

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Кругляков Михаил Сергеевич

**Численные методы решения интегральных  
уравнений в задачах электромагнитного  
зондирования неоднородных сред**

01.01.07 – Вычислительная математика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики Факультета ВМК  
МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Дмитриев Владимир Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Барашков Александр Сергеевич  
доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Куркина Елена Сергеевна

Ведущая организация: Институт Прикладной Математики  
РАН

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании  
диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном  
университете имени М.В.Ломоносова, расположенном по адресу: 119991,  
Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК  
МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК МГУ  
имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Е.В. ЗАХАРОВ

# Общая характеристика работы

## Актуальность работы

Одним из активно развивающихся направлений современной прикладной геофизики является электромагнитное зондирование. В его основе лежит математическое моделирование электромагнитных процессов, происходящих в неоднородных средах. Решение вычислительных проблем, возникающих при численном моделировании таких процессов является сложной и актуальной задачей.

Методы электромагнитного зондирования различаются по типу используемого источника: это может быть либо естественное электромагнитное поле Земли, либо какие-нибудь искусственные источники. Традиционно искусственные источники используются для проведения локального зондирования — когда расстояние между источником поля и областью наблюдения сравнительно невелико. Однако в последнее время все больший интерес вызывает применение мощных стационарных электромагнитных источников для выявления структур, расположенных на расстояниях порядка десятков и сотен километров от источника.

Особый практический интерес представляет вопрос о возможности использования стационарного источника, расположенного на суше, для зондирования структур, расположенных под морским дном. Измерения при этом проводятся на дне, а источником может выступать как специально изготовленная антенна или токовая петля, так и обычная линия электропередач или железная дорога, к которым подключается соответствующий передатчик. Подобные эксперименты уже проводятся, например, Полярным геофизическим институтом. Эти эксперименты, в частности, подтвердили практическую возможность измерения поля. Однако с прямым моделированием подобных задач и, тем более, с решением соответствующих обратных задач ситуация го-

раздо сложнее.

Основную трудность при моделировании удаленного морского зондирования составляют большой размер (крупномасштабность) модели и необходимость учета как распределения проводимости на берегу, на котором расположен источник, так и в море, где производятся измерения. Кроме того, необходимо учитывать следующие аспекты:

- Растекание тока по суше вблизи источника. Точное моделирование такого растекания в настоящее время не представляется возможным, однако для морских измерений это растекание необходимо учитывать, например, заменой реального источника неким эквивалентным диполем с неизвестным моментом.
- Влияние берегового эффекта, заключающегося в концентрации тока вдоль берега, которым невозможно пренебречь, если источник расположен на суше.
- В случае источника, расположенного на острове, возникает так называемый островной эффект, когда ток замыкается вокруг острова, образуя гигантскую токовую петлю.

Вычислительные аспекты электромагнитных методов геофизики базируются на математическом аппарате электродинамики. Этот аппарат включает в себя численные методы решения краевых задач для уравнений Максвелла конечно-разностными или конечно-элементными методами, или численное решение эквивалентных интегральных уравнений.

Метод интегральных уравнений электродинамики основан на концепции аномалии, расположенной в слоистой (многослойной) среде. При этом пространство моделируется слоистой средой, в которой электромагнитные характеристики каждого слоя — диэлектрическая проницаемость, проводимость и

магнитная проницаемость являются постоянными. В некоторой области этого пространства расположена аномалия — тело, электромагнитные характеристики которого отличны от соответствующих характеристик объемлющего пространства. При этом интегральное уравнение пишется по аномалии, а его решение позволяет рассчитать электромагнитное поле в любой точке пространства. Вычислительные ресурсы, необходимые для решения такого интегрального уравнения, зависят от соотношения между геометрическими размерами аномалии и длиной электромагнитной волны в аномалии.

