МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Крылов Владимир Андреевич

О некоторых свойствах смесей обобщенных гамма-распределений и их применениях

Специальность 01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук Матвеев Виктор Федорович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Афанасьева Лариса Григорьевна
	кандидат физико-математических наук Миранцев Валерий Георгиевич
Ведущая организация:	Центральный экономико–математический институт РАН

Защита диссертации состоится 18 февраля 2011 г. в 11 : 00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ.
С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» — «Работа диссертационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан 10 января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Трифонов Н. П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Обобщенное гамма-распределение (ОГ) вероятностей случайной величины было впервые предложено Стейси[1] в 1962 г. в качестве модели, обобщающей одновременно хорошо известные распределения гамма и Вейбулла. ОГ представляет собой трехпараметрическое семейство распределений и включает в себя, наряду с названным двумя распределениями, ряд частных и предельных случаев, к числу которых относятся распределения логнормальное, Накагами, Рэлея и обратное гамма. Особый интерес представляет случай конечных смесей ОГ-распределений. Такой объект возникает, когда имеющиеся наблюдения не являются однородными со статистической точки зрения, а представляют собой объединение нескольких популяций с различными функциями распределения. Актуальность рассмотрения смесей ОГ-распределений состоит в том, что эти смеси могут рассматриваться как прямое обобщение некоторых разнотипных смесей распределений, включающих распределения гамма, Вейбулла, логнормальное, и потому возникают при решении широкого круга задач.

С теоретической точки зрения, ОГ-распределение представляет собой сложный объект. Основная проблема связана со сложностью оценивания значений параметров ОГ-распределения по выборке. В работах Стейси, Хагера, Винго[2] разрабатывались оценки максимального правдоподобия, в работах Коэна, Хуанга, Сонга[3] предлагались модификации метода моментов для оценки параметров ОГ-распределения. Ни один из существующих методов не обладает универсальной применимостью и не был удовлетворительно обоснован с теоретической точки зрения. Важнейшим открытым вопросом является статистическая состоятельность оценок, т. е. сходимость по вероятности оценок параметров к значениям соответствующих параметров генеральной совокупности, так называемым “истинным” значениям параметров, при неограниченном росте объема выборки.

При рассмотрении смесей распределений статистическая задача состоит в их разделении, т. е. нахождение как компонент смеси – распределений из которых возникают наблюдения, так и весовых коэффициентов при этих компонентах. Рассмотрению теоретических и практических аспектов использования ОГ-распределений и их смесей посвящен ряд работ,

[1] Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statist. 1962. Vol. 33. Pp. 1187–1192.

[2] Wingo D. R. Computing maximum-likelihood parameter estimates of the generalized gamma distribution by numerical root isolation // IEEE Trans. Reliab. 1987. Vol. 36, no. 5. Pp. 586–590.

[3] Song K. Globally convergent algorithms for estimating generalized gamma distributions in fast signal and image processing // IEEE Trans. Image Process. 2008. Vol. 17, no. 8. Pp. 1233–1250.

в том числе статьи Володина[4], Радакришна[5], Чукву[6]. Важнейшими вопросами при рассмотрении конечных смесей ОГ-распределений являются вопросы идентифицируемости и устойчивости относительно возмущений параметров. Первое гарантирует единственность разложения в виде конечной смеси ОГ-распределений, а второе позволяет рассматривать задачу приближения конечными смесями ОГ. Исследование этих вопросов для ОГ-распределения ранее не проводилось.

ОГ-распределение и его конечные смеси имеют большой прикладной потенциал в задачах статистического моделирования. В качестве наиболее активно исследуемых областей применения ОГ-распределений и их смесей стоит отметить модели дожития, возникающие в страховых задачах, анализе издержек медицинских исследований[7], инженерных рисках, экономических задачах[8]. В диссертации в качестве применения разрабатывается новая прикладная область, связанная со статистическим моделированием в задачах обработки одномерных и многомерных спутниковых изображений. Актуальность этой прикладной области подчеркивается широкой востребованностью спутниковых данных и высокой интенсивностью разработки математических моделей в данной области в последнее десятилетие.

Цель диссертации. Основная цель диссертации состоит в исследовании теоретических свойств смесей обобщенных гамма-распределений и оценивании их параметров. Рассматривается применение смесей обобщенных гамма-распределений в прикладных задачах, связанных с обработкой спутниковых изображений.

