МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Денисов Василий Николаевич

О поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им М.В. Ломоносова

Научный консультант:

доктор физико-математических наук
академик РАН, профессор, В.А. Ильин

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор, В.В.Жиков
доктор физико-математических наук
профессор, Ю.А.Дубинский
доктор физико-математических наук
профессор, Г.А.Калябин

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится "6 "апреля 2011г. в 15 час 30 мин.

на заседании Диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете им М.В. Ломоносова по адресу:

119991 ГСП–1, Москва, Ленинские горы, МГУ им Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ.

Автореферат разослан "4 "марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с нелокальным поведением (при большом времени) решений задачи Коши и первой краевой задачи для параболических уравнений второго порядка.

Систематические исследования по качественной теории уравнений параболического типа стали возможными благодаря фундаментальным работам, посвященным обоснованию вопросов разрешимости задач Коши и краевых задач для этих уравнений. Из громадного числа работ по корректности постановок упомянутых выше задач отметим работы В.А. Ильина [1], А. М. Ильина, А. С. Калашникова, О. А. Олейник [2], О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцевой [3]. Среди зарубежных ученых отметим работы: Д. Аронсона [4], А. Фридмана [5], Г. Либермана[6]

В математической физике весьма часто возникает вопрос о поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений. Пусть $D \equiv R^N \times (0,\infty)$ область в R^{N+1}. Рассмотрим задачи Коши:

$$\mathcal{L}_1 u \equiv L_1(x)u + (b(x),\, \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где

$$L_1(x)u \equiv \sum_{i,k=1}^{N} (a_{ik}(x)u_{x_k})_{x_i}, \quad (b(x),\, \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_2 u \equiv L_2(x,t)u + (b(x,t),\, \nabla u) + c(x,t)u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{3}$$

где

$$L_2(x,t)u \equiv \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)u_{x_k x_i}, \quad (b(x,t),\, \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)u_{x_i} \tag{4}$$

и первую краевую задачу

$$L_1(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D \equiv Q \times (0,\infty), u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), x \in Q, \tag{5}$$

где оператор $L_1(x)$ определен в (2), Q – вообще говоря неограниченная область в R^N, $\quad N \geqslant 3, \quad S = \partial Q \times (0,\infty)$, S - граница области Q.

Предполагается, что для операторов $L_i (i = 1, 2)$ выполнены условия равномерной параболичности.

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \tag{6}$$

---

[1] Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН, 1960, т. 15, № 2, с. 97-154

[2] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН, 1962, т. 15, № 2, с. 97-154.

[3] Ладыженская О. А. , Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа //Москва, Наука, 1967

[4] Aronson D. Non-negative solutions of linear parabolic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 1968, v. 22, № 4, p. 607-694

[5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа // Москва. Мир. 1968

[6] Lieberman G. M. Second order parabolic differential aguations // World. Science, 2005

$|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2, \quad \forall (x,t) \in D$, коэффициенты a_{ik} (1), (3), (5) симметричны, т. е. $a_{ik} = a_{ki} \quad (i,k = 1,\dots,N)$, начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и принадлежит классу единственности соответствующей задачи,

$$c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \qquad [c(x) \leqslant 0 \quad x \in R^N] \tag{7}$$

Более точные условия на коэффициенты будут сформулированы ниже.

Интерес, который проявляют математики к вопросу о поведении при $t \to \infty$ решений задач (1), (3), (5), становится естественным и понятным, если учесть, что к задачам Коши (1), (3) и краевой задаче (5) для параболических уравнений приводят многие интересные и важные физические задачи, например задачи о распространении тепла в ограниченных и неограниченных объемах, задачи диффузии, задачи теории марковских процессов и т.п.

В работе изучаются вопросы стабилизации, т.е. существования предела

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{8}$$

решения задачи Коши, равномерно относительно x на каждом компакте K в R^N, для параболического уравнения второго порядка, как дивергентного, так и недивергентного вида. Изучается зависимость поведения решения задачи Коши при больших значениях времени от поведения при больших $|x|$ младших коэффициентов уравнения, в различных классах начальных функций.

Мы также изучим необходимые и достаточные условия на область $Q \in R^N$, при которых решение первой краевой задачи (5) стабилизируется к нулю, т.е. существует предел (8), равномерно по x на каждом компакте K в Q, для любой ограниченной и непрерывной в области Q функции $u_0(x)$.

Впервые вопрос о поведении при $t \to \infty$ решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности изучен А.Н. Тихоновым, [7] который в 1938г. доказал следующие теоремы:

Пусть Q — ограниченная область N-мерного евклидова пространства R^N и пусть $D = Q \times (0,\infty)$– прямой полуцилиндр с основанием Q. Пусть $u(x,t)$ — решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, принимающее на боковой поверхности $\partial Q \times (0,\infty)$ полуцилиндра D значение функции $\phi(x)$, не зависящее от времени. Тогда при $t \to \infty$ решение $u(x,t)$ стремится в D равномерно по $x \in Q$ к функции $v(x)$, удовлетворяющей внутри Q уравнению Лапласа и принимающей на ∂Q значение $\phi(x)$. А.Н. Тихоновым также доказано, что если решение уравнения теплопроводности $u(x,t)$ непрерывно в $\bar{D}$ и удовлетворяет на границе цилиндра $S = \partial Q \times (0,\infty)$ условию $u(x,t)|_s = 0$, при $t \geqslant t_0 > 0$, то решение стабилизируется к нулю, т.е. существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, равномерно по $x \in \bar{Q}$, каковы бы ни были значения $u(x,t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Эти результаты А.Н. Тихонова обобщались во многих работах (например, работах В. Фулкса [8], М. Кржижанско-

[7] Тихонов А. Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. МГУ, мат. мех. 1938, т. 1 № 9, с. 1-40.

[8] Fulks W. A note on the steady state solutions of the heat equations //Proc. Amer. Math. Soc. 1956, v. 7, № 5, p. 7-67.

го [9], А. Фридмана [10] [11], С.Д. Эйдельмана, Ф.О. Порпера [12], Ю.Н. Черемных[13] [14], А. М. Ильина [15] [16], Р. З. Хасьминского [17] , А. М. Ильина Р. З. Хасьминского [18] на случай более общих уравнений, краевых задач и более сложных областей Q.

А. Фридман доказал теоремы о равномерном стремлении к нулю при $t \to \infty$ решений краевых задач для определенных в цилиндре с конечным основанием или в расширяющейся области, неоднородных линейных параболических уравнений второго порядка, при условии, что граничные функции стремятся к нулю при $t \to \infty$. Им были получены теоремы, обобщающие результаты А.Н. Тихонова, на общие неоднородные линейные параболические уравнения второго порядка, заданные в полуцилиндре, если младший коэффициент $c(x,t)$ является неположительным. Результаты А. Фридмана систематизированы в главе 6 его монографии[5].