До недавнего времени метод интегральных уравнений практически не использовался для решения крупномасштабных задач в силу технических ограничений на размер матрицы системы линейных уравнений. Однако с появлением суперкомпьютеров, позволяющих обрабатывать полные матрицы порядок которых составляет несколько миллионов, использование этого метода становится вполне реальным. В настоящее время метод интегральных уравнений является основным для решения прямых задач электромагнитного зондирования в следующих коллективах: группа под руководством д.ф.-м.н профессора В. И. Дмитриева в МГУ, группа под руководством академика РАН Е. П. Велихова в НИЦ “Курчатовский Институт” (при взаимодействии с группой сотрудников ИФЗ под руководством д.ф.-м.н С. М. Коротаева).

Традиционный численный метод решения интегральных уравнений электродинамики — метод коллокаций<sup>1,2</sup> и его развитие — метод сжимающих интегральных уравнений<sup>3</sup>, являются эффективными при размерах аномалии порядка нескольких длин волн в этой аномалии. Однако для крупномасштаб-

---

1 *В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 316 с.

2 *А.Б. Самохин.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио и связь, 1998. — 160 с.

3 *М.С. Жданов.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике: Пер.с англ. — М.: Научный мир, 2007. — 712 с.

ного моделирования — когда размеры аномалии составляют несколько десятков длин волн, использование этих методов приводит к необходимости решать системы линейных уравнений высоких ( $10^6$ – $10^8$ ) порядков.

Другим подходом к численному решению интегральных уравнений электродинамики является метод интегральных токов<sup>1,4</sup>. Если требуется рассчитать электромагнитное поле в точках, удаленных от высокопроводящей аномалии, расположенной в изолирующей среде, то этот метод является существенно менее требовательным к вычислительным ресурсам, нежели метод коллокаций. Это обстоятельство позволяет использовать данный метод для ряда задач крупномасштабного моделирования, но при расчетах поля внутри аномалии метод интегральных токов предъявляет примерно те же требования к вычислительным ресурсам, что и метод коллокаций.

В большинстве задач удаленного морского зондирования электромагнитное поле необходимо рассчитывать на дне моря, т.е. внутри сильно проводящей крупномасштабной аномалии.

В некоторых задачах морского зондирования в качестве аномалии можно выбрать сушу, а не море, но в этом случае возникают сложности связанные с тем, что источник поля расположен в аномалии. В таких задачах правая часть интегрального уравнения содержит особенность, которая затрудняет решение методом коллокаций. При использовании метода интегральных токов такая особенность не создает проблем, но, поскольку в этом случае приходится рассчитывать поле внутри изолирующей аномалии, расположенной в проводящей среде, эффективность метода интегрального тока также не очень высока.

Другая вычислительная трудность, возникающая при обсчете задач мор-

---

4 Zhdanov M.S., Dmitriev V.I., Gribenko A.V. Integral Electric Current Method in 3-D Electromagnetic Modeling for Large Conductivity Contrast // *IEEE Transaction on Geoscience and remote sensing*. — 2007. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 1282–1290.

ского зондирования, связанная больше не с проводимостью, а с геометрическими размерами моря, заключается в том, что даже при зондировании на низких частотах, когда длина волны велика, моделирование моря в виде трехмерной структуры все равно требует значительных вычислительных мощностей, доступных только на суперкомпьютерах. В ряде случаев можно понизить размерность решаемой задачи и перейти от трехмерной задачи к квази-трехмерной или двумерной, которые гораздо менее требовательны к ресурсам.

### **Цель диссертационной работы**

Цель диссертационной работы состоит в разработке новых и адаптации известных численных методов решения трехмерных интегральных уравнений электродинамики для задач морского электромагнитного зондирования.

### **На защиту выносятся следующие основные результаты и положения**

- Разработан и исследован новый численный метод решения трехмерных сингулярных уравнений электродинамики, основанный на определении интегральных средних от точного решения. Для данного метода доказана сходимость и устойчивость.
- Проведена программная реализация разработанного метода. Для квази-трехмерной и осесимметрической задач морского электромагнитного зондирования проведено численное исследование разработанного метода, показавшее его высокую эффективность при исследовании высококонтрастных неоднородных сред.
- На основе проведенных расчетов была произведена оценка зоны берегового эффекта и обнаружен эффект роста горизонтальной компонен-

ты электрического поля с увеличением глубины, вызванный подкачкой энергии под морским дном.

