Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ГАВРИЛЕНКО Семен Васильевич

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМ ИНДЕКСОМ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Специальность 01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В.Ю. Королев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Е.В. Булинская
	кандидат физико-математических наук Е.В. Коссова
Ведущая организация:	Институт проблем информатики РАН

Защита диссертации состоится 18 марта 2011 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ http://cs.msu.ru в разделе "Наука"- "Работа диссертационных советов" - "Д 501.001.44"

Автореферат разослан " ___ " ___февраля___ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор ______________ Н.П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность:

В классической математической статистике принято иметь дело со статистиками (то есть измеримыми функциями от имеющихся данных), построенными по выборкам *неслучайного* объема. Такие статистики хорошо изучены, чаще всего их распределения являются нормальными либо асимптотически нормальными, причем во втором случае, как правило, известен способ оценивания точности аппроксимации нормальным распределением. По-видимому, причина такой ориентации на работу с выборками неслучайного объема лежит в стереотипе восприятия сути задач статистического анализа, когда конкретный статистический вывод делается по конкретной выборке с *конкретным, известным* объемом. Вместе с тем целью теоретической статистики является конструирование методов или процедур, оптимальных при любых возможных значениях считающихся случайными наблюдений. Однако на практике мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда объем доступной статистической информации (выборки) заранее (то есть на этапе выбора статистической процедуры для обработки этой информации) не известен, а его конкретное значение становится известным лишь по окончании формирования массива статистической информации. Другими словами, эксперименты редко проводятся до «получения n-го», скажем, 1500-го наблюдения. Как правило, фиксируется не число наблюдений, а время для сбора информации. Например, сложно заранее оценить число поломок устройства бытовой техники за год или число страховых событий, зарегистрированных в страховой компании в течение отчетного периода (как правило, года). Таким образом, часто число доступных наблюдений (объем выборки) само является наблюдением, и в рамках подхода, традиционного для теоретической статистики, должно заранее считаться случайным. Поэтому в таких случаях для статистического вывода более целесообразно использовать статистики, построенные по выборкам случайного объема. При этом часто можно предполагать, что элементы выборки и случайный индекс являются стохастически независимыми.

К настоящему моменту накоплено много результатов, применимых к статистикам со случайными индексами. Подобные объекты были предметом исследования многих математиков, кроме того, они успешно применяются на практике: в теории массового обслуживания, теории надежности, финансовой математике, математической теории страхования, ядерной физике. Согласно указанным результатам, неоднородность потока информативных событий, приводящая к случайности объема выборки, естественным образом трансформирует предельные распределения статистик, в результате чего вместо привычного нормального закона в качестве предельного могут возникать распределения с более «тяжелыми» (вообще говоря, произвольно более тяжелыми) хвостами. Например, как показано в работе В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева[1], для асимптотически нормальных (в обычном состоянии) статистик, таких как выборочное среднее (при условии существования дисперсий), центральные порядковые статистики или оценки максимального правдоподобия (при достаточно общих условиях регулярности), заменив неслучайный объем выборки случайной величиной с отрицательным биномиальным распределением с параметрами $r > 0$ и $\frac{1}{n}$, т.е

$$\mathsf{P}(N_n = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\,\Gamma(r)}\frac{1}{n^r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

мы получим в пределе при $n \to \infty$ вместо нормального закона распределение Стьюдента, которое, как известно, задается плотностью:

$$p_{2r}(x) = \frac{\Gamma(r+1/2)}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r)}\left(1 + \frac{x^2}{2r}\right)^{-r-1/2}, \ -\infty < x < \infty,$$

[1] *В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев.* Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики. // Теория вероятностей и ее применения, 2004. Т. 49. Вып. 3. С. 3-22.

где

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy, z > 0.$$

Пожалуй, исторически первыми и самыми популярными объектами изучения в рамках данного направления являются случайные суммы как частный случай статистик, построенных по выборкам случайного объема. Не умаляя заслуг остальных из большого числа математиков, занимавшихся изучением асимптотических свойств случайных сумм, рассматривая историю развития фундаментальных исследований по асимптотической теории случайных сумм с независимыми индексами, упомянем лишь основопологающую работу Г. Роббинса[2], в которой для схемы «нарастающих сумм» приведены достаточные условия сходимости распределений случайных сумм к сдвиговым или масштабным смесям нормальных законов, статью Р.Л. Добрушина[3], в которой указаны возможные предельные законы для случайно индексированных случайных последовательностей. В работах Б.В. Гнеденко и его учеников была выдвинута задача построения необходимых и достаточных условий сходимости распределений случайных сумм в схеме серий и получены существенные результаты в этом направлении (указанная задача получила свое окончательное решение сравнительно недавно в работе В.Ю. Королева и В.М. Круглова[4]). Асимптотической теории случайного суммирования посвящены монографии В.М. Круглова и В.Ю. Королева[5], Б.В. Гнеденко и В.Ю. Королева[6], А. Гута[7].

[2] *H. Robbins.* The asymptotic distribution of the sum of a random number of rnadom variables // Bull. Amer. Math. Soc., 1948. V. 54. No. 12. P. 1151-1161.

[3] *Р. Л. Добрушин.* Лемма о пределе сложной случайной функции. // Успехи матем. наук, 1955. Т. 10. № 2(64). С. 157-159.