Хорошо известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $\Delta u = u_t$ с начальной функцией $u(x,0) = u_0(x)$, стремящейся к нулю при $|x| \to \infty$, само стремится к нулю при $t \to \infty$, равномерно по x. Однако подробное утверждение о стремлении к нулю при $t \to \infty$ решения задачи Коши, вообще говоря, уже неверно для параболического уравнения (3) с коэффициентами, зависящими от x и t, даже если $c(x,t) \leqslant 0$.

В работе[15] А.М. Ильина доказано, что если

1) начальная функция в (3) имеет предел $\lim\limits_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0$,

2) выполнены условия параболичности (6),

3) коэффициенты $b_i(x,t)$ ограничены

4)$\sum\limits_{i=1}^{N}(a_{ii} + b_i x_i) \geqslant \delta > 0$,

5)$c(x,t) \leqslant 0$ в D. то предел (8) существует равномерно по $x \in R^N$.

На примерах в[15] показано, что при невыполнении одного из условий 1)-5), утверждение теоремы может оказаться неверным.

В работе[2] доказано (§ 12, т. 1), что для задачи Коши (3) с ограниченной функцией $u_0(x)$, условие

$$c(x,t) \leqslant C_0 < 0 \tag{9}$$

[9] Krzyzanski M. Sur l'allure asymtotique dessolutions d'equation du type paraboliques // Bull. Acad. Polonici, Sci. cl. 1956, III, № 4, p.247-251.

[10] Friedman A. Convergence of solutions of parabolic equations to steady state // Proc. Amer. Math. Soc. 1959, v. 8, № 4, p. 57-76

[11] Friedman A. Asymptotic behaviour of solutions of parabolic equations of any order // Acta. math. 1961, v. 106, № 1-2, p. 1-43.

[12] Эйдельман С. Д. Порпер Ф. О. О стабилизации параболических уравнений // Изв. вузов матем. 1960, № 4, с. 210-217

[13] Черемных Ю. Н. Об асимптотике решений параболических уравнений// Изв. АН СССР, матем. 1959, т. 23, с. 913-924

[14] Черемных Ю. Н. О поведении решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка при неограниченном возрастании времени t // Матем. сб. 1968, т. 75, № 2, с. 241-254

[15] Ильин А. М. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени // УМН 1961, т. 16 №2, с. 115-121

[16] Ильин А. М. Об одном достаточном условии стабилизации решения параболического уравнения // Матем. заметки 1985, т. 37, № 6, с. 851-856.

[17] Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решения задачи Коши для параболического уравнения // Теория вероятн. и ее примен. 1960, т. 5, № 2, с. 196-214

[18] Ильин А. М. Хасьминский Р. З. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодические свойства неоднородных диффузионных процессов// Матем. сб., 1963, т. 60, № 3, с. 366-392

гарантирует равномерную в R^N стабилизацию решения к нулю.

В § 12 работы[2] доказана теорема 4, утверждающая, что если $u(x,t)$ —решение задачи Коши (3) с ограниченной начальной функцией, и существует такая функция $v(x) > 0$, что

$$1)\mathcal{L}_2 v(x) \leqslant 0 \quad , \quad 2) \lim_{|x|\to\infty} v(x) = +\infty, \tag{10}$$

то существует предел (8), равномерно по x на любом компакте K.

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую условиям (10) будем называть, следуя Н. Мейерсу, Дж. Серрину[19], антибарьером оператора $\mathcal{L}_2$ на бесконечности.

Отметим интересные результаты работы В.В.Жикова[20],в которой были получены достаточные условия на младшие коэффициенты уравнения (1), для любой ограниченной начальной функции $u_0(x)$, гарантирующие выполнение теоремы о "равностабилизации ", т.е. существование предела разности

$$\lim_{t\to\infty}(u(x,\,t) - v(x,\,t)) = 0, \tag{11}$$

где $v(x,\,t)$ - решение некоторой задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. Коэффициенты уравнения (1) есть при этом (см. [20]) либо гладкие периодические функции аргументов x и t, либо не зависят от t, и есть квазипериодические функции аргумента x. Теорема о равностабилизации позволяет получить критерий стабилизации решения задачи Коши для уравнения с младшими коэффициентами, который выражается в терминах существования соответствующему данному уравнению предела средних от начальной функции[20]. В самом общем случае критерий поточечной (равномерной) стабилизации решения задачи Коши без младших членов получен в работе В.В.Жикова[21]. В работе [22] был впервые получен критерий стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с ограниченной начальной функцией. Более подробный обзор работ, в которых изучается строение начальных функций, обеспечивающее стабилизацию решения задачи Коши в случае, когда младшие члены уравнения не оказывают влияния на стабилизацию, см. в работе [23].

Из приведенного краткого обзора работ по стабилизации вытекает, что случай параболического уравнения (1) с дивергентным оператором (2) и младшими коэффициентами изучен недостаточно. В этом случае, как известно[3,4], можно значительно ослабить требования гладкости коэффициентов уравнения (1), рассматривая обобщенные решения (из некоторого класса единственности[3,4]).

В цитированных работах [2,15] приведены достаточные условия на коэффициенты уравнения (3), которые гарантируют для соответствующих теорем о стабилизации существование антибарьера на бесконечности, при этом начальные функции $u_0(x)$ либо ограничены в R^N, либо имеют предел $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0$.

---

[19] Meyers N., Serrin J. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic differential equations // J. Math. and Mech. 1960, v. 9, N 4, p. 513-538

[20] Жиков В.В. Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами // Труды ММО, 1983, т.46, с.69-98

[21] Жиков В.В. О стабилизации решений параболических уравнений. // Матем. сб. 1977, т.104, №4,с.597-661

[22] Репников В.Д. О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // ДАН СССР, 1964, т.157,№3,с.532-533

[23] Денисов В.Н. Репников В.Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений.//Дифференц. уравнения, 1984, т.20, №1,с.20-41

Таким образом, является актуальным систематическое исследование *точных* достаточных условий на младшие коэффициенты, гарантирующих стабилизацию решения задачи Коши (1) или (3) для дивергентных и недивергентных параболических уравнений, для *растущих* начальных функций, принадлежащих классам единственности этой задачи.

ОБЪЕКТОМ ИССЛЕДОВАНИЙ служат задача Коши для параболического уравнения второго порядка с младшими коэффициентами, а также первая краевая задача для параболического уравнения, рассматриваемая в прямом цилиндре, неограниченном по $t > 0$ и, возможно, по x.

В случае задачи Коши (1) с дивергентным оператором второго порядка, коэффициенты уравнения могут зависеть только от x или от x и от t, решения рассматриваются из известных классов обобщенных решений, начальные функции берутся из классов единственности соответствующей задачи Коши и могут включать в себя функции, имеющие определенный рост на бесконечности.

В случае задачи Коши (3) с недивергентным оператором второго порядка, коэффициенты уравнения зависят от x и от t, решения понимаются как классические, начальные функции берутся из классов единственности соответствующей задачи Коши, и которые могут включать в себя функции, имеющие определенный порядок роста на бесконечности.

В случае первой краевой задачи (5) решение будет трактоваться как обобщенное из соответствующего класса, начальная функция $u_0(x)$ — непрерывна и ограничена в $Q \subset R^N$, Q —область задания $u_0(x)$ может быть неограниченной в R^N.