## **Научная новизна**

Полученные результаты являются новыми. Предложен модифицированный метод интегральных токов и приведено его формализованное описание. Для данного метода доказана сходимости и устойчивость в квадратичной норме. Сформулированы условия, при которых предложенный модифицированный метод интегральных токов сходится с первым порядком. Сформулирована и доказана теорема об оценке погрешности приближенного решения. Эта оценка формируется на основе приближенного решения без какого-либо использования точного решения.

Выполнен аналитический переход от трехмерного векторного интегрального уравнения к параметрическому семейству двумерных векторных интегральных уравнений в квази-трехмерной задаче электродинамики. Построен алгоритм вычисления коэффициентов системы линейных уравнений, возникающей при применении модифицированного метода интегральных токов к квази-трехмерной задаче электродинамики в случае кусочно-постоянной проводимости аномалии. Для случая компактной аномалии проведен сравнительный анализ результатов расчетов с использованием метода коллокаций и модифицированного метода интегральных токов.

На примере квази-трехмерной задачи о береговом эффекте продемонстрирована практическая применимость и эффективность модифицированного метода интегральных токов. Впервые обнаружен эффект роста амплитуды горизонтальной компоненты электрического поля с увеличением глубины точки наблюдения в квази-трехмерной задаче о береговом эффекте.

Разработан алгоритм интегрирования ядра интегрального уравнения и

интегрирования функций пересчета осесимметрической задачи электродинамики. С использованием этого алгоритма проведен расчет задачи об островном эффекте.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

Работа имеет как теоретический, так и практический характер. Теоретическая ценность заключается в аналитическом исследовании предложенного модифицированного метода интегральных токов, показывающем его сходимость и устойчивость. Кроме того, разработаны и описаны методы вычисления коэффициентов систем линейных уравнений, возникающих при применении предлагаемого метода к квази-трехмерной и осесимметрической задаче в случае кусочно-постоянной проводимости. Метод, предлагаемый для квази-трехмерной задачи, может быть легко обобщен на случай кусочно-полиномиальной проводимости. Кроме того, этот метод может быть применен и для алгебраизации трехмерной задачи путем применения преобразования Фурье

Практическая ценность заключается в программной реализации модифицированного метода интегральных токов для квази-трехмерной и осесимметрической задач. Проведенные расчеты позволили решить задачи об островном и береговом эффектах. При этом была получена практически важная оценка ширины зоны берегового эффекта и обнаружен эффект роста амплитуды электрического поля с глубиной.

## **Методы исследования**

В первой главе активно использовался математический аппарат электродинамики и теория операторов. Во второй главе использовался аппарат интегральных преобразований Фурье и Бесселя, а так же теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычисление интегрального преобразования

Фурье осуществлялось с помощью DE-метода<sup>5</sup>. В третьей главе использовались свойства функций Бесселя. Вычисление интегрального преобразования Бесселя проводилось методом Андерсона<sup>6</sup>.

## **Апробация работы**

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. “Международный семинар по электромагнитным зондированиям памяти Марка Наумовича Бердичевского и Петера Вайдельта.” Москва, Звенигород, 10-13 июня 2010 г.
2. Вторая международная конференция «Инновационные электромагнитные методы геофизики». Салехард, 25-28 августа, 2010г.

## **Публикации**

Материалы диссертации опубликованы в 4-х печатных работах, из них 1 работа - в журнале, рекомендованном ВАК (Вестник МГУ. Вычислительная Математика и Кибернетика.) и 1 работа — тезисы докладов. Список основных публикаций помещен в конце автореферата.

## **Личный вклад автора**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

---

5 *T.Ooura, M.Mori.* The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval // *J. Comput. Appl.Math.* — 1991. — Vol. 38. — Pp. 353–360.

6 *Anderson W.L.* Numerical integration of related Hankel transforms of order 0 and 1 by adaptive digital filtering // *Geophysics.* — 1979. — Vol. 44. — Pp. 1287–1305.

