МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Ингтем Женни Гастоновна

ПРИМЕНЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СПЛАЙН—ФУНКЦИЙ С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	Доктор физико–математических наук, профессор Дмитриев Владимир Иванович
Официальные оппоненты:	Доктор физико–математических наук, профессор Трофимов Вячеслав Анатольевич
	Кандидат Физико–математических наук, доцент кафедры прикладной математики МИРЭА Куликов Сергей Павлович
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им А.А. Дородницина РАН

Защита состоится "_____"________________ 2011 г. в ________час._______ мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан "_____"________________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико–математических наук, профессор Е.В. ЗАХАРОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая диссертация посвящена построению сплайна с минимальной нормой производной и его применению в задачах математического моделирования, в частности, для решения интегральных уравнений Фредгольма I – ого рода.

Актуальность темы диссертации

Методы математического моделирования в настоящее время во многом определяют эффективность решения задач науки и техники, при этом широко используются сплайн–функции.

Настоящая диссертация рассматривает следующие области применения сплайн–функций:

1. Интерполяция данных, полученных при математическом моделировании, с целью аналитического задания расчетных характеристик в зависимости от параметров задачи.

2. Аппроксимация наблюденных данных для пересчета их на заданную сетку, используемую при математическом моделировании.

3. Использование сплайн функций при решении интегральных уравнений и аналитическом продолжении потенциала.

Методы математического моделирования прикладных задач, использующие сплайн–функции, сталкиваются с рядом проблем, связанных с накоплением ошибок сплайном:

1. При моделировании сложных систем расчеты проводятся в зависимости от параметра на сетке с крупным шагом. Полученные результаты, в дальнейшем, необходимо интерполировать, что обычно проводится с помощью сплайн–функций.

   С одной стороны, полученные при математическом моделировании результаты на сетке значений параметров, не предоставляют достаточно условий для построения сплайна, в связи с этим необходимо дополнительно задать краевые условия, которые позволяют построить сплайн. В качестве таких краевых условий выступают условия периодичности или дополнительно задаются значения производных, чаще всего на границе. Например, в случае квадратичного сплайна задается значение первой производной в начальной точке, а в случае кубического сплайна необходимо задать два значения первой производной в соседних точках или задать значения первой и второй производных в начальной точке.

С другой стороны, кроме того, что сплайн – функция сама по себе обладает свойством появления колебаний, амплитуда которых растет по мере удаления от начальной точки, большой шаг сетки усиливает наращивание ошибок. Таким образом, чем с большей погрешностью задана производная в начальной точке, тем раньше возникают колебания в сплайн – функции.

2. Устойчивое решение интегрального уравнения Фредгольма I – ого рода позволяет решать ряд обратных задач, в частности, задачу аналитического продолжения гравитационного потенциала в сторону источников. Для таких задач можно эффективно построить математическую модель при помощи сплайнов. Эта задача принадлежит к классу некорректно поставленных задач, для решения которых наиболее широко используется метод регуляризации Тихонова, основывающийся на минимизации сглаживающего функционала. Метод регуляризации сводит задачу нахождения решения, устойчивого к малым колебаниям правой части, к построению минимизирующего функционала и определению параметра регуляризации при стабилизаторе. В качестве стабилизатора берется норма производной сплайна, приближающего решение в пространстве интегрируемых с квадратом функций. Таким образом, подбор параметра регуляризации усложняет нахождение решения интегрального уравнения.

Исследование и решение описанных вопросов являются актуальными в современной науке, поскольку позволяют упростить решение востребованных задач.

Цель работы

Цель диссертационной работы заключается в разработке нового подхода к построению сплайнов, основанного на требовании: норма производной сплайна должна достигать своего минимума. Сплайн с таким свойством позволяет:

1. определять краевые условия, основываясь на требовании минимума нормы его производной, предоставляющем возможность более точно задавать условия в начальной точке и подавлять возникающие колебания сплайна, выполнение такого требования позволяет аппроксимировать результаты математического моделирования на большем отрезке;

2. решать задачи аппроксимации, обходясь без стабилизатора – это означает, что регуляризация задачи достигается за счет свойства самого сплайна;

3. решать интегральные уравнения Фредгольма I– ого рода и осуществлять математическое моделирование задач гравиразведки. В частности, в за-

дачах аналитического продолжения, свойство минимальной нормы производной сплайна позволяет получить устойчивое решение.