[4] *V. Yu. Korolev, V. M. Kruglov.* A criterion of convergence of nonrandomly centered random sums of independent identically distributed random variables. // Journal of Mathematical Sciences, 1998. V. 89. No. 5. P. 1495-1506.

[5] *В. М. Круглов, В. Ю. Королев* Предельные теоремы для случайных сумм. – М.: МГУ, 1990.

[6] *B. V. Gnedenko, V. Yu. Korolev.* Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.

[7] *A. Gut.* Stopped Random Walks. – New York: Springer, 1988.

Асимптотическое поведение статистик, построенных по выборкам случайного объема рассматривалось многими авторами. Проблематика данной диссертации непосредственно связана с исследованиями Б.В. Гнеденко[8], по-видимому, впервые обратившего внимание на то, сколь сильно трансформирует предельное распределение статистики замена неслучайного объема выборки случайной величиной, В.Ю. Королева[9] [10], в которых приведены критерии сходимости распределений статистик, построенных по выборкам случайного объема, и В.Ю. Королева и Е.В. Коссовой[11][12], в которых указанные результаты перенесены на многомерный случай. Данные вопросы нашли свое отражение в монографиях В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, И. А. Соколов, С. Я. Шоргин[13] и В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин[14].

Как уже упоминалось, случайные суммы являются частным случаем статистик со случайными индексами. Именно поэтому им посвящена значительная часть диссертации. Многочисленные и эффективные применения теории предельных распределений

---

[8] *Б. В. Гнеденко.* Об оценивании неизвестных параметров распределений по случайному числу независимых наблюдений // Теория вероятностей и математическая статистика. Труды Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1989. Т. 92. С. 146-150.

[9] *В. Ю. Королев.* Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I. // Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т. 39. № 2. С. 313-333.

[10] *В. Ю. Королев.* Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. // Теория вероятностей и ее применения, 1995. Т. 40, № 4. С. 907-910.

[11] *В. Ю. Королев, Е. В. Коссова.* Асимптотика случайно индексированных бесконечномерных случайных последовательностей: независимые индексы. // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: ВНИИСИ, 1990. С. 38-44.

[12] *В. Ю. Королев, Е. В. Коссова.* О предельных распределениях случайно индексированных многомерных случайных последовательностей при операторной нормировке. // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара. М.: ВНИИСИ, 1991. С. 85-100.

[13] *В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, И. А. Соколов и С. Я. Шоргин.* Рандомизированные модели и методы теории надежности информационных и технических систем. – М.: «Торус», 2007, 248 с.

[14] *В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин.* Математические основы теории риска. – М.: «Физматлит», 2007.

привели многих специалистов прикладных областей знания к убеждению, что если слагаемых очень много и они удовлетворяют минимальным условиям на одинаковую малость вероятностей больших значений, то распределение суммы должно быть близко к нормальному. Однако такое заключение не всегда является обоснованным. Так, если число слагаемых случайно, то их сумма может оказаться распределенной не по нормальному закону даже при условии, что каждое слагаемое нормально распределено. Такие ситуации часто возникают в теории надежности, теории риска, финансовой математике, теории массового обслуживания.

Для построения более точных, а следовательно, и более адекватных моделей используются случайные суммы. Зачастую на практике приходится приближать распределения таких случайных сумм некоторыми известными распределениями, как правило, отличными от нормальных. В связи с этим актуальной становится задача оценивания точности данной аппроксимации.

Объектами исследования являются, прежде всего, пуассоновские и смешанные пуассоновские случайные суммы, а также их частные случаи (например, отрицательные биномиальные случайные суммы). Получение равномерных оценок скорости сходимости распределения пуассоновских случайных сумм опирается на результаты работ Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогорова, И. А. Ибрагимова, Ю.В. Линника, В.В. Петрова, В.М. Золотарева, Р.Н. Бхаттачария и Р.Ранга Рао, В.В. Сенатова, В.Ю. Королева, С.Я. Шоргина, И.Г. Шевцовой и других. Неравномерные оценки скорости сходимости в классической предельной теореме, уточняемые в данной диссертации и применяемые к неравномерным оценкам для пуассоновских и смешанных пуассоновских случайных сумм, также имеют солидную историю. Им посвящены работы Л. Д. Мешалкина и Б.А. Рогозина, С. В. Нагаева, Р. Михеля, Л. Падитца.

В качестве области практического применения оценок скорости сходимости в диссертации рассматривается классическая задача страховой математики – аппроксимация вероятности разорения страховой компании. Эта задача, в частности, подробно рассмотрена в книгах В.Ю. Королева, В.Е. Бенинга и С. Я. Шоргина[14] и Е.В. Булинской[15]. Как известно, вероятность разорения в классическом процессе риска при известном распределении страховых выплат описывается формулой Поллачека-Хинчина-Беекмана, о которой будет подробнее рассказано далее. В случае, когда информация о распределении выплат отсутствует, для аппроксимации вероятности разорения при малой нагрузке безопасности неплохо работает оценка, полученная В. В. Калашниковым[16]. В диссертации приводится альтернативная двусторонняя оценка, более точная при некоторых распределениях страховых выплат.

Цель работы:

Целью данной работы является получение равномерных и неравномерных оценок скорости сходимости для пуассоновских, обобщенных пуассоновских и смешанных пуассоновских случайных сумм, а также асимптотически нормальных статистик, построенных по выборкам случайного объема.

