n вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$

В шестом параграфе в качестве примера строится локально наиболее мощный последовательный критерий для проверки гипотезы относительно параметра условных распределений для марковских процессов и, как для частного случая, для процесса авторегресии AR(1) с неизвестным параметром масштаба. Для марковских процессов теорема 1 остается справедливой с заменой выражения (1) выражением

$$I_{\{b - \dot{f}^n_{\theta_0}/f^n_{\theta_0} \in (A_n(c), B_n(c))\}}(x^{(n)}) \leqslant 1 - \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{b - \dot{f}^n_{\theta_0}/f^n_{\theta_0} \in [A_n(c), B_n(c)]\}}(x^{(n)})$$

для некоторых действительных $A_n(c)$, $B_n(c)$, зависящих от c.

Вторая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе рассматривается постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – случайный процесс с дискретным временем с независимыми значениями, случайная величина X_j имеет плотность $f_{\theta,j}$ для любого j, $\theta \in \Theta$, где Θ – открытое подмножество в R. Цель главы – характеризация локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе последовательных критериев с некоторым максимальным средним объемом наблюдений $\mathscr{N}$ и некоторым уровнем α.

Вводятся следующие условия регулярности

C1') дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 маргинальной функции плотности $f_{\theta,j}$ для любого j,

C2') существования таких $\delta > 0$ и $0 < \gamma_1 < \infty$, что

$$I_j(\theta_0, \theta)/(\theta - \theta_0)^2 \leqslant \gamma_1$$

для всех $j = 1, 2, \dots$ и для всех $|\theta - \theta_0| \leqslant \delta$, где

$$I_j(\theta_0, \theta_1) = E_{\theta_0} \ln f_{\theta_0,j}(X_j)/f_{\theta_1,j}(X_j)$$

– различающая информация по Кульбаку-Лейблеру между распределенями X_j при $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$, $j = 1, 2, \dots$ и

C3') существования такого $\gamma_2 > 0$, что $E_{\theta_0}|\dot{f}_{\theta_0,j}/f_{\theta_0,j}| \leqslant \gamma_2$ для всех $j = 1, 2, \dots$.

Во втором параграфе рассматриваются условия существования производной функции мощности и выводятся неравенства, связывающие эту производную со средним объемом наблюдений и вероятностью ошибки I рода. Информация Кульбака-Лейблера, содержащаяся в наблюдениях процесса $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ до случайного момента остановки, определяемого правилом ψ, определяется как

$$I(\theta_0, \theta; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} s_n^{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} \ln f_{\theta_0,j}/f_{\theta,j} \right).$$

Устанавливаются границы характеристик (среднего объема наблюдений, вероятности ошибки I рода и производной функции мощности): при выполнении условия регулярности C2 для любого последовательного критерия (ψ, ϕ) с конечным средним объемом наблюдений $E_{\theta_0}\tau_{\psi}$ производная его функции мощности в точке $\theta = \theta_0$ существует и справедливо неравенство

$$(\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi))^2 \leqslant 2\gamma_1 \beta_{\theta_0}(\psi, \phi)(1 - \beta_{\theta_0}(\psi, \phi)) E_{\theta_0}\tau_{\psi}.$$

Устанавливается, что при выполнении условий регулярности C1', C2', C3' справедливо равенство

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\theta_0} \left(s_n^{\psi} \phi_n \sum_{j=1}^{n} q_j \right),$$

где $q_j(x_j) = \dot{f}_{\theta_0,j}/f_{\theta_0,j}$.

В третьем параграфе рассматривается класс $\mathscr{F}^N$ усеченных (до этапа N) правил остановки и в этом классе характеризуется структура правила остановки, минимизирующего «функцию Лагранжа»: момент остановки

$$\tau_{\psi} = \min\{n : g(b - z_n) < c + E_{\theta_0} v_{n+1}^N (z - q_n, c)\},$$

где $g(z) = \min\{0, z\}$, $v_N^N(z,c) = g(z)$, $v_n^N(z,c) = \min\{g(z), c + E_{\theta_0} v_n^N(z - q_n, c)\}$ для $n = N, N-1, \ldots, 1$, $z_n = \sum_{j=1}^n \dot{f}_{\theta_0,j}/f_{\theta_0,j}$.

В четвертом параграфе этот результат обобщается на случай неусеченных правил остановки с конечным средним объемом наблюдений: момент остановки

$$\tau_\psi = \min\{n : g(b - z_n) < c + E_{\theta_0} v_{n+1}(z - q_n, c)\},$$

где $v_n = \lim_{N\to\infty} v_n^N$, $N = 1, 2, \ldots$.

Основной результат второй главы приводится в пятом параграфе.