Целью диссертационной работы является изучение условий стабилизации к нулю решения задачи Коши для параболических уравнений с младшими коэффициентами и решения первой краевой задачи для параболического уравнения. В случае задачи Коши мы изучаем достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения второго порядка, которые гарантируют стабилизацию к нулю решения соответствующей задачи, с начальными функциями из соответствующих классов единственности задачи Коши, удовлетворяющих определенным условиям роста на бесконечности.

В случае первой краевой задачи мы изучаем такие условия на область Q задания начальной функции $u(x, 0)$, которые эквивалентны свойству стабилизации к нулю решения этой задачи.

Методы исследования в главах 1 и 2 основаны на построении растущих при $|x| \to \infty$ решений, зависящих от $|x|$, соответствующих суперпараболических неравенств. При этом применяются соответствующие варианты принципа максимума, неравенство Харнака и т.п., учитывается квалифицированное убывание (рост) младших коэффициентов параболических уравнений. В главе 3 доказывается лемма о возрастании [24] для обобщенного решения задачи (5), применение которой является основным моментом в доказательстве достаточности в теоремах 3.1, 3.2, 3.3 главы 3.

Научная новизна

1. Впервые получены *точные* достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения с дивергентным оператором, которые гарантируют стабилизацию решения задачи Коши (1) с любой ограниченной начальной функ-

[24] Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М. Наука, 1971

цией $u_0(x)$, и показано, что эти условия существенно зависят от числа пространственных переменных.

2. Впервые установлены *неулучшаемые* условия на младшие коэффициенты параболического уравнения с дивергентным оператором, при выполнении которых решение задачи Коши (1) стабилизируется к нулю, равномерно на каждом компакте K в R^N, для любой начальной функции, имеющей на бесконечности степенной рост порядка $m > 0$. Доказана *неулучшаемость* полученных достаточных условий стабилизации.

3. Получены *точные* достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения с дивергентным оператором, при выполнении которых решение задачи Коши (1) стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте K в R^N, для любой начальной функции, имеющей на бесконечности экспоненциальный порядок роста $\exp(a|x|)$.

4. Получены *неулучшаемые* достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения с недивергентным оператором, при выполнении которых решение задачи Коши (3) стабилизируется к нулю, равномерно по x на каждом компакте K в R^Nв каждом из следующих классов начальных функций: 1) функций степенного роста, 2)экспоненциального порядка роста $|u_0(x)| \leqslant C\exp(a|x|^n)$, $0 < n < 1$.

5. Впервые получены *неулучшаемые* достаточные условия на коэффициенты уравнения с неограниченным коэффициентом $c(x,t)$, при которых решение задачи Коши (3) стабилизируется к нулю равномерно по x на каждом компакте, для любой функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию роста

$$|u_0(x)| < C\exp(b|x|^k), \quad 1 < k < 2, \quad b > 0.$$

6. Получены необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для уравнения $\Delta u - b(|x|)u - u_t = 0$, формулируемые в терминах расходимости некоторого несобственного интеграла, включающего $b(|x|)$.

7. Получены необходимые и достаточные условия на область $R^N \setminus Q$, выполнение которых эквивалентно стабилизации к нулю решения первой краевой задачи (5), равномерно по x на каждом компакте K в R^N, при любой ограниченной непрерывной начальной функции $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in Q$. Эти условия формулируются в терминах расходимости некоторого ряда (интеграла), включающего винеровские емкости.

Теоретическая и практическая ценность

Предлагаемые методы и подходы открывают новые возможности для эффективного решения различных задач о стабилизации решений для параболических уравнений, например задачи о скорости стабилизации к нулю решения задачи Коши, или задачи о скорости стабилизации к нулю решения первой краевой задачи в различных областях типа конуса. Предложенные в работе методы могут быть применены также в задачах стабилизации решений внешних краевых задач для параболических уравнений.

Результаты диссертации являются составной частью исследований, выполненных в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований: 06-01-00288, 09-01-00446.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на:

- The International Conference "Differential Equations and Related Topics"dedicated to I.G. Petrovskii (Moscow 2004);
- Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль 2006);
- The fourth International Conference on Differential and Functional Equations (Moscow 2005);
- The fifth International Conference on Differential and Functional Equations (Moscow 2008);
- Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль 2008);
- Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложениям посвященной семидесятилетию ректора МГУ, академика В.А. Садовничего (Москва 2009);
- Международный конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль 2010);
- семинаре кафедры Общей Математики факультета ВМиК МГУ (руководители академик РАН В.А. Ильин, академик РАН Е.И. Моисеев, член корр. РАН И.А. Шишмарев, профессор И.С. Ломов)
- семинаре кафедры дифференциальных уравнений механико математического факультета МГУ (руководители профессор Жиков В. В., профессор Шамаев А. С., профессор Шапошникова Т. А.)
- семинаре кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ (руководители профессор В.А. Кондратьев, профессор Е.В. Радкевич)
- семинаре отдела теории функции Математического института РАН им. В.А. Стеклова (руководители академик РАН С.М. Никольский, член корр. РАН О.В. Бесов, член корр. РАН Л.Д. Кудрявцев, член корр. РАН С.И. Похожаев).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 15 работ в центральных журналах см.[1]-[15].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы.

Общий объем диссертации составляет 187 стр.

Список цитируемой литературы содержит 78 наименований.

Содержание диссертации

Приведем список наиболее часто применяемых далее обозначений и определений:

$x = (x_1, \dots, x_N)$ — точки N - мерного евклидового пространства R^N,

$$D = R_+^{N+1} = \{x, t : x \in R^N, \quad t > 0\}, \quad |x| = r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2},$$

$\overline{D} = \{x, t : x \in R^N, \quad t \geqslant 0\}, \quad H_{[t_1,t_2]} = \{x, t : x \in R^N, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2\},$

Q – область в R^N, $B_R^{x_0} = \{x \in R^N : \quad |x - x_0| < R\}$,

$$B_R = \{x : |x| < R\}, \quad \overline{B_R} = \{x : |x| \leqslant R\},$$

$a(x) = a_{ik}(x), \quad a(x,t) = a_{ik}(x,t)$ — квадратные симметричные матрицы размера $N \times N$ с условием симметричности $a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, \ldots, N)$, (x, y) — скалярное произведение в R^N.

$$(a(x)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k,$$

$$(a(x,t)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k$$

— квадратичные формы определяемые матрицами $a(x)$ и $a(x,t)$.

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$$

— градиент скалярной функции $u(x)$, $(b(x), \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i}$,

$$(b(x,t), \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) u_{x_i},$$

Начальную функцию $u_0(x)$ всегда будем считать непрерывной в R^N и удовлетворяющей дополнительным условиям роста, которые будут указаны далее.

Сначала в главе 1 будем рассматривать случай, когда $u_0(x)$ — ограничена в R^N

$$|u_0(x)| \leqslant M. \tag{12}$$

Для формулировки результатов главы 1 нам потребуется понятие обобщенного решения задачи Коши (1).