Методика исследования:

Для решения задач в первой главе используются прямые методы математического анализа и неравенство сглаживания Эссеена. Во второй главе для получения равномерных оценок используются два различных представления отрицательной биномиальной случайной величины – в виде смешанной пуассоновской и обобщенной пуассоновской случайных сумм. Оценки вероятности разорения страховой компании во второй главе представляют собой обобщение доказательства формулы Поллачека-Хинчина-Беекмана на случай, когда распределение страховых выплат не известно. С целью уточнить неравномерные оценки в третьей главе применяется модифицированный метод Падитца[17],

[15] *Е. В. Булинская.* Теория риска и перестрахование. – Москва: изд-во ООО «МЭЙЛЕР», 2008, 190 с.

[16] *V. Kalashnikov.* Geometric Sums. Bounds for Rare Events with Applications. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[17] *L. Paditz.* On the analytical structure of the constant in the nonuniform version

заключающийся в подходящем разбиении вещественной прямой на зоны “малых”, “умеренных” и “больших” значений аргумента.

Научная новизна:

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Уточнены оценки скорости сходимости распределений регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема с отрицательным биномиальным распределением, в терминах равномерной и сглаженной равномерной метрик.

2. Получена равномерная оценка скорости сходимости для смешанных пуассоновских случайных сумм. На основе этой оценки уточнены оценки скорости сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм при «вероятности успеха», стремящейся к нулю, к масштабным смесям нормальных законов. В частности, уточнены оценки скорости сходимости распределений геометрических случайных сумм к распределению Лапласа.

3. Получена новая оценка скорости сходимости распределений случайных сумм с целочисленным безгранично делимым индексом, справедливая при более слабых моментных условиях. На основе этой оценки уточнены оценки скорости сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм при «числе успехов», стремящемся к бесконечности, к нормальному закону.

4. Получены новые двусторонние оценки для вероятности разорения страховой компании, резерв которой описывается классическим процессом риска.

5. Получена неравномерная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для неслучайных сумм с уточненной структурой. На основе этой оценки

---

of the Esseen inequality // Statistics (Berlin: Akademie-Verlag), 1989. V. 20. No. 3. P. 453-464.

уточнены абсолютные константы в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских и смешанных пуассоновских случайных сумм.

Практическая значимость:

Несмотря на то, что работа носит теоретический характер, полученные в ней оценки скорости сходимости могут найти применение на практике, в частности, при аппроксимации распределений вероятностей, возникающих в теории риска, теории надежности, финансовой математике, теории массового обслуживания и многих других прикладных областях.

Апробация работы:

Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ "Теория риска и смежные вопросы"(2007, 2009, 2010 гг.), конференции "Ломоносов-2007" (2007 г.), научной конференции "Тихоновские чтения" (2010г.), семинаре кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ "Аппроксимация нормальным распределением" (2010 г.).

Публикации:

Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]) из них 2 статьи опубликованы в журнале, включенном в перечень ВАК ([2], [5]).

Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, и списка литературы, содержащего 76 наименований. Общий объем работы составляет 119 страниц.

Содержание работы

Первая глава посвящена аппроксимации распределения статистик, построенных по выборкам случайного объема с отрицательным биномиальным распределением.

§1 представляет собой введение с обоснованием актуальности исследования статистик, построенных по выборке случайного объема, и обзором известных результатов по аппроксимации распределений данных статистик.

В **§2** приводится асимптотика расстояния между отрицательным биномиальным распределением и гамма-распределением.

Пусть $N_{p,r}$ – случайная величина, имеющая отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r,p), $r \in (0,1)$, то есть
$$\mathsf{P}\left(N_{p,r}=k\right)=\frac{\Gamma(r+k)}{k!\,\Gamma(r)}p^r(1-p)^k,\quad k=0,1,2,\dots$$

Рассмотрим случайную величину $N^*_{p,r}$, связанную с $N_{p,r}$ следующим образом:
$$N^*_{p,r}=\frac{N_{p,r}}{\mathsf{E}N_{p,r}}. \tag{1}$$

Теорема 1.1 *Пусть $N^*_{p,r}$– случайная величина, определенная в* (1)*, а $G_{r,r}(x)$– функция гамма-распределения с параметрами r,r. Тогда*
$$\sup_{x\geqslant 0}\left|\mathsf{P}(N^*_{p,r}\leqslant x)-G_{r,r}(x)\right|=\begin{cases}O(p), & r\geqslant 1,\\ O(p^r), & 0<r<1.\end{cases}$$

Данная теорема играет ключевую роль в доказательстве основного результата главы.

Доказательство теоремы 1.1 состоит из трех этапов: оценка расстояния между функциями распределений в точке, оценка на отрезке и, наконец, равномерная оценка на всей прямой.

В качестве вспомогательных утверждений в работе доказываются леммы, обобщающие формулы среднего значения на полуинтервалы.