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 3-х глав и заключения. Главы разбиты на разделы. Нумерация теорем, лемм, формул и графиков — сквозная по каждой главе. В конце диссертации приведена библиография из 55 наименований. Общий объем диссертации 126 страниц.

## Краткое содержание работы

В разделе 1.1 главы 1 приведен переход от системы дифференциальных уравнений Максвелла к эквивалентным трехмерным интегральным уравнениям. Трехмерные интегральные уравнения электродинамики являются сингулярными, что приводит к дополнительным трудностям при их численном решении.

В разделе 1.2 главы 1 проведен краткий анализ используемых численных методов решения интегральных уравнений электродинамики и предложен модифицированный метод интегральных токов, при использовании которого, в частности, не требуется вычислять интегралы, содержащие особенность, в отличие от метода коллокаций или метода интегральных токов.

Раздел 1.3 является основным разделом главы 1 и посвящен построению и исследованию применимости модифицированного метода интегральных токов. Произведена оценка сходимости данного метода, и показано, что если решение интегрального уравнения является гладкой функцией, то метод равномерно сходится с первым порядком аппроксимации в смысле квадратичной нормы внутри аномалии и поточечно вне аномалии. Отметим, что если решение уравнения является разрывной функцией, что может быть вызвано, например, разрывностью проводимости в аномалии, то метод все равно сходится равномерно. В этом случае сходимость метода определяется тем, насколько точно решение интегрального уравнения может быть приближено

своими интегральными средними по выбранному разбиению на подобласти. Кроме того, получена практически важная оценка погрешности полученного решения, в которой не используется точное решение. Эта оценка основана на том, что при использовании модифицированного метода интегральных токов имеется два приближенных значения для поля в точке внутри аномалии — величина, посчитанная по приближенным формулам пересчета в этой точке, и приближенное интегральное среднее по области, содержащей эту точку, полученное при решении системы линейных уравнений. Наличие такой оценки позволяет оценить точность решения при данном разбиении на подобласти, не проводя расчетов для разбиений с большим числом подобластей, что в ряде случаев просто невозможно технически. Основные результаты главы 1 опубликованы в работе [3]

**Глава 2** посвящена практическому применению модифицированного метода интегральных токов в квази-трехмерных задачах. Этот класс задач естественным образом возникает при моделировании берегового эффекта в случае финитного источника, расположенного на берегу моря. Необходимость учета суши не позволяет рассматривать море бесконечным во всех горизонтальных направлениях, однако в большинстве задач его можно считать бесконечно протяженным в каком-то одном направлении и пренебречь кривизной берегов. В случае финитности источников это приводит к типичной квази-трехмерной задаче.

В **разделах 2.1-2.2 главы 2** проведена общая постановка квази-трехмерной задачи электродинамики, и показано, как при использовании интегральных уравнений осуществляется переход от трехмерной задачи к семейству двумерных с помощью преобразования Фурье. При этом возникает задача оптимального выбора гармоник Фурье, необходимых для восстановления поля по его образу в заданной точке, которая исследована в разделе 2.4.

При применении модифицированного метода интегральных токов к квази-

трехмерной задаче возникают различные вычислительные задачи, связанные с двукратным интегрированием ядра интегрального уравнения. **Раздел 2.3 главы 2** посвящен решению этих задач. В нем подробно исследованы вопросы такого интегрирования и предложен метод, позволяющий свести эти интегралы к вычислению преобразования Фурье от функции, которая рассчитывается с высокой точностью. Хотя в данной работе этот метод излагается для случая кусочно-постоянной проводимости, он может быть обобщен и на случай кусочно-полиномиальной проводимости. Кроме того, на базе излагаемого метода может быть легко построен метод расчета коэффициентов системы линейных уравнений, которая возникает при использовании модифицированного метода интегральных токов в трехмерной задаче.