Пусть Ω — произвольная область в R^{N+1}, под пространством $W_2^{1,0}(\Omega)$ будем понимать пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (см.[3,4]).

$$||f||_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \Big[\int\limits_{\Omega} (f^2(x,t) + (\nabla_x f(x,t))^2) dxdt \Big]^{1/2}, \tag{13}$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$ — градиент скалярной функции, аналогично,$W_2^{1,1}(\Omega)$ - есть пополнение множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||f||_{W_2^{1,1}(\Omega)} = \Big[\int\limits_{\Omega} (f^2(x,t) + (\nabla_x f(x,t))^2 + (f_t(x,t))^2) dxdt \Big]^{1/2}.$$

Пусть $D_T = R^N \times (0, T)$, $T > 0$. Под обобщенным решением задачи Коши (1) в D_T будем понимать функцию, которая принадлежит $W_2^{1,0}(B_R \times (0,T))$ для всех $R > 0$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} [(a(x)\nabla u, \nabla \eta) - \eta(b, \nabla u) - cu\eta - u\eta_t] dxdt = \int\limits_{R^N} u_0(x)\eta(x,0)dx, \tag{14}$$

для всех функций $\eta(x,t)$ из $W_2^{1,1}(D_T)$ с ограниченным носителем, удовлетворяющим условию $\eta(x,T)=0$. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1) в области $D=R^N\times(0,\infty)$, если при всех $T>0$ она является обобщенным решением задачи (1) в D_T.

Известно[3,4], если $u_0(x)$ удовлетворяет (12), то ограниченное обобщенное решение задачи Коши (1) существует и единственно.

Определение 1. Будем говорить, что решение задачи Коши (1) стабилизируется, если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=0, \tag{15}$$

равномерно по x на каждом компоненте K в R^N.

Определение 2. Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x),\ldots,b_N(x)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_1)$, если найдутся постоянные $B>0$, $\varepsilon>0$ для которых

$$\sup_{x\in R^N}(1+|x|)^{1+\varepsilon}|b_i(x)|\leqslant B,\quad \forall x\in R^N. \tag{16}$$

Определение 3. Будем говорить, что коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_1)$, если $\exists\ \alpha>0$, такое, что

$$c(x)\le -\alpha^2\max\{0,\operatorname{sgn}(1-|x|)\}. \tag{17}$$

В § 2 доказан следующий результат

Теорема 1.2 *Если $N=1$ или $N=2$ и функция $u_0(x)$ ограничена в R^N, $b_1(x),\ldots,b_N(x)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_1)$, коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_1)$, то решение задачи Коши* (1) *стабилизируется, т.е. существует предел* (15), *равномерно по x на каждом компакте K в R^N.*

Отметим, что условие $(\mathcal{C}_1)$ является существенным, ибо решение задачи Коши $\Delta u-u_t=0,\quad u|_{t=0}=1$ не имеет предела (15) ни в одной точке $x\in R^N$.

Теорема 1.2 не переносится на случай больших размерностей, ибо справедливо утверждение

Лемма 1.9 *При $N\geqslant 3$ существуют: коэффициент $c(x)$, удовлетворяют условию $(\mathcal{C}_1)$, ограниченная непрерывная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши*

$$\Delta u+c(x)u-u_t=0,\quad (x,t)\in D,\quad u|_{t=0}=u_0(x), \tag{18}$$

не имеет предела (15) *ни в одной точке $x\in R^N$.*

Следующая лемма устанавливает точность утверждения теоремы 1.2, в смысле топологии предела (15).

Лемма 1.10 *При $N=1$ или $N=2$ существуют: коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию $(\mathcal{C}_1)$, ограниченная в R^N функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши* (18) *не имеет* равномерного *в R^N предела* (15).

Следующие леммы устанавливают точность условий в теореме 1.2 на младшие коэффициенты уравнения (1).

Рассмотрим задачу Коши:

$$\Delta u+(b(x),\nabla u)+c(x)u-u_t=0\quad \text{в}\quad D, \tag{19}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in R^N. \tag{20}$$

Лемма 1.11 *При* $N = 1$ *существуют: коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* $(\mathcal{C}_1)$, *коэффициент* $b(x)$, *ограниченный в* R^1 *такой, что* $b(x) = \frac{\beta_1}{x}$ *при* $x > 1$, $\beta_1 > 1$ *и* $b(x) = \frac{-\beta_2}{x}$, *при* $x < -1$, $\beta_2 < -1$, *ограниченная в* R^1 *функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи Коши* (19), (20) *не имеет предела* (15) *ни в одной точке* $x \in R^1$.

Лемма 1.12 *При* $N = 2$ *существуют: коэффициент* $c(x_1, x_2)$, *удовлетворяющий условию* $(\mathcal{C}_1)$, *коэффициенты* $b_1(x_1, x_2)$, $b_2(x_1, x_2)$ — *ограниченные функции в* R^2 *такие, что* $b_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{x_1^2+x_2^2}$, $i = 1, 2$, *при* $x_1^2 + x_2^2 > 1$, *ограниченная в* R^2 *функция* $u_0(x_1, x_2)$, *для которых решение задачи* (19), (20) *не имеет предела* (15) *ни в одной точке* (x_1, x_2) *пространства* R^2.

Определение 4. Будем говорить, что коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_2)$, если $\exists\ \alpha > 0$, такое, что

$$c(x) \leqslant -\alpha^2 |x|^{-2} \max\{0, \operatorname{sgn}(|x| - 1)\}. \tag{21}$$

Определение 5. Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_2)$, если $\exists\ B > 0$, такое что

$$\sup_{x\in R^N} (1 + |x|) \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| \leqslant B < \infty. \tag{22}$$

В главе 1 доказано следующее важное утверждение.

Теорема 1.3 *Если* $N \geqslant 3$, $u_0(x)$ — *ограниченная функция, коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* $(\mathcal{B}_2)$, *коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяет условию* $(\mathcal{C}_2)$, *то решение задачи Коши* (1) *стабилизируется к нулю равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* R^N.

Следующие леммы устанавливают точность условий теоремы 1.3.

Лемма 1.13 *При* $N \geqslant 3$ *существуют: коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* $(\mathcal{C}_2)$, *ограниченная в* R^N *функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи Коши* (18) *не имеет* равномерного *в* R^N *предела* (15).

Лемма 1.14 *Существуют ограниченные в* R^N *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, *такие что*

$$b_i(x) = B\frac{x_i}{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad B > 0, \quad \textit{при} \quad |x| \geqslant 1,$$

коэффициент $c(x)$, *удовлетворяющий условию* $(\mathcal{C}_2)$, *ограниченная в* R^N *функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи Коши* (19), (20) *не имеет предела* (15) *ни в одной точке* $x \in R^N$.

Лемма 1.15

Если коэффициент $c(x)$ *имеет вид:*

$$c(x) = -\alpha^2 |x|^{-2-\varepsilon} \max\{0, sgn(|x| - 1)\}.$$

то существует ограниченная в R^N *функция* $u_0(x)$, *такая, что решение задачи Коши* (18) *не имеет предела* (15) *ни в одной точке* $x \in R^N$.