В **§3** приводится обзор (а затем уточнение) известных оценок скорости сходимости распределений статистик, построенных по выборке случайного объема с отрицательным биномиальным распределением, т.е. статистик вида

$$T_{N_n} = T(X_1, \ldots, X_{N_n}), \tag{2}$$

где N_n имеет отрицательно биномиальное распределение

$$\mathsf{P}(N_k = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\,\Gamma(r)} \frac{1}{n^r} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Пусть $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения,

$$F_{2r}(x) = \mathsf{E}\Phi(x\sqrt{U}) = \int\limits_0^{+\infty} \Phi(x\sqrt{u})\, d\,G_{r,r}(u), \quad -\infty < x < \infty,$$

статистика T_n – асимптотически нормальна, т.е. существуют функции $\sigma(\theta) > 0$ и $t(\theta)$ такие, что при каждом $\omega \in \Omega$

$$\mathsf{P}_\theta\big(\sigma(\theta)\sqrt{n}(T_n - t(\theta)) < x\big) \to \Phi(x) \quad (n \to \infty)$$

Более того, имеет место следующая скорость сходимости:

$$\sup_x \left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{n}\,(T_n - \mu) \leqslant x) - \Phi(x)\right| = O\left(n^{-1/2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Известны следующие оценки скорости сходимости распределения статистики T_{N_n} к $F_{2r}(x)$

- Селиванова, 1995[18]: для натуральных r
  $\Delta_n \equiv \sup\limits_x \left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{r(n-1)}(T_{N_n} - \mu) \leqslant x) - F_{2r}(x)\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$
- Бенинг, Королев, У Да, 2004[19]:
  $\Delta_n = O\left(n^{-\frac{r}{r+1}}\right), \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant 1.$

---

[18] *Д. О. Селиванова.* Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для случайных сумм. // Дис. канд. физ. -матем. наук. – МГУ, 1995.

[19] *В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, У. Да.* Оценки скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Стьюдента. // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. «Прикладная математика и информатика» , 2004. № 1(12). С. 59-74.

- Беврани, Бенинг, Королев, 2005[20]: При $0 < r \leqslant 1$
  - для каждого *фиксированного* $x \in \mathbb{R}$
  $$\left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{r(n-1)}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x)-F_{2r}(x)\right| = O(n^{-1/2});$$
  - для каждого *конечного* интервала $[-M,\, M]$
  $$\sup_{-M\leqslant x\leqslant M}\left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{r(n-1)}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x)-F_{2r}(x)\right| =$$
  $$= O\big(n^{-\frac{3r+1}{4(r+1)}}\big);$$
  - для *неограниченного* хотя бы с одной стороны множества $\mathcal{Q}\subseteq\mathbb{R}$
  $$\sup_{x\in\mathcal{Q}}\left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{r(n-1)}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x)-F_{2r}(x)\right| = O\big(n^{-\frac{r}{r+1}}\big).$$

Основным результатом первой главы является следующая теорема, уточняющая указанные оценки.

Теорема 1.2 *Пусть распределение статистики $T_n = T_n(X_1,\ldots,X_n)$ удовлетворяет соотношению (4), тогда распределение статистики $T_{N_n} = T_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n})$, где случайная величина имеет отрицательное биномиальное распределение вида (3) с параметром $r \in (0,1]$, при $n\to\infty$ удовлетворяет соотношению*

$$\sup_x\left|\mathsf{P}(\sigma\sqrt{r(n-1)}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x)-F_{2r}(x)\right| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & r\in[\frac12,1],\\ O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right), & r=\frac12,\\ O\left(\frac{1}{n^r}\right), & 0<r<\frac12.\end{cases}$$

В случае, когда N_n имеет геометрическое распределение ($r=1$), из доказательства теоремы 1.2 непосредственно следует, что если

[20] *Х. Беврани, В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев.* О точности аппроксимации отрицательного биномиального распределения гамма-распределением и скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Стьюдента. // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. – Пермь: Изд-во Пермского гос. ун-та, 2005. С. 88-103.

для распределения статистики $T_n = T_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедлива оценка скорости сходимости вида:

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\left(\sigma\sqrt{n}(T_n-\mu)\leqslant x\right)-\Phi(x)\right| = O\left(n^{-1/2}\right), \quad n=1,2,\ldots,$$

для некоторых $\sigma>0$ и $\mu\in\mathbb{R}$, то

$$\sup_x \left|\mathsf{P}\left(\sigma\sqrt{n-1}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x\right)-F_2(x)\right| = O\left(n^{-1/2}\right), \quad n=1,2,\ldots,$$

где

$$F_2(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right).$$

В **§4** говорится, что в некоторых случаях для оценки расстояния между функциями распределений вместо равномерной метрики более целесообразно использование сглаженной равномерной метрики:

$$\rho_H(F,G)=\sup_x |(F*H)(x)-(G*H)(x)|,$$

где H – некоторое абсолютно непрерывное распределение. Обозначим

$$S_{n,r}(x)=\mathsf{P}\left(\sigma\sqrt{n-1}(T_{N_n}-\mu)\leqslant x\right).$$

Далее приводится оценка скорости сходимости статистик, построенных по выборке со случайным объемом, имеющим отрицательное биномиальное распределение, в терминах сглаженной равномерной метрики.

Теорема 1.3. *Предположим, что имеет место соотношение (4), $0<r<1$. Пусть $H(x)=1-e^{-rx}$, $x\geqslant 0$, – функция показательного распределения с параметром r. Тогда при $n\to\infty$*

$$\rho_H(S_{n,r},F_{2r})=O(n^{-1/2}).$$

Во **второй главе** речь идет о скорости сходимости отрицательных биномиальных случайных сумм.

