На правах рукописи

Карпович Павел Алексеевич

К-СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗОВ

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре «Математические методы прогнозирования» факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Дьяконов Александр Геннадьевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Сенько Олег Валентинович** кандидат физико-математических наук **Дайняк Александр Борисович**
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита состоится «18» февраля 2011 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.su в разделе «Наука» - «Работа диссертационных советов» - «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «__» _______ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор

Н.П. Трифонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи распознавания образов (классификации) возникают при решении практических проблем во многих областях (экономика, социология, информационные технологии и т.д.). Во второй половине XX века академиком РАН Ю.И. Журавлевым была предложена модель *алгоритмов вычисления оценок* (АВО) для решения задач классификации. Универсальность модели позволяет представлять широкий класс алгоритмов распознавания образов, и большинство известных на данный момент правил классификации могут быть описаны в рамках данной модели. Работы Ю.И. Журавлева стали началом большого количества исследований модели АВО. В первую очередь интерес вызывали вопросы о возможности эффективных алгоритмических реализации моделей. Явная реализация АВО практически невозможна в связи с ее большой вычислительной сложностью. При попытке решить данную проблему появилось два основных направления исследований: получение эффективных формул вычисления оценок (Ю.И. Журавлев, А.А. Алексанян, С.Н. Мирошник, М. Михалевич, В.В. Никифоров, Н.М. Камилов, Ш.Е. Туляганов, И.Б. Гуревич, А.Г. Дьяконов), поиск параметров моделей, при которых возможна эффективная реализация АВО (Ю.И. Журавлев, А.А. Алексанян, А.Г. Дьяконов).

Алгоритм вычисления оценок представляет собой суперпозицию распознающего оператора и решающего правила. Распознающий оператор вычисляет матрицу оценок близости распознаваемых объектов к классам распознавания. Решающее правило осуществляет саму классификацию по данной матрице. Основная сложность при построении эффективных реализаций АВО заключена именно в задаче вычисления оценок близости. Важными параметрами модели АВО являются *функция близости* и *система опорных множеств*. В работах Ю.И. Журавлева приведены примеры функций близости и систем опорных множеств, при которых осуществляется свертка формулы вычисления оценок близости. В работе А.А. Алексаняна и Ю.И. Журавлева показывается, что возможность упрощения формул существенно зависит от выбора системы опорных множеств и предлагается общий подход к изучению задачи об эффективной реализации моделей АВО. Для конкретного класса функций близости А.Г. Дьяконовым были найдены все системы опорных множеств, для которых возможно осуществить свертку определенного вида. При этом актуальными остаются вопросы полного описания систем опорных множеств, при которых допустимы такие упрощения формул для других классов функций близости.

В конце 1970х годов Ю.И. Журавлевым был предложен алгебраический подход к решению задач распознавания образов. Центральным понятием алгебраического подхода является корректность семейств алгоритмов распознавания. На практике оно означает возможность получения любой классификации объектов задачи при помощи алгоритмов семейства. Исследованию вопросов корректности было посвящено множество работ. Членом-корреспондентом РАН К.В. Рудаковым была разработана теория локальных и универсальных ограничений для анализа общих семейств алгоритмов и доказаны критерии корректности. Первые критерии корректности для алгебраических замыканий модели АВО описаны в работах академика РАН В.Л. Матросова. В работах А.Г. Дьяконова устанавливается, что свойство корректности алгебраических замыканий семейства АВО для конкретной задачи эквивалентно отсутствию свойства k-сингулярности у набора системы точек признаковых описаний распознаваемых объектов. Поэтому актуальным является исследование понятия k-сингулярности в рамках алгебраического подхода к распознаванию. Система q точек в конечномерном пространстве называется k-сингулярной, если размерность пространства значений полиномов степени не выше k (с поэлементным умножением) от столбцов матрицы попарных расстояний системы меньше q

Целью работы является:

1. Исследование возможности эффективных реализаций моделей АВО в зависимости от выбора функций близости и системы опорных множеств.
2. Исследование свойства k-сингулярности в рамках алгебраического подхода к распознаванию, получение алгебраических критериев k-сингулярности.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Выделим основные.