Методы исследования. В работе использованы аналитические методы математического анализа, теории вероятностей, аппарат математической статистики. Применяется аппарат специальных функций, в частности для исследования свойств гамма и полигамма функций и их асимптотического поведения.

---

[4] Володин И. Н. Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. 1965. Т. 125, N 6. С. 3–23.

[5] Radhakrishna C., Dattatreya Rao A. V., Anjaneyulu G. V. S. R. Estimation of parameters in a two-component mixture generalized gamma distribution // Commun. Stat. - Theor. M. 1991. Vol. 21, no. 6. Pp. 1799–1805.

[6] Chukwu W. I. E., Gupta D. On mixing generalized Poisson with generalized gamma distribution // Metron. 1989. Vol. 47. Pp. 313–320.

[7] Basu A., Manning W. G. Issues for the next generation of health care cost analyses // Medical Care. 2009. Vol. 47, no. 7. Pp. 109–114.

[8] Gomes O., Combes C., Dussauchoy A. Parameter estimation of the generalized gamma distribution // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. Vol. 79, no. 4. Pp. 955–963.

Научная новизна и основные результаты. Выносимые на защиту результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Для распределений неотрицательных случайных величин доказано достаточное условие состоятельности оценок параметров, полученных методом логарифмических кумулянт. С использованием указанного метода получены оценки параметров для обобщенного гамма и некоторых других распределений и установлена их состоятельность.

2. Доказаны устойчивость относительно возмущений параметров и идентифицируемость конечных смесей обобщенных гамма-распределений и смесей их частных случаев.

3. На основе конечных смесей обобщенных гамма-распределений предложены и обоснованы методы аппроксимации распределений амплитуд и классификации для одно- и многоканальных спутниковых изображений.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят как теоретический, так и прикладной характер. Теоретические результаты могут рассматриваться как база для дальнейших исследований свойств обобщенных гамма-распределений и их смесей. Результаты работы использовались на практике при решении прикладных задачах обработки спутниковых изображений.

Личный вклад автора. Выносимые на защиту результаты получены автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на научном семинаре «Теория риска и смежные вопросы» (факультет ВМиК, МГУ им. Ломоносова) под руководством проф. В. Е. Бенинга, проф. В. Ю. Королёва (март, ноябрь 2010), на научном семинаре «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов» (Центральный экономико–математический институт РАН) под руководством проф. С. А. Айвазяна, проф. Ю. Н. Благовещенского (октябрь 2010), на научном семинаре «Исследование асимптотического поведения и устойчивости стохастических моделей» (Механико-математический факультет, МГУ им. Ломоносова) под руководством проф. Л. Г. Афанасьевой, проф. Е. В. Булинской (ноябрь 2010), на международной конференции «SPIE Electronic Imaging 2009» (январь 2009, Сан Хосе, США), на международной конференции «SPIE Electronic Imaging 2010» (январь 2010, Сан Хосе, США), на XVII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010» (секция «Вычислительная математика и кибернетика», апрель 2010, Москва), на международной конференции по применению байесовских и энтропийных методов «MaxEnt'2010» (июль 2010, Шамони, Франция), на международной конференции «SPIE Remote Sensing 2010» (сентябрь 2010, Тулуза, Франция), на международной конференции «Graphicon'2010» (сентябрь 2010, Санкт-Петербург).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 9 научных работ: шесть [1-6] в сборниках трудов международных конференций, и три [7-9] в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений и списка литературы, включающего 143 наименования. Объем работы составляет 171 страницу.

Краткое содержание диссертации

В **первой главе** рассматриваются свойства обобщенного гамма-распределения (ОГ) неотрицательных случайных величин (с. в.). ОГ-распределение имеет плотность

$$g_{\nu,\kappa,\sigma}(r) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{\sigma\Gamma(\kappa)} \left(\dfrac{r}{\sigma}\right)^{\kappa\nu-1} \exp\left[-\left(\dfrac{r}{\sigma}\right)^{\nu}\right], & r > 0 \\ 0\,, & r \leqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

с параметрами $\nu, \kappa, \sigma > 0$, и функцию распределения

$$\mathcal{G}\nu, \kappa, \sigma(r) = \frac{\gamma\left(\kappa, \left[\frac{r}{\sigma}\right]^{\nu}\right)}{\Gamma(\kappa)},$$