В **§1** рассматривается случай, когда пармаметр отрицательного биномиального распределения p стремится к нулю. Для получения оценок скорости сходимости в данном случае используется представление отрицательного биномиального распределения в виде смешанного пуассоновского распределения.

Пусть $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ – случайная величина со смешанным пуассоновским распределением,

$$\mathsf{P}(N(t) = k) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^k d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Lambda(t)$ – некоторая положительная случайная величина. Будем называть ее структурной случайной величиной смешанного пуассоновского распределения $N(t)$. Определим смешанную пуассоновскую случайную сумму следующим образом:

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \qquad \sum_{j=1}^{0} (\cdot) = 0.$$

Будем предполагать, что для некоторого $\delta \in (0, 1]$

$$\mathsf{E}(X_1) = 0, \quad \mathsf{D}(X_1) = 1 \quad \text{и, кроме того,} \ \beta_{2+\delta} = \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty \tag{5}$$

Известно, что если распределение структурной случайной величины $\Lambda(t)$ при надлежащей нормировке сходится по распределению к некоторой случайной величине Λ, а именно

$$\frac{\Lambda(t)}{t} \xrightarrow{d} \Lambda \qquad (t \to \infty), \tag{6}$$

то

$$\mathsf{P}(S(t) < x\sqrt{t}) \to \int_0^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda) \qquad (t \to \infty).$$

Одним из основных результатов второй главы являются равномерные оценки скорости указанной сходимости, приводимые в следующем утверждении.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия* (5) *и* (6). *Тогда для любого* $t > 0$

$$\sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\Big) - \int_0^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big) d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda) \right| \leqslant C(\delta)\beta_{2+\delta}\mathsf{E}[\Lambda(t)]^{-\delta/2} + \frac{1}{2}\Delta_t,$$

где

$$\Delta_t = \sup_x \left| \mathsf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)}{t} < x\Big) - \mathsf{P}(\Lambda < x) \right|,$$

$C(\delta)$ – *положительная конечная константа из неравенства Каца–Берри–Эссеена, зависящая только от параметра* δ.

Наилучшие на сегодняшний день конкретные верхние оценки константы $C(\delta)$ приведены в работе М. Е. Григорьевой и И. Г. Шевцовой[21].

Следствие 2.1 *Пусть случайная величина* $N(t)$ *имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами* $r > 0$ *и* $p = \frac{r}{r+t}$, *где* $t > 0$. *Предположим, что выполнено условие* (5) *и* $r > \frac{\delta}{2}$. *Тогда для каждого* $t > 0$

$$\sup_x \left| \mathsf{P}(S(t) < x\sqrt{t}) - \int\limits_0^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{y}}\Big) dG_{r,r}(y) \right| \leqslant C(r,\delta) \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{t^{\delta/2}},$$

где

$$C(r,\delta) = \frac{r^{\delta/2}\Gamma(r - \delta/2)}{\Gamma(r)} \cdot C(\delta).$$

Следствие 2.2 *Пусть случайная величина* $N(t)$ *имеет геометрическое распределение с параметрами* $p = (1+t)^{-1}$, *где* $t > 0$. *Предположим, что* $\mathsf{E}|X_1|^3 \equiv \beta_3 < \infty$. *Тогда для каждого* $t > 0$

$$\sup_x |\mathsf{P}(S(t) < x\sqrt{t}) - L(x)| \leqslant 0.5391 \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{t}}.$$

В **§2** рассмотрен случай, когда параметр r отрицательного биномиального распределения стремится к бесконечности. Теперь отрицательная биномиальная случайная величина представляется в виде целочисленной безгранично делимой случайной величины.

Пусть M – некоторая неотрицательная целочисленная случайная величина, X – произвольная случайная величина. Случайную величину, характеристическая функция которой

[21] *Григорьева М. Е., Шевцова И. Г.* Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена // Информатика и ее применения. 2010. Т. 4, вып. 2. С. 78–85.

равна $\psi_M(f_X(t))$, будем обозначать символом $\{M, X\}$. Несложно убедиться (см., например, книгу В. Ю. Королева, В. Е. Бенинга, С. Я. Шоргина[14]), что если случайная величина Z может быть представлена в виде

$$Z \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{M} X_j,$$

где $X_1, X_2, \ldots$ – одинаково распределенные случайные величины, причем случайные величины $M, X_1, X_2, \ldots$ независимы, то $Z \stackrel{d}{=} \{M, X\}$, где $X \stackrel{d}{=} X_j$ (для определенности будем считать, что $\sum_{j=1}^{0} X_j = 0$). Случайную величину $S_M = \{M, X\}$ будем называть случайной суммой. При этом случайная величина M будет называться индексом, а случайная величина X – случайным слагаемым.

Будем считать, что случайное слагаемое X удовлетворяет условиям

$$\mathsf{E}X = 0, \qquad \mathsf{D}X = 1. \tag{7}$$

Предположим, что распределение случайной величины M является безгранично делимым в классе распределений неотрицательных целочисленных случайных величин, то есть для любого натурального числа n существует такая неотрицательная целочисленная случайная величина M_n', что

$$M \stackrel{d}{=} \{n, M_n'\}.$$

Как известно (см., например, книгу В. Феллера[22], гл. XII, § 3), распределение является безгранично делимым в классе распределений неотрицательных целочисленных случайных величин тогда и только тогда, когда оно является обобщенным пуассоновским, то есть соответствующая ему характеристическая функция имеет вид

$$f_M(t) = \exp[\lambda(f_Y(t) - 1)]$$

[22] *В. Феллер* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984.