Лемма 1.15 устанавливает точность порядка $|x|^{-2}$ в условии $(\mathcal{C}_2)$ теоремы 1.3.

Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию степенного роста порядка m на бесконечности

$$|u_0(x)| \leqslant C(1 + |x|)^m, \quad m > 0. \tag{23}$$

В главе 1 установлен следующий основной результат

Теорема 1.7 *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (23), *коэффициенты* $b_1(x), \dots b_N(x)$ *удовлетворяет условию* $(\mathcal{B}_2)$, *тогда существует постоянная* $\alpha_0 = \alpha_0(m, B, \lambda_1, \lambda_0, N) > 0$ *такая, что если коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* $(\mathcal{C}_2)$ *при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2, \tag{24}$$

то решение задачи Коши (1) *стабилизируется к нулю, равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* R^N.

В случае, когда в уравнении (1) эллиптический оператор заменяется на оператор Лапласа Δ, мы находим точное значение постоянной α_0^2 в неравенстве (24). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.9 *Пусть функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (23), *коэффициенты* $b_1(x), \dots b_N(x)$ *удовлетворяет условию* $(\mathcal{B}_2)$, *тогда если коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* $(\mathcal{C}_2)$ *при*

$$\alpha^2 > m(m + N + B - 2) = \alpha_0^2, \tag{25}$$

то решение задачи Коши (19), (20) *стабилизируется к нулю, равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* R^N.

Неравенство (25) является точным, это вытекает из следующего утверждения

Лемма 1.24 *Для произвольных* $m > 0, \quad B > 0$ *существуют начальная функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая условию* (23), *ограниченные в* R^N *коэффициенты* $b_1(x), \dots b_N(x)$, *удовлетворяющие условию* $(\mathcal{B}_2)$, *и такие, что*

$$b_i(x) = B\frac{x_i}{|x|^2} \quad \text{при} \quad |x| > 1, \quad B > 0$$

и коэффициент $c(x)$ *удовлетворяющий условию* $(\mathcal{C}_2)$ *при*

$$\alpha^2 = m(m + N + B - 2),$$

для которых решение задачи (19), (20) *не имеет предела* (15) *ни в одной точке* $x \in R^N$.

Кроме того, в главе 1 установлены леммы, показывающие точность условий теоремы 1.9. Поскольку их формулировка аналогична соответствующим леммам 5—6 и мы, для краткости, не будем приводить их.

Определение 6. Будем говорить, что коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_3)$, если

$$c(x) \leqslant -\alpha^2, \quad x \in R^N, \tag{26}$$

при некотором $\alpha > 0$.

Рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию роста

$$|u_0(x)| \leqslant C \exp\{a|x|\}, \tag{27}$$

для некоторой постоянной $a > 0$.

В области $\bar{D} = R^N \times [0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши

$$\mathcal{L}_3 u = L_3(x,t)u + c(x,t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D \tag{28}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{29}$$

где $L_3(x,t)$ имеет вид

$$L_3(x,t)u = \sum_{i,k=1}^{N} (a_{ik}(x,t)u_{x_k})_{x_i}, \tag{30}$$

$a_{ik} = a_{ki}$, $(i,k = 1,\dots,N)$, выполнены условия параболичности (6)

Приведем оценки Дж. Нэша [25] и Д. Аронсона [26] для фундаментального решения задачи Коши

$$L_3(x,t)v - v_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{31}$$

$$v|_{t=0} = u_0(x), \tag{32}$$

где $u_0(x)$ удовлетворяет (27).

В работах[4,25,26] построено фундаментальное решение $p(x,y;t,T)$ задачи (31), (32) такое, что

1) функция $p(x,y;t,T)$ непрерывна в $R^{2N+2} = \{x,y,t,T : x \in R^N, y \in R^N, t > T\}$, 2) существует постоянные $k_1 > 0, k_2 > 0$, зависящие только от λ_0^2, λ_1^2 и N, такие, что

$$p(x,y,t,T) \leqslant k_2^2(t-T)^{-\frac{N}{2}} \exp(\frac{|x-y|^2}{4k_1^2(t-T)}) \tag{33}$$

Теорема 1.10 *Если $u_0(x)$ удовлетворяет условию (27) при некоторой постоянной $a > 0$, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_3)$ при*

$$\alpha^2 > a^2 k_1^2, \tag{34}$$

где k_1^2 — постоянная из оценки (33), то решение задачи Коши (28), (29) стабилизируется, т.е. существует предел (15) равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Условие (34) является точным, о чем свидетельствует:

Лемма 1.28 *Для любого $a > 0$ существует функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (27), коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий $(\mathcal{C}_3)$ при $\alpha^2 = a^2$, для которых решение задачи Коши (18) не имеет предела (15) ни в одной точке $x \in R^N$*

В главе 2 диссертации изучается задача Коши для недивергентного параболического уравнения

$$\mathcal{L}_2 u(x,t) = L_2(x,t)u + (b(x,t),\, \nabla u) + c(x,t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{35}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, N \geqslant 3, \tag{36}$$

где $L_2(x,t)$ оператор, определенный в (4).

Предположим, что коэффициенты (35) непрерывны и ограничены в $\bar{D}$ и удовлетворяют условию Гельдера

$$(a) \quad |a_{ik}(x,t) - a_{ik}(x^0,t^0)| \leqslant A(|x-x^0|^\gamma + |t-t^0|^{\frac{\gamma}{2}}),$$

$$(b) \quad |b_i(x,t) - b_i(x^0,t)| \leqslant A(|x-x^0|^\gamma),$$

$$(c) \quad |c(x,t) - c(x^0,t)| \leqslant A(|x-x^0|^\gamma).$$

[25] Nash J. Continuity of Solutins of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958, v. 80, № 4, c. 531-554

[26] Aronson D. Bounds for the fundamental solution of parabolic equations // Bull Amer. Math. Soc. 1967, v. 72, p. 597-619

с некоторой постоянной $\gamma : \quad 0 < \gamma \leqslant 1$,

$$c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в } D.$$

Предположим, что $a_{ik} = a_{ki}$ $(i,k = 1,\dots,N)$ и выполнено условие параболичности (6).

Начальная функция будет всегда непрерывной в R^N и удовлетворяет некоторым условиям роста.

Известно, что если $u(x,t)$ — удовлетворяет условию А.Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant C_1(\varepsilon)\exp\left(C_2(\varepsilon)|x|^2\right), \tag{37}$$

в полосе $H_{[0,T]}$ для любого T: $0 < T \leqslant \infty$, то решение задачи Коши (35), (36) единственно.

Мы всегда будем считать выполненным условие (37). Теорема единственности вытекает из следующего принципа максимума для слоя. Мы приводим, ради полноты, полную формулировку этого принципа максимума [27].