где $\gamma(\kappa, x) = \int\limits_0^x t^{\kappa-1}\exp[-t]dt$ и $\Gamma(\kappa) = \lim\limits_{x\to\infty}\gamma(\kappa, x)$ – неполная и полная гамма функции соответственно. Это распределение является универсальным трехпараметрическим семейством, получившим широкое применение как обобщение нескольких широко известных классических моделей, таких как распределения гамма, Вейбулла, логнормальное, обратное гамма. Обзору частных и предельных случаев ОГ-распределения посвящен первый раздел.

Препятствием на пути использования ОГ-распределения является затруднительность построения процедуры оценки его параметров. Как демонстрируется во втором разделе, применение стандартных методов для оценки параметров ОГ-распределения не приводит к удовлетворительным с теоретической точки зрения результатам. В третьем разделе предлагается использование метода логарифмических кумулянт (МЛК) для оценки параметров ОГ-распределения. Этот недавно предложенный метод для оценки параметров неотрицательной с. в. X, имеющей плотность распределения $p(x)$, основан на применении интегрального преобразования Меллина[9]

$$\phi_p(s) = \int\limits_0^{+\infty} p(x)x^{s-1}dx, \quad s \in \mathbb{C}.$$

МЛК позволяет сформулировать зависимость между неизвестными параметрами распределения и логарифмическими моментами $\tilde{k}$, т. е. моментами с. в. $\ln X$, в виде системы уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} [\ln \phi_p]'(1) = \mathbb{E}[\ln X] = \tilde{k}_1 \\ [\ln \phi_p]^{(\nu)}(1) = \mathbb{E}[(\ln X - \tilde{k}_1)^\nu], \quad \nu = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Стоит отметить, что МЛК—оценки получили широкое распространение на практике[9].

В третьем разделе устанавливаются выражения для $[\ln \phi_p]^{(\nu)}(s)\big|_{s=1}$, и находится вид системы уравнений (2) для нахождения МЛК–оценок ОГ-распределения:

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N \ln x_i = \ln\sigma + \dfrac{\Psi(0,\kappa)}{\nu}, \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N (\ln x_i - \tilde{k}_1)^j = \dfrac{\Psi(j-1,\kappa)}{\nu^j}, \quad j = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_i,\ i = 1, \ldots, N,$ – наблюдения и $\Psi(n, x) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \ln \Gamma(t)$ – полигамма-функция порядка n. Устанавливаются существование и единственность решения системы (3) относительно неизвестных параметров (ν, κ, σ).

Теорема 1 (разд. 1.3.1, теор. 2). *МЛК–оценки $\{(\hat{\nu}_n, \hat{\kappa}_n, \hat{\sigma}_n)\}_{n=1}^\infty$ обобщенного гамма-распределения состоятельны, т. е.*

$$\forall\varepsilon > 0: \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{|\hat{\nu}_n - \nu^*| < \varepsilon, |\hat{\kappa}_n - \kappa^*| < \varepsilon, |\hat{\sigma}_n - \sigma^*| < \varepsilon\right\} = 1,$$

где $\nu^*, \kappa^*, \sigma^*$ – истинные значения параметров.

[9]A new statistical model for Markovian classification of urban areas in high-resolution SAR images / C. Tison, J.-M. Nicolas, F. Tupin, H. Maitre // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2004. Vol. 42, no. 10. Pp. 2046–2057.

Также устанавливается достаточное условие состоятельности МЛК–оценок для неотрицательных случайных величин.

Теорема 2 (разд. 1.3.1, теор. 3)**.** *Пусть дано семейство плотностей распределений $p_X(x|\xi)$, $x \geqslant 0$, параметризуемое вектором $\xi \in \mathbb{R}^m$. Пусть также система МЛК–уравнений (2) задает непрерывное и обратимое отображение. Тогда, если существует конечный центральный момент с. в. $\ln X$ порядка $2m$, то МЛК–оценки $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ по наблюдениям $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ существуют и состоятельны.*

Данный результат является значимым, так как предлагает общий метод обоснования состоятельности МЛК–оценок для неотрицательных случайных величин.