для некоторого $\lambda > 0$, где $f_Y(t)$ – характеристическая функция некоторой неотрицательной целочисленной случайной величины Y. Другими словами,

$$M \stackrel{d}{=} \{N_\lambda, Y\}, \tag{8}$$

где N_λ – пуассоновская случайная величина с параметром λ.

Будем считать, что

$$\mathsf{E}|X|^3 = \beta_3 < \infty, \tag{9}$$

и, кроме того, существуют первые три момента случайной величины M.

Одним из главных результатов второй главы является следующая теорема.

Теорема 2.4 *Пусть целочисленная неотрицательная случайная величина M является безгранично делимой, причем случайная величина Y в представлении* (8) *удовлетворяет условию* $\mathsf{E}Y^{3/2} < \infty$. *Предположим, что выполнены также условия* (7) *и* (9). *Тогда справедлива оценка*

$$\Delta = \sup_x |P(S_M < \sqrt{\mathsf{E}M}x) - \Phi(x)| \leqslant 1.5205 \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\mathsf{E}Y^{3/2}}{(\mathsf{E}Y)^{3/2}}.$$

Данная оценка сравнивается с оценкой, полученной в работе С.Я. Шоргина[23]:

$$\Delta \leqslant \frac{0.3041}{\sqrt{\lambda}} \times$$
$$\times \frac{\mathsf{E}[Y(Y-1)(Y-2)](\mathsf{E}|X|)^3 + 3\mathsf{E}[Y(Y-1)]\mathsf{E}|X|\mathsf{E}X^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{E}|X|^3}{[\mathsf{E}Y^2(\mathsf{E}X)^2 + \mathsf{E}Y\mathsf{D}X]^{3/2}}.$$

В результате получаем, что для слагаемых с нулевым средним теорема 2.4 имеет более широкую область применимости (требуется только конечность момента $\mathsf{E}Y^{3/2}$, при этом допустимо $\mathsf{E}Y^2 = \infty$). Для ситуации, когда применимы обе оценки, в диссертации

[23] *С. Я. Шоргин.* О точности нормальной аппроксимации распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами // Теория вероятностей и ее применения, 1996. Т. 41. Вып. 4. С. 920-926.

приведен пример, показывающий, что теорема 2.4 дает более точную оценку, нежели результаты работы С.Я. Шоргина[23]. Однако, вообще говоря, оценки из работы С.Я. Шоргина[23] несравнимы с оценкой, устанавливаемой теоремой 2.4.

Из теоремы 2.4 вытекает оценка точности нормальной аппроксимации для распределения отрицательных биномиальных случайных сумм.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены условия* (7) *и* (9). *Тогда для распределения отрицательной биномиальной случайной суммы* S_M *с параметрами* $r > 0$ *и* $p \in (0,1)$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_r = \sup_x \left| \mathsf{P}\left(S_M < x\sqrt{\frac{r(1-p)}{p}} \right) - \Phi(x) \right| \leqslant K(p)\frac{\beta_3}{\sqrt{r}},$$

где

$$K(p) = \frac{1.5205}{\sqrt{1-p}} \min\left\{ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{(1-p)(2+p)^{3/2}} \left[\sqrt{\pi} + \frac{p}{\sqrt{2}} \left(\frac{2-p}{1-p} \right) \right] \right\}.$$

В **§3** решается практическая задача оценки вероятности разорения страховой компании.

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_u(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k,\ \ t \geqslant 0.$$

$u > 0$ – стартовый капитал страховой компании, $c > 0$ – интенсивность роста страховой премии, $N(t)$ – точечный случайный процесс, описывающий поток страховых выплат.

В рассматриваемой классической модели предполагается, что $N(t)$ – пуассоновский процесс с некоторой интенсивностью $\Lambda > 0$. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$, описывающие размеры последовательных страховых выплат, предполагаются неотрицательными и независимыми с общей функцией распределения $F(x)$. Более того, считаем, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ и процесс $N(t)$ независимы. Для определенности положим $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$. Обозначим

$$\mu_k = \mathsf{E}X_1^k, \quad k \geqslant 1.$$

Предположим, что $\mu_1 > 0$ и $\mu_4 < \infty$.

Нагрузкой безопасности принято называть величину

$$\rho = \frac{c}{\Lambda\mu_1} - 1.$$

Эта величина имеет смысл удельного дохода страховой компании в единицу времени. Под вероятностью разорения будем подразумевать функцию

$$\psi(u) = \mathsf{P}(\inf_{t>0} R_u(t) < 0).$$

Как известно, задача нахождения вероятности разорения в классическом процессе риска решается с помощью формулы Поллачека–Хинчина–Беекмана. Однако данную формулу можно применять для практических рассчетов только тогда, когда известно распределение страховых выплат.

В **§3** доказывается двусторонняя оценка вероятности разорения для случая когда распределение страховых выплат неизвестно.