Теорема.(принцип максимума). *Если $u(x,t)$ — суперпараболическая функция для уравнения (35), т.е.*

$$\mathcal{L}_2 u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в слое} \quad H_{(0,T]}, \quad \forall T > 0 \tag{38}$$

с ограниченными коэффициентами, непрерывная вплоть до $t = 0$ и неотрицательная при $t = 0$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в D.

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u - b(|x|)u - u_t = 0 \quad \text{в} \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{39}$$

где $b = b(|x|)$ — радиальная функция, $x \in R^N, N \geqslant 3$, такая, что при $r = |x| \geq 0$

$$b(r) \geqslant 0, r \geq 0, b(r) \not\equiv 0, \tag{40}$$

и $b(r)$ является ограниченной функцией в R^N, удовлетворяющей условию Гельдера. Начальная функция $u_0(x)$ пусть ограничена и непрерывна в R^N.

Определение 7. Будем говорить, что коэффициент $b(|x|)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_4)$, если расходится интеграл

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \tau b(\tau) d\tau = +\infty,\ r_0 > 0. \tag{41}$$

Справедливо следующее утверждение, доказанное в главе 2.

Теорема 2.1 *Для того чтобы решение задачи Коши* (39) *стабилизировалось, т.е. существовал предел* (15), *равномерно по x на любом компакте K в R^N необходимо и достаточно, чтобы коэффициент $b(|x|)$ удовлетворял условию $(\mathcal{C}_4)$.*

Следствие. Если коэффициент $c(x)$ в задаче Коши (18) удовлетворяет неравенству

$$c(x) \leqslant -b(|x|), \tag{42}$$

[27]Кондратьев В. А. Ландис Е. М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики № 32, ВИНИТИ 1989.

где для $b(|x|)$ выполнены условия $(\mathcal{C}_4)$, то решение задачи Коши (18) стабилизируется к нулю равномерно по x на любом компакте K в R^N, для любой непрерывной, ограниченной начальной функции.

Теорема 2.1 является усилением теоремы 1.3 из главы 1 на случай, когда $L(x) = \Delta$ — оператор Лапласа и $b_i = 0, i = 1, \ldots, N$, ибо можно привести пример коэффициента $c(x)$, для которого не выполняется условие $(\mathcal{C}_2)$ теоремы 1.3 главы 1, но выполнено условие $(\mathcal{C}_4)$. В качестве примера приведем коэффициент $c(x)$ следующего вида

$$c(x) = -\alpha^2(\min(e^{-2}, |x|^{-2}|\ln|x||^{-s}). \tag{43}$$

Ясно, что для этого коэффициента $c(x)$ не выполнено условие $(\mathcal{C}_2)$ теоремы 2 главы 1, если $0 < s \leqslant 1$, однако выполнено условие $(\mathcal{C}_4)$ и поэтому, в силу теоремы 2.1 решение задачи (18) с коэффициентом (43) стабилизируется к нулю равномерно по x на любом компакте K в R^N

Определение 8. Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_3)$, если $B > 0$ такое, что

$$\sup_{(x,t)\in D}(1 + |x|)(\sum_{i=1}^{N} b_i^2(x,t))^{\frac{1}{2}} \leqslant B.$$

Определение 9. Будем говорить, что коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_5)$ т.е.

$$c(x,\, t) \leqslant -b(|x|), \tag{44}$$

где $b(t) \geqslant 0, r \geqslant 0$ ограниченная функция, удовлетворяющая условию Гельдера, такая, что расходится интеграл (41).

Теорема 2.2 *Если начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в R^N, коэффициенты $(b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t))$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_3)$, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_5)$, то решение задачи Коши* (35), (36) *стабилизируется, т.е. существует предел* (15)*, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.*

Определение 10. Будем говорить, что коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_6)$, если

$$c(x,t) \leqslant a_\alpha(|x|) = -\alpha^2 \min(1, |x|^{-2}) \tag{45}$$

для некоторой постоянной $\alpha > 0$.

Рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию степенного роста (23).

Теорема 2.3. *Если функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству* (23)*, коэффициенты $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_3)$, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_6)$ при*

$$\alpha^2 > \lambda_1^2 m(m + S - 2), \tag{46}$$

где $S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}$, то решение задачи Коши (35), (36) *стабилизируется, т.е. существует предел* (15)*, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.*

Как вытекает из результатов леммы 1.24 главы 1, условие (46) является неулучшаемым.

Определение 11. Будем говорить, что коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_7)$, если
$$c(x,t) \leqslant b_\alpha(|x|) = -\alpha^2 \min(1, |x|^{-2k}) \tag{47}$$
для некоторых постоянных $\alpha > 0$, $0 < k < 1$. Рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию роста
$$|u_0(x)| \leqslant C \exp(a|x|^{1-k}), \tag{48}$$
с некоторыми постоянными $a > 0, \quad 0 < k < 1$.

Имеет место следующий основной результат.

Теорема 2.4. *Если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству* (48) *при некоторых $a > 0, \quad 0 < k < 1$, коэффициенты $b_1(x,t), \dots, b_N(x,t)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_3)$, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_7)$ при*
$$\alpha > a(1-k)\lambda_1, \tag{49}$$
где λ_1 — постоянная из условия параболичности (6), то решение задачи Коши (35), (36) *стабилизируется, т.е. существует предел* (15)*, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.*

Условие (49) является неулучшаемым, о чем свидетельствует

Лемма 2.24 *Для $a > 0, \quad 0 < k < 1$ существуют начальная функция $u_0(x)$ такая, что*
$$u_0(x) = C_0 \exp(a|x|^{1-k}), C_0 > 0,$$
коэффициент $c(x)$ удовлетворяющий условию $(\mathcal{C}_7)$ при
$$\alpha = a(1-k), \tag{50}$$
для которых решение задачи Коши (18) *не имеет предела* (15)*, ни в одной точке $x \in R^N$.*

Определение 12. Будем говорить, что коэффициенты $c(x,t)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{C}_8)$, для некоторых постоянных $\beta > 0, \quad 0 < l < 1$, если
$$c(x,t) \leqslant d_\beta(|x|) = -\beta^2 \max(1, |x|^{2l}). \tag{51}$$

Замечание. Задача Коши (35), (36) в случае, когда последний коэффициент $c(x,t)$ является неограниченным и удовлетворяет условию
$$c(x,t) \leqslant -a_1|x|^2 - b_1,$$
впервые изучена в работах М. Кржижанского [28]. Дальнейшее развитие теория параболических уравнений с неограниченными коэффициентами получила в работе Я.И Житомирского [29], Г.Н.Смирновой [30] и др.

---

[28] Krzyzanski M."Sur la solution fondamentale de l'equation lineare normale du type parabolique dont le dernier coefficient est non borne // Atti Accad Naz. Lincei. Ser.8 Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 1962, 32, p. 326-330.