В **второй главе** исследуются свойства конечных смесей обобщенных гамма-распределений, т. е. распределений с плотностями вида

$$p_\theta(r) = \sum_{i=1}^{K} P_i g_{\nu_i,\kappa_i,\sigma_i}(r), \quad r \geqslant 0, \tag{4}$$

с весовыми коэффициентами $P_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{K} P_i = 1$, где $g_{\nu_i,\kappa_i,\sigma_i}(r)$ – плотность ОГ-распределения (1). Стоит отметить, что такие смеси представляют интерес как прямое обобщение повсеместно применяемых смесей распределений гамма, логнормальных и Вейбулла.

Первый раздел главы посвящен рассмотрению конечных смесей ОГ-распределений и конечных смесей, полученных объединением его подсемейств и особых случаев. Исследуется свойство идентифицируемости этих смесей, т. е. единственность представления любой конечной смеси в следующем смысле.

Теорема 3 (разд. 2.1.2, теор. 5)**.** *Класс всех конечных смесей обобщенных гамма-распределений идентифицируем, т. е. если рассматриваются две смеси H и $\hat{H}$ из семейства ОГ-распределений*

$$H = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathcal{G}_i, \qquad \hat{H} = \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{\pi}_j \hat{\mathcal{G}}_j,$$

где $\mathcal{G}_i \equiv \mathcal{G}_j \Leftrightarrow i = j$, и, аналогично, $\hat{\mathcal{G}}_i \equiv \hat{\mathcal{G}}_j \Leftrightarrow i = j$, тогда тождество $H \equiv \hat{H}$ равносильно $k = \hat{k}$ и для любого $i = 1, \ldots, k$, найдется $j = 1, \ldots, k$, такое что $\pi_i = \hat{\pi}_j$ и $F_i \equiv \hat{F}_j$.

Теорема 4 (разд. 2.1.2, теор. 7). *Класс всех конечных смесей, полученных объединением семейств логнормальных распределений, обобщенных гамма-распределений, а также его частных форм: распределений гамма, показательного, Эрланга, χ^2, Накагами, полунормального, Рэлея, χ, Максвелла, Вейбулла, обратного гамма и Леви идентифицируем.*

Значимость теоремы 4 состоит в том, что она устанавливает свойство идентифицируемости для некоторых широко распространенных разнотипных конечных смесей.

Второй раздел посвящен устойчивости параметров ОГ-распределения относительно возмущений параметров. Исследуются загрязненные ("контаминационные") модели загрязнения по каждому из параметров и получены оценки следующего вида.

Теорема 5 (разд. 2.2.2, теор. 9). *Пусть $p \in (0,1]$, $\kappa_1, \kappa_2 \in [m_\kappa, M_\kappa]$ для некоторых $M_\kappa > m_\kappa > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место*

$$\rho(p\mathcal{G}_{1,\kappa_1,1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{1,\kappa_2,1}(x),\ \mathcal{G}_{1,\kappa_1,1}) \leqslant \varepsilon$$

в равномерной метрике $\rho(F,G) = \sup\limits_x |F(x) - G(x)|$, где через $\mathcal{G}_{\nu,\kappa,\sigma}(\cdot)$ обозначена функция распределения ОГ с параметрами (ν, κ, σ).

Тогда для параметров p, κ_1, κ_2 выполнено следующее соотношение

$$(1-p)|\kappa_1 - \kappa_2| \leqslant \frac{\max[\Gamma^2(m_\kappa), \Gamma^2(M_\kappa)]}{\gamma(1, M_\kappa)\Gamma(e, m_\kappa)}\,\varepsilon,$$

где $\gamma(s,x) = \int\limits_0^x t^{s-1}\exp[-t]dt$ и $\Gamma(s,x) = \int\limits_x^\infty t^{s-1}\exp[-t]dt$ – нижняя и верхняя неполные гамма-функции.

Результаты устойчивости могут быть сформулированы также и в метрике Леви L, метризующей слабую сходимость случайных величин. Для с. в. с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ метрика L определяется как

$$L(F,G) = \inf\{r : G(x-r) - r \leqslant F(x) \leqslant G(x+r) + r,\ \text{для всех } x \in \mathbb{R}\}.$$

Например для масштабного параметра σ устанавливается следующая теорема.