Теорема 2.8 *Пусть $R_u(t)$ – классический процесс риска с нагрузкой безопасности ρ, стартовым капиталом и и одинаково распределенными страховыми выплатами $X_1, X_2, \ldots$ такими, что $\mathsf{E}X_1 = \mu_1 > 0$, $\mathsf{E}X_1^4 = \mu_4 < \infty$. Тогда вероятность разорения страховой компании $\psi(u)$ удовлетворяет соотношению*

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\delta}\exp\left\{-\frac{4\rho\mu_1 u}{\mu_2(1+\beta)}\right\}\right| \leqslant 0.7002 \cdot \frac{\mu_4\sqrt{\mu_1\rho}}{(\mu_3)^{3/2}},$$

где

$$\delta = \frac{\sqrt{\mu_2 + 8\rho\mu_1\mu_3/3} - \mu_2}{\sqrt{\mu_2 + 8\rho\mu_1\mu_3/3} + \mu_2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu_2 + 8\rho\mu_1\mu_3/3}}{\mu_2}.$$

Полученная оценка далее сравнивается с оценкой из работы В. Калашникова[16], в результате чего делается вывод о том, что для некоторых распределений X_i при разумных значениях нагрузки безопасности ρ ($\rho \geqslant 0,12$) теорема 2.8 дает более точную оценку вероятности разорения, чем работа В. Калашникова[16].

Третья глава посвящена уточнению неравномерной оценки скорости сходимости распределений неслучайных сумм, а также пуассоновских и смешанных пуассоновских случайных сумм.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 = 1$, $\mathsf{E}|X_1|^3 = \beta_3 < \infty$.

Положим $F_n(x) = \mathsf{P}\big(X_1 + \ldots + X_n < x\sqrt{n}\big)$.

Известно, что при указанных условиях существуют абсолютные положительные конечные константы C_0 и C_1 такие, что

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_0 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

(A. C. Berry[24],C. -G. Esseen[25]) и

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_1 \frac{\beta_3 + 1}{\sqrt{n}} = C_1 \Big(1 + \frac{1}{\beta_3}\Big) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

(В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова[26], В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова[27]). Для констант C_0 и C_1 известны следующие численные оценки:

$$0.4097 \approx \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \leqslant C_0 \leqslant 0.4784$$

(C. -G. Esseen[28], В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова[26]),

$$0.2659 \approx \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \leqslant C_1 \leqslant 0.3041$$

[24] *A. C. Berry.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of the distributed random variables. // J.Theor. Probab, 1994. V. 2. No. 2. P. 211-224.

[25] *C. -G. Esseen.* On the Liapunoff limit of error in the theory of probability // Ark. Mat. Astron. Fys., 1942. V. A28. No. 9. P. 1-19.

[26] *В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова.* Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25-56.

[27] *В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм. // Доклады Российской академии наук, 2010. Т. 431. Вып. 1. С. 16-19.

[28] *C. -G. Esseen.* A moment inequality with an application to the central limit theorem // Skand. Aktuarrietidskr, 1956. V. 39. P. 160-170.

(В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова[26], В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова[27]).

По-видимому, исторически первая неравномерная оценка нормальной аппроксимации была получена в работе Л. Д. Мешалкина, Б. А. Рогозина[29], где для случая $\delta = 1$, то есть для случая существования третьего момента слагаемых было доказано существование конечной положительной абсолютной постоянной A такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$(1+x^2)|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant A \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

Этот результат был усилен в работе С. В. Нагаева[30], где было показано, что существует такое положительное конечное число C, что

$$\sup_x \left(1+|x|^3\right)\left|F_n(x)-\Phi(x)\right| \leqslant C\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}. \quad (10)$$

При этом, при рассматриваемых условиях на моменты слагаемых порядок оценки (10) по x неулучшаем без дополнительных предположений.

Что касается значения абсолютной константы C в (10), то в работе R. Michel[31] было показано, что $C \leqslant C_0 + 8(1+e)$, что с учетом оценки $C_0 \leqslant 0.4784$, полученной в работах В. Ю. Королева, И. Г. Шевцовой[26 27], влечет оценку $C \leqslant 30.2247$. Недавно данная оценка была уточнена в работе Ю. С. Нефедовой, И. Г. Шевцовой[32], где было показано, что $C \leqslant 25.7984$.

В **§1** с помощью модификации метода Падитца[33] получена неравномерная оценка скорости сходимости в ЦПТ с уточненной

[29] *Л. Д. Мешалкин, Б. А. Рогозин.* Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме // Предельные теоремы теории вероятностей. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963. С. 40-55.

[30] *С. В. Нагаев.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения, 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 231-254.

[31] *R. Michel.* On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution. // Insurance: Mathematics and Economics, 1993. V. 13. No. 1. P. 35-37.

[32] *Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Информатика и ее применения, 2010. Т. 4. Вып. 4. В печати.

[33] *L. Paditz.* Einseitige Fehlerabschätzungen im zentralen Grenzwertsatz. // Math. Operationsforsch. und Statist., ser. Statist., 1981. Bd. 12. S. 587-604.

структурой.

Следствие 3.3 *Для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и всех* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$(1+|x|^3)\big|F_n(x)-\Phi(x)\big| \leqslant 22.7707 \cdot \frac{\beta_3+1}{\sqrt{n}}.$$

Данный результат позволяет уточнить константу в неравномерной оценке скорости сходимости в ЦПТ для пуассоновских случайных сумм, чему посвящен **§2**.

Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что

$$\mathsf{E}X_1 \equiv \mu, \quad \mathsf{D}X_1 \equiv \sigma^2 > 0, \quad \mathsf{E}|X_1|^3 \equiv \beta_3 < \infty. \tag{11}$$

Пусть N_λ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы.

Рассмотрим пуассоновскую случайную сумму

$$S_\lambda = X_1 + \cdots + X_{N_\lambda}.$$

Для определенности полагаем, что $S_\lambda = 0$ при $N_\lambda = 0$. Несложно видеть, что в рассматриваемых условиях на моменты случайной величины X_1 справедливы соотношения

$$\mathsf{E}S_\lambda = \lambda\mu, \quad \mathsf{D}S_\lambda = \lambda(\mu^2+\sigma^2).$$

Функцию распределения стандартизованной пуассоновской случайной суммы

$$\widetilde{S}_\lambda \equiv \frac{S_\lambda - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}$$

обозначим $F_\lambda(x)$.

Теорема 3.2 *При условиях* (11) *для любого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^3)|F_\lambda(x)-\Phi(x)| \leq \frac{D\beta_3}{\lambda^{1/2}(\mu^2+\sigma^2)^{3/2}},$$

где константа D та же, что и в следствии 3.3, т. е. $D \leqslant 22.7707$.

Наконец, в **§3** третьей главы изучаются неравномерные оценки корости сходимости в предельных теоремах для смешанных пуассоновских случайных сумм.

Пусть $\Lambda(t)$ – положительная случайная величина, функция распределения $G_t(x) = \mathsf{P}(\Lambda(t) < x)$ которой зависит от некоторого параметра $t > 0$. Под смешанным пуассоновским распределением со структурным распределением G_t будем подразумевать распределение случайной величины $N(t)$, принимающей целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathsf{P}\big(N(t) = k\big) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k dG_t(\lambda), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Обозначим $S(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$. Пусть

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{E}X_1^2 = 1, \quad \beta^3 = \mathsf{E}|X_1|^3 < \infty, \tag{12}$$

и $d(t)$, $t > 0$, – некоторая положительная неограниченно возрастающая функция.

Известно, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) \xrightarrow{d} \int\limits_0^\infty \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{y}}\Big) dG(y), \quad x \in \mathbb{R} \quad (t \to \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$G_t\big(xd(t)\big) \xrightarrow{d} G(x) \quad (t \to \infty).$$

Обозначим

$$\Delta_t(x) = \left|\mathsf{P}\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) - \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) dG(\lambda)\right|,$$

$$\delta_t(x) = G_t\big(x\, d(t)\big) - G(x).$$

Теорема 3.4 *Предположим, что выполнены условия* (12). *Тогда при каждом* $t > 0$ *при любом* $x \in \mathbb{R}$ *имеет место оценка*

$$\Delta_t(x) \leqslant 22.7707 \cdot \frac{\beta_3}{\sqrt{d(t)}} \cdot \mathsf{E}\left\{ \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \left[\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \right)^{3/2} + |x|^3 \right]^{-1} \right\} +$$

$$+ \int\limits_0^\infty |\delta_t(\lambda)| \, d_\lambda \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Виктора Юрьевича Королева, которому автор выражает искреннюю благодарность.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *С.В. Гавриленко, В.Ю. Королев* "Оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм.", Системы и средства информатики, специальный выпуск. ИПИ РАН, Москва, 2006. С. 248-257.

2. *С.В. Гавриленко* "Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами к нормальному закону". Информатика и ее применения. 2010. Т. 4. Вып. 4. С. 81-89.

3. *С.В. Гавриленко, В.Н. Зубов, В.Ю. Королев* "Оценка скорости сходимости регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема с отрицательным биномиальными распределением, к распределению Стьюдента". Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь: изд-во Пермского гос. ун-та, 2006. С. 118-134.

4. *С.В. Гавриленко, В.Ю. Королев* "Об оценках вероятности разорения страховой компании, резерв которой описывается классическим процессом риска". Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь: изд-во Пермского гос. ун-та, 2010. С. 137-147.

5. *С.В. Гавриленко* ”Уточнение неравномерной оценки скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону”. Информатика и ее применения. 2011. Вып. 1. С. 11-22.

6. *С.В. Гавриленко* ”Неравномерные оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм”. Труды конференции ”Ломоносов-2007”, Москва, 2007. С. 15.

7. *С.В. Гавриленко* ”Оценки скорости сходимости распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами к нормальному закону”. Материалы научной конференции ”Тихоновские чтения”, Москва, 2010. С. 59-60.

В работе [3] Гавриленко С.В. принадлежит доказательство асимптотики равномерного расстояния между отрицательным биномиальным распределением и гамма-распределением на конечном отрезке и на действительной прямой, оценка остаточного члена в разложении функции распредления отрицательного биномиального распределения в точке, формулировка и доказательство лемм, обобщающих формулы среднего значения на полуинтервалы, оценка скорости сходимости распределений рассматриваемых в работе статистик к распределению Стьюдента.

В работе [1] Гавриленко С.В. принадлежит оценка скорости сходимости распределений отрицательных биномиальных случайных сумм.

В работе [4] Гавриленко С.В. принадлежит доказательство оценки вероятности разорения страховой компании, построение практических примеров, доказывающих актуальность данной оценки.