[29] Житомирский Я.И.Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами // Изв. вузов. матем., 1959, №1, с.55-74

[30] Смирнова Г.Н. Задача Коши для параболического уравнения, вырождающегося на бесконечности // Матем. сб. 1966, т. 70, № 4, с.591-604

Рассмотрим начальные функции $u_0(x)$, удовлетворяющие оценке

$$|u_0(x)| \leqslant C \exp\{b|x|^{1+l}\}, \quad C > 0 \tag{52}$$

с некоторыми $b > 0, \quad 0 < l < 1$, и задачу Коши (35), (36), в которой коэффициенты $b_i(x,\,t)(i = 1, \ldots N)$ удовлетворяют условию $(\mathcal{B}_3)$, а коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{C}_8)$. Существование и единственность решения задач (35), (36) в этом случае вытекает из работы[30], при этом предполагается, что коэффициенты уравнения (35) принадлежат классам Гёльдера $C^{\delta_1}(\Omega)$, $0 < \delta_1 < 1$ в каждой ограниченной области $\Omega \subset D$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2.5 *Если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет* (52) *при некоторых $b > 0, \quad 0 < l < 1$, коэффициенты $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$ удовлетворяют условию* $(\mathcal{B}_3)$*, коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию* $(\mathcal{C}_8)$ *при*

$$\beta > b(1+l)\lambda_1, \tag{53}$$

где λ_1 — постоянная из условия параболичности (6), то решение задачи Коши (35), (36) *стабилизируется, т.е. существует предел* (15)*, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.*

Условие (53) является довольно точным, о чем свидетельствует

Лемма 2.26 *Для фиксированных $b > 0, \quad 0 < l < 1$ существуют: начальная функция $u_0(x)$ такая, что*

$$u_0(x) = C_0 \exp\left(b|x|^{1+l}\right) \tag{54}$$

и коэффициент $c = c(|x|)$ удовлетворяющий условию $(\mathcal{C}_8)$ *при*

$$\beta = b(1+l), \tag{55}$$

для которых решение соответствующей задачи Коши (18) *не имеет предела* (15)*, ни в одной точке $x \in R^N$.*

В главе 3 диссертации изучается первая краевая задача для параболического уравнения в цилиндре $\overline{D} = \overline{Q} \times [0,\infty)$, где Q — произвольная (возможно неограниченная) область в R^N

$$L_1(x)u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{56}$$

$$u|_S = 0, \quad t > 0, \tag{57}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in Q, \tag{58}$$

где $L_1(x)$ оператор (2) второго порядка дивергентного вида, коэффициенты которого ограниченные и измеримые функции в R^N и для которых выполнены условия симметричности $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ $(i,k = 1,\ldots,N)$ и условия параболичности (6), $S = \partial Q \times (0,\infty)$ — граница области, $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в Q функция.

Следующие пространства и функции нам потребуются в дальнейшем[3,5].

Пусть $D_T = Q \times (0,\,T)$, где Q - произвольная область в R^N

$||u||_{L_{2(D_T)}}$ - норма в пространстве $L_2(D_T)$, $||u||_{L_{2(Q)}}$ - норма в пространстве $L_2(Q)$.

Определим гильбертово пространство $\overset{o}{W}{}_2^{1,1}(D_T)$ как пополнение множества всех гладких в D_T функций, равных нулю в окрестности боковой поверхности $\partial Q \times (0,\, T)$, по норме

$$||u||^2_{\overset{o}{W}{}_2^{1,1}(D_T)} = ||u||^2_{L_2(D_T)} + ||\nabla u||^2_{L_2(D_T)} + ||u_t||^2_{L_2(D_T)}, \qquad (59)$$

гильбертово пространство $\overset{o}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$, как пополнение того же множества функций по норме

$$||u||^2_{\overset{o}{W}{}_2^{1,0}(D_T)} = ||u||^2_{L_2(D_T)} + ||\nabla u||^2_{L_2(D_T)},$$

банахово пространство $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(D_T)$, состоящее из всех элементов $\overset{o}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$, непрерывных по $t \in [0,\, T]$ в норме $L_2(Q)$, с нормой

$$||u||^2_{\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(D_T)} = \max_{a \leqslant t \leqslant T} ||u||^2_{L_2(Q)} + ||\nabla u||^2_{L_2(D_T)},$$

Через $D_T(R)$ будем обозначать пересечение

$$D_T \cap B_R = D_T(R),\ R > 0.$$

Пространство $\overset{o}{V}{}_{2,\,loc}^{1,0}(\overline{D}_T)$ состоит из таких функций u , определенных в D_T, для которых при каждом $R > 0$ найдётся функция v из $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(D_T)$, совпадающая с функцией u в $D_T(R)$. Обобщенным решением задачи (56)-(58) в D_T будем называть функцию $u(x,\, t) \in \overset{o}{V}{}_{2,\,loc}^{1,0}(\overline{D}_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T} (-uv_t + (a(x)\nabla u,\, \nabla v))dxdt = \int\limits_{Q} u(x)v(x,\, 0)dx \qquad (60)$$

для любой функции $v(x,\, t)$ из $\overset{o}{W}{}_2^{1,1}(D_T)$ с ограниченным носителем такой, что $v(x,T) = 0$. Функция $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи $(56) - (58)$, в $D = Q \times (0,\infty)$, если при всех $T > 0$ она является решением задачи $(56) - (58)$ в D_T.

Известно, что если $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в Q, то ограниченное обобщенное решение задачи $(56) - (58)$ существует и единственно.

Будем рассматривать случай $N \geqslant 3$. Пусть E — борелевское множество в R^N. Рассмотрим на E всевозможные меры μ с носителем на E, удовлетворяющие условию:

$$K(E) = \Big\{ \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} \leqslant 1 \Big\}$$

Винеровской ёмкостью множества E называется число

$$\mathrm{cap}(E) = \sup_{\mu \in K(E)} \mu(E). \qquad (61)$$

Превосходный обзор вопросов, связанных с понятием емкости можно найти в книге Н.С. Ландкофа [31].

[31] Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала М. 1966.

Справедлив следующий критерий стабилизации решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\triangle u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D = Q \times (0, \infty), \tag{62}$$

$$u|_S = 0, \quad t > 0, \tag{63}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{64}$$

где Q — произвольная, возможно неограниченная область в R^N, $N \geqslant 3$, $u_0(x)$ — ограниченная непрерывная в области Q функция, решение задачи (62) – (64) понимается в смысле выполнения соответствующего интегрального тождества (60), где $a_{ik} = \delta_{ik}$. Не ограничивая общности считаем, что $0 \in \partial Q$, $\operatorname{cap}(R^N \backslash Q) > 0$.

Теорема 3.1 *Для того чтобы решение задачи* (62) – (64) *стабилизировалось к нулю, т. е. существовал предел*

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0 \tag{65}$$

равномерно по x на каждом компакте K в Q, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $q > 1$ выполнялось следующее условие (A)

$$\text{(A)} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{m(N-2)}} = \infty, \tag{66}$$

Имеет место и интегральный аналог теоремы 1.

Теорема 3.2 *Для того чтобы решение задачи (62)-(64) стабилизировалось к нулю, т. е. существовал предел (65), равномерно по x на каждом компакте K в Q, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие (B):*

$$(B) \int_a^{\infty} \frac{cap(\bar{B}_\tau \backslash Q)}{\tau^{N-1}} = \infty, \; a > 0. \tag{67}$$

Имеет место основной результат 3-й главы.