Теорема 6 (разд. 2.2.3, теор. 13). *Пусть $p \in (0,1]$, $\sigma_1, \sigma_2 \in [m_\sigma, +\infty)$ для некоторой константы $m_\sigma > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место*

$$L(p\mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}(x) + (1-p)\mathcal{G}_{1,1,\sigma_2}(x), \mathcal{G}_{1,1,\sigma_1}) \leqslant \varepsilon.$$

Тогда выполнено следующее соотношение

$$L^2(U_{p,\sigma_1,\sigma_2}, \sigma_1) < 1.85\,\frac{m_\sigma}{m_\sigma + 1}\,\varepsilon,$$

где через U_{p,σ_1,σ_2}, $p \in [0,1]$, обозначена с. в., принимающая значения σ_1 с вероятностью p и σ_2 с вероятностью $1-p$.

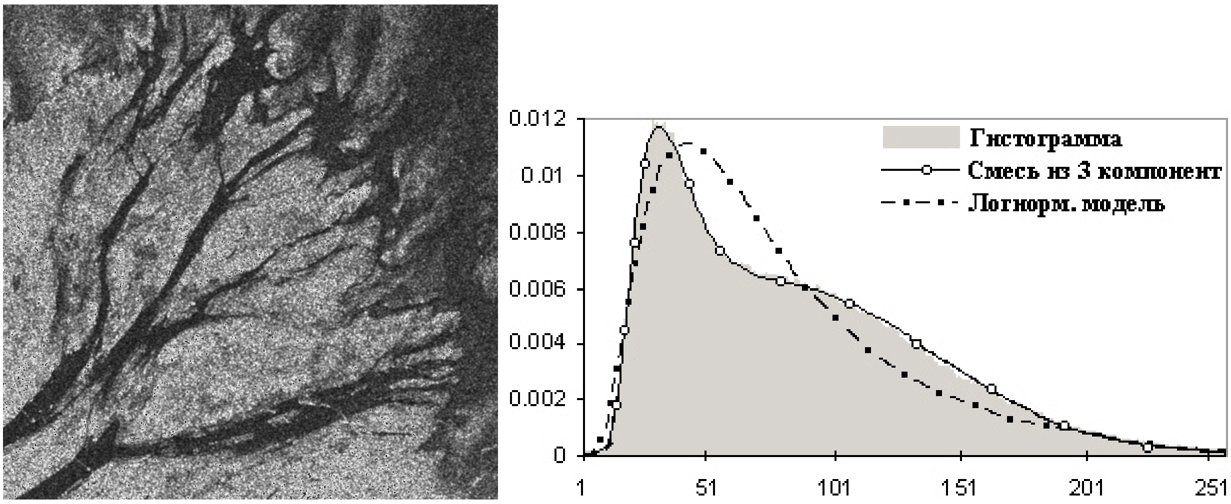
В третьем разделе предлагается применение EM[10] (Expectation-Maximization) метода для поиска решения задачи разделения конечных смесей ОГ-распределений по выборке. Проводится обзор методов для решения задачи разделения смесей и среди существующих моделей аргументируется выбор модификации стохастического EM (SEM) алгоритма, как позволяющей ослабить зависимость оценки от инициализации и одновременно получить оценку параметра K – количества компонент смеси. Для поиска оценок параметров ОГ-распределений компонент смеси используются МЛК–оценки, применимость которых обеспечивается теоремой 1.

Третья глава диссертации посвящена применению смесей обобщенных гамма-распределений к задаче обработки спутниковых изображений. Рассматривается задача моделирования (аппроксимации) эмпирических распределений амплитуд одноканальных спутниковых изображений, полученных при помощи радара с синтезированной апертурой (РСА). Данная задача актуальна и является базовой при обрабоке РСА–данных, имеющих широкое распространение на практике.

В первом разделе рассматриваются особенности РСА–изображений, приводящие к разнообразию математических моделей, применяемых при их обработке. Во втором разделе представлена систематизация существующих на сегодняшний день моделей и семейств распределений, используемых для решения рассматриваемой задачи статистического моделирования.