- Описан частичный порядок и его свойства для класса *0-эффективных* систем опорных множеств (широкий класс систем опорных множеств, при которых допустима эффективная реализация АВО).
- Доказана NP-полнота задачи поиска контрпримера к свойству *0-эффективности* при дополнительных ограничениях.
- Доказан алгебраический критерий для свойства k-сингулярности.
- Предложен полиномиальный алгоритм разделения системы точек на минимальное число подсистем, каждая их которых не является k-сингулярной.
- Получена оценка минимального числа таких подсистем.

Методика исследования: методы дискретной математики, комбинаторная оптимизация, теория матроидов.

Практическая ценность. Работа в основном носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для эффективной реализации АВО и разбиения на области компетентности при решении прикладных задач с помощью алгебраических конструкций.

Апробация работы. Материалы, изложенные в диссертации, докладывались на

- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2009» [1], «Ломоносов 2010» [5] (Москва, МГУ);
- 52-й научной конференции МФТИ «Современные и проблемы фундаментальных и прикладных наук» [4] (Долгопрудный, МФТИ);
- Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов - 14» [3] (Суздаль);
- Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации - 2010» [7] (Пафос, Кипр);

Личный вклад. Основные результаты получены автором лично. В совместной публикации в материалах конференции [3] автору принадлежит алгебраический критерий k-сингулярности (1с.), а в [7] - решение задачи разбиения на подсистемы без свойства 1-сингулярности и оценка на минимальное число таких подсистем (2с.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ [1-7], в том числе одна в ЖВМиМФ и одна в Вестнике Московского университета (журналы входят в перечень ВАК). Описание отдельных результатов включены в научные отчеты факультета ВМК и отчеты по проектам РФФИ 08-07-00305-а, 10-07-00609-а.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (69 ссылок). Основной текст занимает 80 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность работы и описываются основные направления исследований.

В первой главе приводятся необходимые определения и делается обзор предыдущих работ.

В §1.1 содержится постановка задачи распознавания. Имеется множество допустимых объектов M, разбитое на классы $M = K_1 \cup ... \cup K_l$. Для каждого из допустимых объектов $s \in M$ существует *полное признаковое описание* (значение набора признаков) $I(s) = (a_1, .., a_n)$ и вектор значений предикатов принадлежности к классам, на которые разбито множество допустимых объектов: $\tilde{\alpha}(s) = (\alpha_1(s), .., \alpha_l(s))$, где значение предиката "$s \in K_i$" равно $\alpha_i(s) \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, .., l$.

Для некоторого набора объектов $\widetilde{S} = \{\widetilde{s_1}, .., \widetilde{s_t}\}$ известны признаковые описания и значения предикатов принадлежности к классам распознавания $\{\alpha_j(\widetilde{s_i})\}_{i=1,j=1}^{t,l}$. Данное множество называется эталонным набором, а объекты из него называются эталонными объектами. Имеется также множество объектов $S = \{s_1, .., s_q\}$, называемое контрольным набором. Задача состоит в построении алгоритма A, который по информации об эталонном наборе правильно классифицирует объекты контрольного набора.

В §1.2 кратко описана модель АВО. При построении модели алгоритмов вычисления оценок предполагается, что множество допустимых объектов M является декартовым произведением пространств значений признаков: $M = M_1 \times ... \times M_n$, M_j - метрическое пространство значений j-го признака с метрикой ρ_j. Множество признаков $P_n = \{1, 2, .., n\}$.