Теорема 2 *Предположим, что выполнены условия регулярности C1' – C3'. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ – любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ такое, что*

$$I_{\{g(b-z_n)<c+r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \leqslant \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{g(b-z_n)\leqslant c+r_n(b-z_n,c)\}}(x^{(n)}) \tag{5}$$

μ^n-почти наверное на $T_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, и пусть решающее правило ϕ такое, что

$$I_{\{z_n>b\}}(x^{(n)}) \leqslant \phi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{z_n\geqslant b\}}(x^{(n)}) \tag{6}$$

μ^n-почти наверное на $S_n^\psi \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть (ψ, ϕ) имеет конечный средний объем наблюдений.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) – локально наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с конечным средним объемом наблюдений в том смысле, что

$$\dot{\beta}_{\theta_0}(\psi, \phi) \geqslant \dot{\beta}_{\theta_0}(\psi', \phi'), \tag{7}$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leqslant \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi') \leqslant \mathscr{N}_{\theta_0}(\psi). \tag{8}$$

Неравенство (7) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (8).

Если во всех неравенствах в (7) и (8) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (5) μ^n-почти наверное на $T_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (с ψ_n' вместо ψ_n), и ϕ' удовлетворяет (6) (с ϕ_n' вместо ϕ_n) μ^n-почти наверное на $S_n^{\psi'} \cap \{f_{\theta_0}^n > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$.

В каждой из областей $\{z \leqslant 0\}$ и $\{z \geqslant 0\}$ существует единственное решение уравнения $g(z) = c + r_n(z, c)$, соответственно $A_n(c) \leqslant 0$ и $B_n(c) \leqslant 0$, и выражение (5 можно представить в более простом виде

$$I_{\{b-z_n \in (A_n(c), B_n(c))\}}(x^{(n)}) \leqslant 1 - \psi_n(x^{(n)}) \leqslant I_{\{b-z_n \in [A_n(c), B_n(c)]\}}(x^{(n)}). \tag{9}$$

Утверждение теоремы 2 остается справедливым при замене формулы (5) формулой (9).

В шестом параграфе в качестве примеров рассматриваются случай «периодических» наблюдений, то есть случай, когда существует такой $T \in \mathrm{N}$, что $f_{\theta,n+T} = f_{\theta,n}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, и случай «конечно-нестационарных» наблюдений, то есть случай, когда $f_{\theta,j} = f_{\theta,j+1}$ для любого j начиная с некоторого k.

Третья глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе производится постановка задачи. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка фиксированного объема n из распределения с плотностью f_θ^n, где $\theta \in \Theta \subset \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ – многомерный параметр. Цель главы – построение локально наиболее мощного критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1 : \theta \in \Theta_1$, где Θ_1 – конус в N-мерном пространстве, $\Theta_1 = \{\theta_0 + tu, \,|\, u \in U,\, t > 0\}$.

Вводится условие регулярности:
C1") дифференцируемости в точке $\theta = \theta_0$ в смысле L_1 совместной функции плотности $f_{\theta_0}^n$.

Во втором параграфе вводится понятие критерия, локально наиболее мощного в направлении, – критерия, максимизирующего производную функции мощности по выбранному направлению u, – и устанавливается, что критическая область такого критерия имеет вид $b f_{\theta_0}^n < u' \dot{f}_{\theta_0}^n$.

В третьем параграфе на основе понятия критерия, локально наиболее мощного в направлении, вводится понятие критерия, локально максиминного по направлениям: для каждого направления u из области альтернативы строится локально наиболее мощный в этом направлении критерий ϕ_u, далее, для любого другого направления v из области альтернативы вычисляется локальная мощность $v' \dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u)$ критерия ϕ_u и находится то направление v, у которого мощность критерия ϕ_u минимальна, а затем ищется направление u^*, которое максимизирует этот минимум мощности, – локально наиболее мощный критерий в этом направлении u^* называется локально максиминным по направлениям критерием:

$$\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_{u^*}) = \sup_{u\in U}\inf_{v\in U} v'\dot{\beta}_{\theta_0}(\phi_u). \tag{10}$$

В четвертом параграфе строится критерий, локально максиминный по направлениям, для проверки гипотезы о среднем значении многомерного нормального (θ, Σ) распределения $\theta = \theta_0$ при области альтернативы Θ_1: такой критерий отклоняет нулевую гипотезу при

$$u^{*\prime}\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) > z_\alpha(nu^{*\prime}\Sigma^{-1}u^*)^{1/2},$$

где u^* определяется из соотношения (10).

В пятом параграфе строится асимптотический локально максиминный по направлениям критерий для локально асимптотически нормальных семейств. Такой критерий имеет ту же форму, что локально максиминный по направлениям критерий для проверки гипотезы о среднем значении нормального распределения, где в качестве матрицы ковариаций Σ выступает информационная матрица Фишера в точке, соответствующей нулевой гипотезе. Доказывается, что такой критерий обладает свойством асимптотической оптимальности в смысле асимптотического превосходства производной функции мощности по любому направлению из области альтернативы такого критерия над аналогичной производной любого другого локально наиболее мощного в любом направлении из области альтернативы критерия асимптотического уровня α.

Список публикаций автора по теме диссертации.

[1] Novikov A., Novikov P. Locally most powerful sequential tests of a simple hypothesis vs. one-sided alternatives. *Journal of Statistical Planning and Inference.* – 2010. – 140(3). – P. 750–765.

[2] Новиков П. А. Локально наиболее мощные последовательные критерии для марковских процессов с дискретным временем. *Теория вероятностей и ее применения.* – 2010. – 55(2). – с. 369–372.