В третьем разделе главы аргументируется необходимость введения новых моделей, способных работать с современными РСА–данными высокого геометрического разрешения (до 1 метра на пиксель). В качестве такой модели предлагается использование конечных смесей ОГ-распределений (4). Во-первых, такой выбор объясняется высокой универсальностью трехпараметрического семейства ОГ-распределений. Во-вторых, применение конечных смесей является наиболее адекватной статистической моделью для аппроксимации смешанных распределений, возникающих при обработке данных высокого разрешения. Использование метода, основанного на применении модели конечных смесей ОГ-распределения, при допустимом уровне

[10]Celeux G., Diebolt J. The SEM algorithm: a probabilistic teacher algorithm derived from the EM algorithm for the mixture problem // Computational Statistics Quaterly. 1985. Vol. 2. Pp. 73–82.



(a) исходное изображение (b) гистограммы оценок

Рис. 1: (a) Исходное спутниковое изображение. (b) Гистограммы: исходная, предложенной оценки смесью и оптимального приближения одним распределением (логнормальным). Расстояния Колмогорова-Смирнова: $\rho_{\text{смесь}} = 0.0040$, $\rho_{\text{логнорм}} = 0.0583$.

вычислительной сложности позволяет добиться высокой точности аппроксимации и, одновременно, устранить ограничения на применимость, присущие существующим моделям.

Для решения рассматриваемой задачи аппроксимации рассматривается также более общая смесевая модель, основанная на применении конечных смесей широкого диапозона распределений

$$p_\theta(r) = \sum_{i=1}^{K} P_i p_{i\theta_i}(r), \quad r \geqslant 0,$$

где плотности $p_{i\theta_i}(\cdot)$ выбираются из словаря $\mathcal{D}_M$, включающего распределения Вейбулла, логнормальное, Фишера, обобщенное гамма, Накагами, $K^{1/2}$-распределение, и обобщенные модели Гаусса-Рэлея и Рэлея с тяжелыми хвостами[11]. В сравнении с методом, основанным на конечных смесях ОГ-распределений, модель со словарем $\mathcal{D}_M$ позволяет резко повысить интерпретируемость смесей с прикладной точки зрения. Разрабатывается гистограммная модификация SEM–алгоритма для работы со словарем распределений. Для поиска оценок параметров моделей из словаря $\mathcal{D}_M$ предлагается применение МЛК–оценок. С использованием достаточного условия состоятельности, полученного в теореме 2, доказывается следующее утверждение.

[11]Moser G., Zerubia J., Serpico S. B. SAR amplitude probability density function estimation based on a generalized Gaussian model // IEEE Trans. Image Process. 2006. Vol. 15, no. 6. Pp. 1429–1442.

Теорема 7 (разд. 3.3.1, утверждения 10-13). *МЛК–оценки параметров распределений логнормального, Фишера, $K^{1/2}$ и обобщенного Рэлея с тяжелыми хвостами состоятельны.*

С учетом доказанного в первой главе, это обеспечивает состоятельность МЛК–оценок для всех распределений из $\mathcal{D}_M$.

Четвертый раздел посвящен исследованию разработанных смесевых моделей и их сравнению с используемыми на практике методами. Эксперименты с РСА–изображениями высокого разрешения убедительно демонстрируют высокую применимость и превосходство разработанных моделей по сравнению с существовавшими ранее. Пример аппроксимации гистограммы спутникового изображения системы TerraSAR-X высокого разрешения приведен на Рис. 1.

В **четвертой главе** рассматривается применение конечных смесей ОГ-распределений в задаче моделирования многоканальных спутниковых данных. В первом разделе разрабатывается подход, позволяющий использование результатов одномерного моделирования непосредственно в моделировании многомерных данных. Для этого предлагается использование статистического аппарата копул, позволяющего формализовать построение совместного распределения многомерной с. в. по ее маргинальным распределениям. При помощи копул строится плотность совместного распределения D-канальных данных:

$$p(y_1, \ldots, y_D) = p_1(y_1) \cdots p_D(y_D) \, \frac{\partial^D C}{\partial y_1 \ldots \partial y_D}(F_1(y_1), \ldots, F_D(y_D)),$$

где C – копула, а $p_i(\cdot)$ и $F_i(\cdot)$ – плотности и функции распределения одноканальных данных.