Алгоритм модели АВО A строится в виде суперпозиции распознающего оператора и решающего правила: $A = B \circ C$. Оператор B вычисляет набор оценок близости распознаваемых объектов к классам K_j, на основании этой информации правило C принимает решение о вхождении объектов в тот или иной класс. Оценки близости к классам вычисляются по следующей формуле:

$$\Gamma[B] = ||\Gamma_{ij}[B]||_{q \times l},$$

$$\Gamma_{ij}[B] = \sum_{a,b=0,0}^{1,1} x_{ab} \sum_{\omega\in\Omega_A} \sum_{\tilde{s}_p\in\tilde{K}_j^a} w^p w_\omega \mathrm{B}_\omega^{\varepsilon_\omega,b}(\tilde{s}_p, s_i), \tag{1}$$

где $w^p \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ при $p \in \{1,\ldots,t\}$ (вес p-го объекта), Ω_A - система опорных множеств (система опорных множеств - семейство подмножеств признаков $P_n = \{1,2,..,n\}$), $w_\omega \in \mathbb{R}^+$ при $\omega \in \Omega_A$ - вес опорного множества ω),$(a,b) \in \{0,1\}^2$, $x_{ab} \in \{0,(-1)^{a+b}\}$,

$$\tilde{K}_j^a = \begin{cases} \tilde{S} \cap K_j, & a = 1, \\ \tilde{S} \backslash K_j, & a = 0, \end{cases}$$

$\mathrm{B}_\omega^{\varepsilon_\omega,b}(\tilde{s}_p, s_i)$ - функция близости между объектами признакового пространства M.

В данной работе центральное место занимает исследование моделей АВО с пороговыми функциями близости. Для двух допустимых объектов $s^c, I(s^c) = (c_1,..,c_n)$, $s^d, I(s^d) = (d_1,..,d_n)$ и набора числовых порогов $\widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ обозначим через $\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s^c,s^d) = (\delta_1,...,\delta_n)$ вектор результатов пороговых сравнений в признаковых пространствах:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, \text{ если } \rho_j(c_j,d_j) \leq \varepsilon_j \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определение. Функция близости $B_{\omega_j}(s^c,s^d)$, принимающая значения 0 и 1, называется пороговой, если она однозначно определяется значениями координат вектора $\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s^c,s^d)$, входящими в опорное множество ω_j. Также для пороговых функций близости будет использоваться обозначение $B(\omega_j,\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s^c,s^d))$.

В §1.3 содержится описание известных результатов об эффективных реализациях алгоритмов АВО. Предполагается, что вес опорного множества w_ω является суммой весов признаков, входящих в него. Большинство результатов описывают способы свертки части

$$\Gamma(\tilde{s}, s_i) = \sum_{\omega \in \Omega_A} (\sum_{p_j \in \omega} p_j) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega, b}(\tilde{s}, s_i) \tag{2}$$

формулы (1) для различных функций близости и систем опорных множеств. Результаты второй главы диссертационной работы также развивают эту идею.

В §1.4 приведены основные определения алгебраического подхода к распознаванию и описываются результаты, связывающие понятие k-сингулярности системы точек с критериями корректности семейств распознающих операторов.

Определение. Система q точек в $\mathbb{R}^m$ с l_1-расстоянием называется k-сингулярной, если размерность минимального линейного пространства, содержащего все полиномы степени не больше k от столбцов матрицы попарных l_1-расстояний, строго меньше q (умножение столбцов поэлементное). Таким образом, 1-сингулярные системы — системы с вырожденными матрицами попарных l_1-расстояний.

Пространство полиномов степени не более чем k от столбцов матрицы H (умножение поэлементное) обозначается через $U^k(H)$.

В §1.5 излагаются определения теории матроидов и кратко описывается алгоритм Д. Кнута поиска минимального покрытия базы матроида независимыми множествами.

Вторая глава содержит основные результаты, связанные с построением эффективных реализаций АВО. Исследуется, когда вектор суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega_A} \chi(\omega) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(s_a, s_b), \tag{3}$$

где $\chi(\omega)$ - характеристический вектор опорного множества ω, содержит не более двух различных координат. Рассматривается три семейства функций близости:

$$B^{q_1,q_2}(\omega, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \chi(\omega) \cdot x \geq q_1 \text{ и } \chi(\overline{\omega}) \cdot x \leq q_2, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$B^{*,n+1}(\omega, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \chi(\omega) \cdot x = x \cdot \chi(P_n), \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

$$B^{*,0}(\omega, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \chi(\omega) \cdot x = \chi(\omega) \cdot \chi(P_n), \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

где x - бинарный пороговый вектор, ω - опорное множество, $\overline{\omega}$ - дополнение ω до P_n $(\chi(\omega) + \chi(\overline{\omega}) = \chi(P_n))$, под умножением $(\cdot)$ векторов понимается скалярное произведение.