В **разделе 2.4 главы 2** проведено описание применения модифицированного метода интегральных токов к задаче о береговом эффекте, возникающей при зондировании морского дна с помощью магнитной петли, расположенной на суше. При этом показано, что электромагнитное поле на дне моря может быть рассчитано с высокой точностью уже при разбиении на достаточно большие подобласти, в то время как при использовании метода коллокаций для достижения той же точности требуются подобласти существенно меньшего размера. Анализ необходимого количества гармоник Фурье, проведенный на примере задачи о береговом эффекте, показывает, что для получения решения с высокой точностью достаточно решить около 20 двумерных задач. При исследовании данной задачи была проведена оценка зоны берегового эффекта и обнаружен эффект роста горизонтальной компоненты электрического поля с увеличением глубины, вызванный подкачкой энергии под морским дном. Основные результаты главы 2 опубликованы в работе [2].

В **главе 3** рассмотрены вычислительные аспекты решения интегральных уравнений в осесимметрических задачах зондирования. В отличие от задач, рассмотренных в главах 1 и 2, в этом случае трехмерное векторное

сингулярное уравнение электродинамики сводится к одномерному скалярному интегральному уравнению, ядро которого содержит слабую особенность. Особое внимание уделяется расчету поля на большем расстоянии от аномалии и источника, расположенного на её границе. Такой класс задач возникает при исследовании островного эффекта, когда интегральное уравнение удобно писать по конечной неоднородности (острову), а море считается бесконечно протяженным в горизонтальном направлении.

В разделе 3.1 главы 3 показан переход от дифференциальных уравнения Максвелла к скалярному интегральному уравнению в осесимметрическом случае.

Совпадения асимптотик численного и точного решений является важным критерием применимости численного метода для расчета поля на больших расстояниях от аномалии. В разделе 3.2 проведено исследование горизонтальной асимптотики полного электромагнитного поля, наведенного вертикальным магнитным диполем в слоистой среде, содержащей аномалию. Показано, что в этом случае отношение горизонтальных компонент электрического и магнитного полей асимптотически стремится к некоторой константе.

В разделе 3.3 главы 3 изложены вычислительные аспекты интегрирования ядер осесимметрического интегрального уравнения и формул пересчета. Необходимость в этом интегрировании возникает при численном решении осесимметрических задач. Главная сложность заключается в том, что в отличие от трехмерного и квази-трехмерного случая, эти ядра представимы в виде интеграла от произведения двух бесселевых функций, а не от одной. Задача вычисления таких интегралов с высокой точностью дополнительно усложняется тем, что требуется вычислять поле на большом расстоянии от аномалии. Разработка численных методов вычисления двойных интегралов от произведения бесселевых функций составляет основную часть этого раздела. Для вычисления интегралов по вертикали используется та же методика,

что и в разделе 2.3.

В разделе 3.4 главы 3 проведено описание применения численных методов, изложенных в разделе 3.2 на примере задачи об островном эффекте. Основное методологическое отличие этой задачи от задачи о береговом эффекте заключается в том, что в качестве аномалии рассматривается не проводник — море, а изолятор — остров, в центре которого находится источник поля — вертикальный магнитный диполь. При этом требуется рассчитать поле не внутри аномалии, а на большом расстоянии от неё. Основные результаты главы 3 опубликованы в работах [1, 4].

В Заключении приведены основные результаты диссертационной работы, вынесенные на защиту.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Дмитриеву Владимиру Ивановичу за постоянное внимание к работе.

## Список публикаций автора по теме диссертации

- [1] *Kruglyakov M.S.* The impedance method in the remote sounding problems // *Electromagnetic Studies: Theory and Applications. Proceedings of the International Workshop in memory of M.N.Berdichevsky and P.Weidelt.* — Moscow: 2010. — P. 64.
- [2] *В.И Дмитриев, М.С. Кругляков.* Математическое моделирование поля вертикального магнитного диполя в двумерной неоднородной среде. // *Прикладная математика и информатика.* — 2010. — № 36. — С. 56–66.
- [3] *М.С. Кругляков.* Модифицированный метод интегральных токов в электродинамике неоднородных сред. // *Прикладная математика и информатика.* — 2010. — № 35. — С. 25–35.
- [4] *М.С. Кругляков.* О вычислительных методах в осесимметрических задачах электродинамики // *Вестник Московского Университета. Вычислительная Математика и Кибернетика.* — 2010. — № 4. — С. 10–16.