При обработке многоканальных РСА–данных в качестве одноканальных (маргинальных) распределений предлагается использование конечных смесей ОГ-распределений

$$p_d(y_d) = \sum_{i=1}^{K_d} P_{di} g_{\nu_{di}, \kappa_{di}, \sigma_{di}}(y_d), \qquad F_d(y_d) = \sum_{i=1}^{K_d} P_{di} \mathcal{G}_{\nu_{di}, \kappa_{di}, \sigma_{di}}(y_d),$$

для каналов изображения $d = 1, \ldots, D$.

С целью обеспечения более широкого выбора структур зависимости для моделируемых многоканальных данных предлагается использование набора из нескольких семейств копул $\mathcal{D}_M$. Этот набор состоит из R архимедовых, эллиптических и др. копул, где $R = 10$ (при $D = 2$) и $R = 3$ (при

$D \geqslant 3$). Для оценки параметров копул используется связь между распределением, задаваемым копулой, и коэффициентом ранговой корреляции Кендалла. Для выбора оптимальной копулы из набора $\mathcal{D}_M$ используется критерий согласия χ^2 Пирсона.

На основании предложенного подхода к моделированию многоканальных данных во втором разделе главы строится модель для решения задачи классификации многоканальных поляриметрических РСА (ПРСА) изображений. Этот вид спутниковых изображений получил широкое распространение и имеет важное прикладное значение. Для построения модели ПРСА–данных оценки плотностей совместных распределений для отдельных классов собираются в распределение Гиббса, описывающее модель скрытого марковского случайного поля меток классов $\mathbf{z}$ по наблюдениям $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} P(\mathbf{z}|\mathbf{y},\beta) = W^{-1}\exp(-H(\mathbf{z}|\mathbf{y},\beta)) \\ H(\mathbf{z}|\mathbf{y},\beta) = \sum\limits_{i\in S}\Big[-\ln p(y_i|z_i) - \beta \sum\limits_{s:\{i,s\}\in C} \delta_{z_i=z_s}\Big] \end{cases},$$

где S – множество всех пикселей изображения, C – множество клик на S и $\delta_{z_i=z_s} = 1$, если $z_i = z_s$, и 0, иначе. Использование модели марковского случайного поля позволяет добиться повышения регулярности классификации. Для оценки параметра модели β используется метод имитации отжига глобальной оптимизации[12].

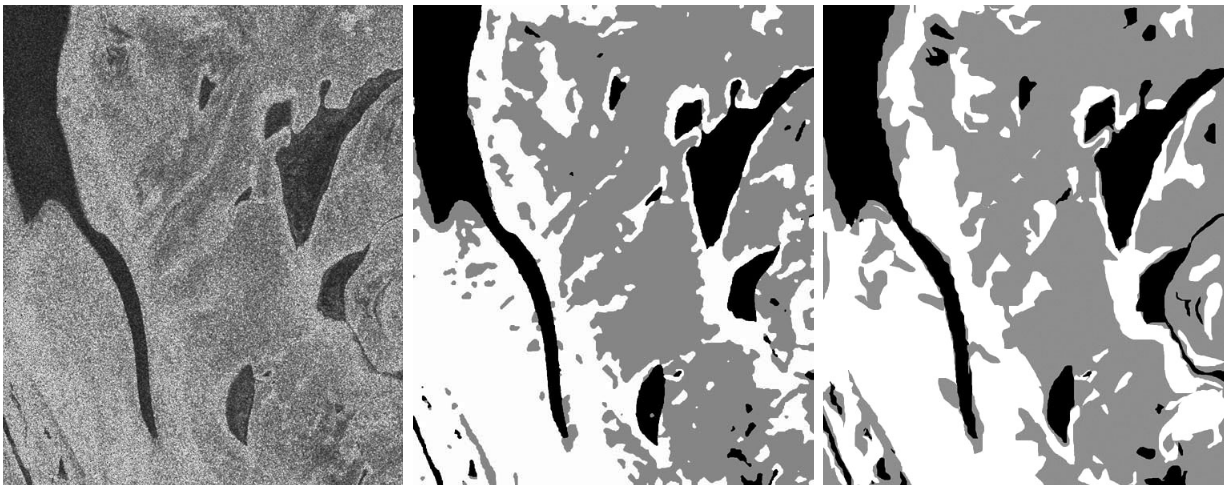
Для решения оптимизационной задачи, связанной с поиском конфигурации меток, минимизирующей энергию $H(\mathbf{z}|\mathbf{y},\beta)$, используется модифицированный метод Метрополиса[13] (MMD) стохастической релаксации с охлаждающей процедурой. Этот метод представляет собой переходный вариант между глобальным (медленным) методом имитации отжига и локальным (быстрым) ICM-методом. Для MMD доказывается следующее утверждение.