Отдельно рассматриваются функции $B^{q_1,n+1}$ и $B^{q_1,0}$.

Определение. Система опорных множеств Ω называется ***эффективной*** для семейства функций близости $B^{-,-}$, если для любой функции семейства $B \in B^{-,-}$ и бинарного вектора x вектор суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega} \chi(\omega) B(\omega, x)$$

содержит не более двух различных координат. Класс эффективных систем для семейства пороговых функции $B^{-,-}$ будем обозначать через $KB^{-,-}$

В §2.2 содержится доказательство того, что верна цепочка вложений

$$KB^{q_1,q_2} \subseteq KB^{q_1,n+1} \subseteq KB^{*,n+1} \cong KB^{*,0} \cong KB^{q_1,0}.$$

В §2.3 изучен класс $KB^{*,0}$.

Определение. Эффективную систему опорных множеств из класса $KB^{*,0}$ будем называть 0-эффективной, если для любого бинарного вектора x у суммы

$$\sum_{\omega\in\Omega} \chi(\omega) B^{*,0}(\omega, x)$$

в любой паре различных координат одна из них равна 0.

Для любой эффективной системы опорных множеств Ω из класса $KB^{*,0}$ можно получить 0-эффективную систему опорных множеств, взяв множества, которые не содержат последней координаты из P_n.

Отношение эквивалентности для систем 0-эффективных опорных множеств вводится как транзитивное замыкание следующего отношения. Системы опорных множеств Ω и $\widehat{\Omega}$ эквивалентны, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\widehat{\Omega}$ и Ω определены для множества P_n, и $\widehat{\Omega}$ переходит в Ω под действием некоторой перестановки набора признаков σ, т. е. σ - перестановка множества $P_n = \{1, ..., n\}$ и

$$\Omega = \{\{\sigma(j_1), ..., \sigma(j_k)\} |\, \omega \in \widehat{\Omega}, \omega = \{j_1, ..., j_k\}\}$$

2. Ω - система для признаков P_n. Два признака с номерами n и $n-1$ одновременно входят или не входят во все опорные множества системы Ω, в этом случае $\widehat{\Omega}$ определена для меньшего набора признаков P_{n-1} и является набором опорных множества Ω, из которых удален признак с номером n, где он присутствует:

$$\forall \omega \in \Omega :\; n \in \omega \Leftrightarrow n-1 \in \omega \Rightarrow \widehat{\Omega} = \{\omega \backslash \{n\} | \omega \in \Omega\},$$

$\setminus$ - оператор разности множеств.

3. Ω - система для набора P_n, признак с номером n не входит ни в одно опорное множество из Ω. Тогда $\widehat{\Omega}$ - система для набора P_{n-1} и просто состоит из опороных множеств, входящих в Ω (удаление незначащей координаты):

$$\nexists \omega \in \Omega: \ n \in \omega \Rightarrow \widehat{\Omega} = \Omega.$$

Вводится отношение порядка для классов эквивалентности. Пусть есть два различных класса эквивалентности: E_1 для набора признаков P_n и E_2 для набора $P_{n-k}(k > 1)$, Ω_{E_1} и Ω_{E_2} - их представители, причем Ω_{E_1} - канонический представитель (система опорных множеств в классе эквивалентности, для которой размерность признакового пространства, где она определена, минимальна). Отношение $E_1 > E_2$ выполнено, если Ω_{E_2} состоит из множеств, входящих в Ω_{E_1} и не содержащих координаты $\{n-k+1, ..., n\}$:

$$\Omega_{E_2} = \{\omega | \, \omega \in \Omega_{E_1}, n-k+1 \notin \omega, ..., n \notin \omega\}.$$

Обозначение $E_1 \succ E_2$ соответствует факту того, что $E_1 > E_2$ и не существует такого E_3, что $E_1 > E_3 > E_2$

Теорема. Пусть A - класс эквивалентности 0-эффективных множеств. Тогда длина любой цепочки $A \succ A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \mathcal{Z}$ одинакова.