Теорема 3.3 *Для того чтобы решение задачи (56)-(58) стабилизировалось к нулю, равномерно относительно x на каждом компакте K в Q, необходимо и достаточно, чтобы это свойство было справедливо для решения задачи (62)-(64) для уравнения теплопроводности.*

Следствие *Если область Q в R^N такова, что расходится ряд (66) (интеграл(67)), то для задачи (56)-(58) справедливо неравенство*

$$|u(x_0, t)| \leqslant C_2 \exp\{-C_1 \int_{a_0}^{\sqrt{t}} \frac{\operatorname{cap}(\bar{B}_\tau \backslash Q) d\tau}{\tau^{N-1}}\}, \tag{68}$$

где x_0 - производная точка Q, $a_0 > 0, C_1 > 0, C_2 > 0$, постоянные C_1 и a_0 зависят от λ_1, λ_0, N и $|x_0|$.

Из теоремы 3.3 следует устойчивость решений задачи (56)-(58) по отношению к изменению коэффициентов a_{ik} уравнения (56) и начальной функции.

Пусть Q - та же область в R^N , $N \geqslant 3$ что и в задаче (56)-(58). Вместе с ней рассмотрим в цилиндре $D = Q \times [0, \infty)$ другую задачу

$$L_1(x) u_1 - u_{1t} = 0 \quad \text{в } D \tag{69}$$

$$u_1|_S = 0, S = \partial Q \times (0, \infty) \tag{70}$$

$$u_1|_{t=0} = u_1(x), x \in Q, |u_1(x)| \leqslant M \tag{71}$$

где

$$L_1(x)u_1 = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}^1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_k}) \tag{72}$$

и для ограниченных и измеримых в Q коэффициентов $a_{ik}^1(x)$ выполнено неравенство параболичности (6), с теми же постоянными $\lambda_0^2, \lambda_1^2, u_1(x)$ - ограниченная и непрерывная в Q функция.

Теорема 3.4 *1. Если область $Q \in R^N$, $N \geqslant 3$ такова, что расходится ряд (66), (интеграл (67)), то решения краевых задач (56)-(58) и (69)-(71)) имеют пределы*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} u_1(x,t) = 0 \tag{73}$$

$x \in Q$ равномерно относительно x на каждом компакте K в Q.

2. Если существует один из пределов (73), то для области Q расходится ряд (66) (интеграл (67)) и тогда существует и другой предел в (73).

Основные результаты ДИССЕРТАЦИИ

На основе предложенных общих подходов были получены новые, неулучшаемые результаты о стабилизации решений задач Коши и первой краевой задачи для параболических уравнений.

Подводя итоги проведенного исследования кратко сформулируем новые результаты, которые выносятся на защиту:

1. С помощью построения растущих положительных обобщенных решений (антибарьеров) соответствующих суперпараболических неравенств, доказаны теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с дивергентным оператором в классах ограниченных функций, при этом впервые указаны точные достаточные условия стабилизации, зависящие от числа измерений.

2. С помощью построения растущих положительных обобщенных решений (антибарьеров) получены точные достаточные условия стабилизации решения задачи Коши с дивергентным оператором в классах функций, имеющих степенной порядок роста $m > 0$ на бесконечности.

3. Установлены точные достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения с дивергентным оператором, в классах начальных функций, растущих как $\exp(a|x|)$ на бесконечности, при которых решение задачи Коши стабилизируется.

4. Получены точные достаточные условия на младшие ограниченные коэффициенты, зависящие от x и от t параболического уравнения с недивергентным оператором, которые гарантируют стабилизацию решения задачи Коши, в классе начальных функций, имеющих на бесконечности следующий рост:

$$\exp(a|x|^n), \quad 0 < n < 1$$

5. Получены точные достаточные условия на коэффициенты, зависящие от x и от t, причем коэффициент при $c(x,t)$, при $u(x,t)$ в уравнении является неограниченно растущим, при выполнении которых решение задачи Коши стабилизируются, для любой начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию роста $\exp(a|x|^k), \quad 1 < k < 2.$ на бесконечности.

6. Установлены необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши $\Delta u - b(|x|)u - u_t = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x)$, которые выражаются в терминах расходимости некоторого несобственного интеграла от $b(|x|)$.

7. Установлены необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с ограниченной начальной функцией, которые выражаются в терминах расходимости некоторого ряда интеграла из емкостей.

8. Установлены необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения с ограниченной начальной функцией, которые выражаются в терминах расходимости некоторого ряда (интеграла), включающего винеровские емкости.

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю академику В.А. Ильину за постановку задач, постоянное внимание к работе, ценные советы и консультации в ходе её выполнения.

Автор благодарит также академика А. М. Ильина и академика Е. И. Моисеева за внимание и ценные советы.

Автор приносит благодарность всем участникам семинара кафедры общей математики, и особенно члену корреспонденту И. А. Шишмареву, и профессору И. С. Ломову.

Автор считает своим долгом поблагодарить профессора В. В. Жикова, профессора $\boxed{\text{В. А. Кондратьева}}$ и профессора Ю. А. Алхутова за постоянную поддержку и внимание.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 506–515.

2. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом и растущей начальной функцией. // ДАН РАН 2004. Т. 397. № 4. С. 439–441.

3. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с коэффициентом младшего порядка и растущей начальной функцией. // Труды семинара И.Г. Петровского, 2003. Т. 23. С. 127–148.

4. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени. // УМН, 2005. Т. 60. № 4 С. 145–212.

5. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 79–97.

6. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами и с полиномиально растущей начальной функцией. // Труды конференции Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы образования.Физ.мат.лит. 2003. С. 239–245.

7. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами и с экспоненциально растущей начальной функцией. // Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 2008. Т. 261 С. 97–100.

8. *Денисов В.Н.* О стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшим коэффициентом в классах растущих начальных функций. // ДАН РАН 2010, Т.430, № 5, с. 586-588.

9. *Денисов В.Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами. // Труды МИАН им. В. А. Стеклова, 2010, т. 270, с. 97-109

10. *Денисов В.Н.* Условия стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения в классах растущих начальных функций. // Труды конференции Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология Москва, 2008, с. 118-132

11. *Denisov V. N.* Stabilization of a solution to the Cauchy Problem for a Nondivirgence Parabolic Equation with Growing Lower order coefficients. // Proceeding of the Steklov Inst. of Math.2010,v.270, pp.91-103.

12. *Денисов В.Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами. //Современная математика. Фундаментальные направления, 2010, т. 36, с. 61-71

13. *Денисов В.Н.* О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами. // ДАН РАН, 2010, т. 433, № 4, с. 452-454

14. *Denisov V. N.* On necessary and sufficient condition of stabilization of solution of the first boundary value problem for parabolic equations // International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics"2006, section 1, p 54-55

15. *Денисов В.Н.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности // ДАН РАН 2006. Т. 407. № 2. С. 163–166.