Теорема 8 (разд. 4.2.2, теор. 14)**.** *Для любого значения $\alpha \in (0,1)$ и любого начального значения температуры T_0, найдется такая температура T_α, после достижения которой MMD-алгоритм начинает вести себя как ICM, т. е. принимать только конфигурации с меньшей энергией.*

Из этой теоремы следует, что выбор значения α позволяет разрешить проблему поиска начальной конфигурации, затрудняющей применение ICM-метода.

[12]Geman S., Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images // IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. 1984. Vol. 6. Pp. 721–741.

[13]Kato Z., Zerubia J., Berthod M. Satellite image classification using a modified Metropolis dynamics // Proceedings of Internat. Conf. on Acoust., Speech, Signal Process. San Francisco, USA: 1992. Pp. 573–576.



(a) исходное изображение (b) классификация смесями ОГ + копулами (c) контрольная карта

Рис. 2: (a) Исходное спутниковое изображение; (b) результат классификации предлагаемым методом и (c) контрольная карта местности. Точность классификации составляет 84.55%. Обозначения: вода (черный), влажные зоны (серый), сухие зоны (белый).

В третьем разделе проводится экспериментальное исследование предложенной модели классификации на многоканальных ПРСА–изображениях высокого разрешения. Эксперименты позволяют констатировать высокую точность и сравнительное превосходство предложенной модели. Пример классификации спутникового изображения системы TerraSAR-X высокого разрешения приведен на Рис. 2.

В **Заключении** приведены основные результаты, полученные в диссертации, и список семинаров и конференций, на которых были представлены результаты работы.

В **Приложении А** приведены выражения для логарифмических моментов некоторых распределений.

В **Приложении Б** описывается построение графиков Кендалла, применяемых в четвертой главе.

Публикации по теме диссертации

[1] Dictionary-based probability density function estimation for high-resolution SAR data / V. Krylov, G. Moser, S. B. Serpico, J. Zerubia // Proceedings of SPIE. — Vol. 7246. — San Jose, USA: 2009. — Pp. 72460S–01–72460S–12.

[2] High resolution SAR-image classification by Markov random fields and finite mixtures / G. Moser, V. Krylov, S. B. Serpico, J. Zerubia // Proceedings of SPIE. — Vol. 7533. — San Jose, USA: 2010. — Pp. 753308–01–753308–12.

[3] *Крылов В. А.* Классификация многоканальных дистанционных изображений с использованием марковских случайных полей и копул // Сборник тезисов XVII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2010». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». — М.: МАКС–Пресс, 2010. — С. 122–123.

[4] Multichannel SAR image classification by finite mixtures, copula theory and Markov random fields / V. Krylov, G. Moser, S. B. Serpico, J. Zerubia // Proceedings of AIP. — Vol. 1305. — Chamonix, France: 2010. — Pp. 299–306.

[5] Classification of very high resolution SAR images of urban areas by dictionary-based mixture models, copulas and Markov random fields using textural features / A. Voisin, G. Moser, V. Krylov et al. // Proceedings of SPIE. — Vol. 7830. — Toulouse, France: 2010. — Pp. 78300O–01–78300O–11.

[6] *Krylov V., Zerubia J.* Generalized gamma mixtures for supervised SAR image classification // Proceedings of «Graphicon'2010». — Saint Petersburg, Russia: 2010. — Pp. 107–110.

[7] *Крылов В. А.* Аппроксимация распределений амплитуд изображений радара с синтезированной апертурой методом конечных смесей // *Вестник Московского университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика.* — 2010. — Т. 34, № 2. — С. 35–39.

[8] *Крылов В. А.* Моделирование и классификация многоканальных дистанционных изображений с использованием копул // *Информатика и ее применения.* — 2010. — Т. 4, № 4. — С. 35–39.

[9] Enhanced dictionary-based SAR amplitude distribution estimation and its validation with very high-resolution data / V. Krylov, G. Moser, S. B. Serpico, J. Zerubia // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters.* — 2011. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 148–152.