В §2.4 содержатся сложностные результаты для следующей задачи:

Задача 3. Пусть P_n - множество $\{1, 2, ..., n\}$. На нем задана некоторая система подмножеств Ω, количество множеств ограничено полиномом от n. Верно ли, что существует подмножество $Y \subseteq P_n$ с элементами 1 и 2 такое, что количество подмножеств Y, входящих в Ω и содержащих элемент 1, больше числа таких же множеств, содержащих элемент 2, и оба числа положительны: $1, 2 \in Y : |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, 1 \in \omega\}| > |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, 2 \in \omega\}| > 0$ (контрпример к свойству 0-эффективности, для которого условие нарушается для индексов 1 и 2).

Теорема. Задача 3 является NP-полной.

Третья глава посвящена результатам, связанным с понятием k-сингулярности. В §3.1 приведено доказательство алгебраического критерия k-сингулярности.

Теорема. Система точек $S = \{s_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1, .., c_q)$ такой, что для всех $s \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{q} c_i \rho^k(s, s_i) = 0,$$

где ρ - метрика Хэмминга или l_1-метрика$(k \leq m)$.

В §3.2 рассмотрена задача о разбиении системы точек на минимальное число подсистем, каждая из которых не является 1-сингулярной. Показано существование полиномиального алгоритма, решающего данную задачу. Для задачи распознавания с двумя непересекающимися классами такой алгоритм позволяет разбивать множество контрольных объектов на “области компетентности”, для каждой из которых линейное замыкание семейства операторов АВО является корректным. Показано, что система точек S и набор подмножеств S без 1-сингулярности являются матричным матроидом. Доказана оценка на минимальное число подсистем без 1-сингулярности, на которые может быть разбита произвольная система точек.

Для системы точек S можно построить набор отношений эквивалентности $\{\theta_i\}_{i=1}^m$. Две точки s_k и s_t эквивалентны согласно отношению θ_i, если у них равны i-е координаты. Нас будет интересовать матрица $T(S) = [T_1, .., T_m]$, где каждый из блоков T_i составлен из характеристических q-мерных векторов всех классов эквивалентности для отношения θ_i. Данная матрица $T(S)$ называется *характеристической матрицей классов эквивалентностей.*

Теорема. Для системы точек S пространства $\mathbb{R}^m$ и соответствующей ей матрицы $T(S)$ верно неравенство

$$\frac{|S|}{\mathrm{rg}(T(S))} \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m},$$

где c_i - количество значений, которые может принимать i-я координата точек из системы S, $T(S)$ - матрица классов эквивалентностей.

В §3.3 рассматривается задача разделения системы точек на подсистемы без свойства k-сингулярности. Показано, что система точек S и набор подсистем без свойства k-сингулярности также являются матроидом. И для разбиения на минимальное число подсистем без k-сингулярности можно воспользоваться полиномиальными алгоритмами Д. Кнута и Дж. Едмондса. Однако данные алгоритмы являются полиномиальными в предположении того, что процедура проверки подмножества точек на независимость используется как оракул. В параграфе предложена также полиномиальная процедура проверки на наличие свойства k-сингулярности у системы точек.

В §3.4 изложен анализ задачи разделения на подсистемы без 1-сингулярности для систем на плоскости. Показано, что для данного случая задача эквивалентна задаче разделения множества ребер двудольного графа на минимальное число ациклических подмножеств.

Центральной темой §3.5 является построение эффективных процедур проверки на k-сингулярность для систем точек в $\mathbb{R}^m$. Процедура проверки, используемая в алгоритме из §3.3, состоит в вычислении полинома $G_k(x) = x^k$ от матрицы $\acute{H}_S$

$$\acute{H}_S = \sum_{i=1}^{m} \delta_i E - \acute{P}_S,$$

где $\acute{P_S}$ - матрица попарных l_1-расстояний для S, E - $q \times q$ матрица из одних 1, δ_i - разница между максимальным и минимальным значением i-й координаты для системы S, и проверки на невырожденность полученной матрицы-результата. Похожий способ проверки работает и для случая метрики Хэмминга, используется только матрица H_S и полиномы $F_k(x)$:

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_r \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1), H_S = mE - P_S,$$

где P_S - матрица расстояний в метрике Хэмминга, $a_k > 0$, $b_k > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ при $i \in \{0, 1, .., k-1\}$, $k \leq m$. В параграфе поставлен вопрос об описании всех полиномов, которые могут быть использованы в такого рода критериях и доказана следующая теорема:

Теорема. Рассмотрим систему точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$. Если полином $F(x)$ обладает следующими двумя свойствами:

- для произвольной системы S в $\mathbb{R}^p$ попарно различных точек выполнено равенство $U^1(F(H_S)) = U^k(P_S)$ $(p \leq m)$,
- для произвольной системы S в $\mathbb{R}^p$ попарно различных точек найдется система $\tilde{S}$ такая, что $F(H_S) = H_{\tilde{S}}$ $(p \leq m)$;

то он является одним из полиномов вида $\tilde{F}_k(x)$

$$\tilde{F}_k(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{a_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1)$$

с целочисленными положительными коэффициентами a_r.

Из доказательства данной теоремы также вытекают два следующих замечания.

Замечание. Для матрицы H_S системы точек S верно равенство

$$H_S = T(S)T(S)^T.$$

Если второе условие утверждения заменить на условие:

- для произвольной системы точек S в $\mathbb{R}^p$ $(p \le m)$ найдется матрица T такая, что $F(H_S) = TT^T$,

то условие целочисленности коэффициентов отпадет и теорема будет описывать семейство $\tilde{F}_k(x)$, в котором в качестве a_r используются положительные числа.

Замечание. Многочлен $F(H_S)$ обладает свойством, что для любой системы точек S найдется система точек $\acute{S}$ такая, что выполнено равенство $F(H_S) = H_{\acute{S}}$, тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$\sum_{r=0}^{k} \frac{a_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1), a_r \ge 0,$$

и хотя бы один из коэффициентов a_0 или a_1 отличен от нуля.

Для критерия k-сингулярности с метрикой l_1 доказана следующая теорема.

Теорема. Если полином $F(x)$ обладает следующими двумя свойствами:

- для произвольной системы S попарно различных точек с целочисленными координатами выполнено равенство $U^1(F(\acute{H}_S)) = U^k(\acute{P}_S)$,
- для произвольной системы S попарно различных точек с целочисленными координатами найдется матрица T такая, что $F(\acute{H}_S) = TT^T$;

то он является одним из полиномов вида $\tilde{F}_k(x)$ с положительными коэффициентами a_i.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Карпович П. А. Критерий k-сингулярности системы точек и оптимальное разбиение на подсистемы // Материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция ВМК. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ, МАКС Пресс, 2009. — С. 33.
2. Карпович П. А. Эффективная реализация алгоритмов распознавания образов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. **49.** № 8 С. 1510–1516.
3. Карпович П. А., Дьяконов А. Г. Критерии k-сингулярности систем точек в алгебраическом подходе к распознаванию // Материалы XIV Всероссийской конференции 'Математические методы распознавания образов'. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 41–44.
4. Карпович П. А. О задаче разделения системы точек в пространстве l_1 на подсистемы с невырожденными матрицами попарных растояний // Материалы 52-й научной конференции МФТИ 'Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук'. Часть VII. Управление и прикладная математика. М:МФТИ. 2009. — С. 70–73.
5. Карпович П. А. Разделение системы точек на подмножества с невырожденными матрицами попарных расстояний // Материалы XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция ВМК. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ, МАКС Пресс, 2010. — С. 87-88.
6. Карпович П. А. Критерии k-сингулярности и разделения 1-сингулярных систем // Вестник Московского университета (серия 15) 'Вычислительная математика и кибернетика'. 2010. **34.** № 4 С. 164–171.
7. Карпович П. А., Дьяконов А. Г. k-сингулярные системы точек, приложения в алгебраическом подходе к распознаванию образов // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. — Республика Кипр, г. Пафос. М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 61-64.