Положения выносимые на защиту

1. Разработан алгоритм построения квадратичного и кубического сплайнов с минимальной нормой первой производной, что позволяет уменьшить погрешность сплайн аппроксимации результатов математического моделирования. Разработан алгоритм построения двумерного параболического сплайна, который сводится к последовательному построению одномерных сплайнов с минимальной нормой производной.

2. Показано, что применение сплайна с минимальной нормой производной в задачах аппроксимации позволяет обходиться без стабилизатора, то есть регуляризация задачи достигается с помощью свойства самого сплайна.

3. Исследовано применение сплайна при решении интегрального уравнения Фредгольма I – ого рода и математическом моделировании задач гравиразведки. В частности, рассмотрена задача аналитического продолжения и получено устойчивое решение этой задачи при помощи сплайна с минимальной нормой производной.

Научная новизна работы

Диссертационная работа предлагает оригинальный подход к построению сплайн–функций. Сплайн строится, исходя из условия достижения минимума нормы его производной. Таким образом, полученные результаты математического моделирования на сетке значений, позволяют построить сплайн, норма производной которого, заведомо минимальна. Новшество построения сплайна двух переменных состоит в том, что строится сплайн с минимальной нормой производной по одной переменной, а коэффициенты этого сплайна сами являются сплайнами с минимальной нормой производной по второй переменной.

В задачах аппроксимации было предложено построить регуляризацию, не обращаясь к стабилизатору, которым обычно выступает норма производной сплайна, приближающего решение в пространстве интегрируемых с квадратом функций. Новизна данного подхода состоит в том, что регуляризация задачи достигается за счет свойства самого сплайна, это позволяет избежать решение дополнительной задачи – подбора параметра регуляризации при стабилизаторе.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет как практическую, так и теоретическую значимость. Теоретическая значимость заключается в разработке и исследовании сплайна с минимальной нормой производной в одномерном и двумерном случаях. Получена оценка остаточного члена интерполяционного квадратичного сплайна с минимальной нормой производной. Разработан и описан метод решения интегральных уравнений Фредгольма I – ого рода с использованием полученного сплайна.

Практическая ценность заключается в применении разработанного сплайна в задачах интерполяции, в частности, при численном интегрировании; в задачах аппроксимации, при математическом моделировании задач гравиразведки. Полученный алгоритм позволил определить гравитационный потенциал по результатам математического моделирования для двумерного и трехмерного случаев, а также решить задачу аналитического продолжения гравитационного потенциала в сторону источников. Результаты, полученные в диссертации, могут применяться во многих обратных задачах, где требуется решение интегральных уравнений Фредгольма I – ого рода.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в разработке и исследовании предложенного в диссертации метода построения сплайна, разработке метода регуляризации на основе полученного сплайна, применении и исследовании этих методов в задачах интерполяции, аппроксимации и при математическом моделировании задач гравиразведки.

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, были впервые получены автором. Постановка задач и ход научных исследований осуществлялись под руководством д.ф.– м.н. профессора Дмитриева В.И. Основное содержание диссертационной работы и ее результатов полностью отраженно в пяти научных публикациях автора. В материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

Публикации

Положения диссертации отражены в 5 публикациях автора, 3 из которых в изданиях рекомендованных ВАК [2,3,5].

Структура работы

Диссертация написана на 121 странице, состоит из титульного листа, оглавления, введения, трёх глав, заключения и списка литературы (35 наименований).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Дмитриеву за поддержку и постоянную помощь в работе.

Краткое содержание работы

ГлаваI. Построение сплайна с минимальной производной. В настоящей главе рассматривается построение сплайн–функции с минимальной нормой производной.

Параграф I.1 посвящен построению сплайна с минимальной нормой производной на примере полиномиального квадратичного сплайна.

Для построения параболического сплайна:

$$S_n(x) = \frac{p_n}{h}(x-x_n)(x_{n+1}-x)+f_{n+1}\frac{(x-x_n)^2}{h^2}+f_n\frac{(x_{n+1}-x)(x_{n+1}+x-2x_n)}{h^2}, \tag{1}$$

где $x \in [x_n, x_{n+1}]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, на отрезке $[a, b]$ кроме заданных значений f_n, обычной является известность первой производной в начальной точке p_0. Условие гладкой склейки: $S'_n(x_{n+1}) = S'_{n+1}(x_{n+1})$ дает рекуррентное соотношение между производными p_{n+1} и p_n двух соседних участков: $p_{n+1} = -p_n + 2\frac{f_{n+1}-f_n}{h}$, приводящее к выражению всех производных через производную в начальной точке

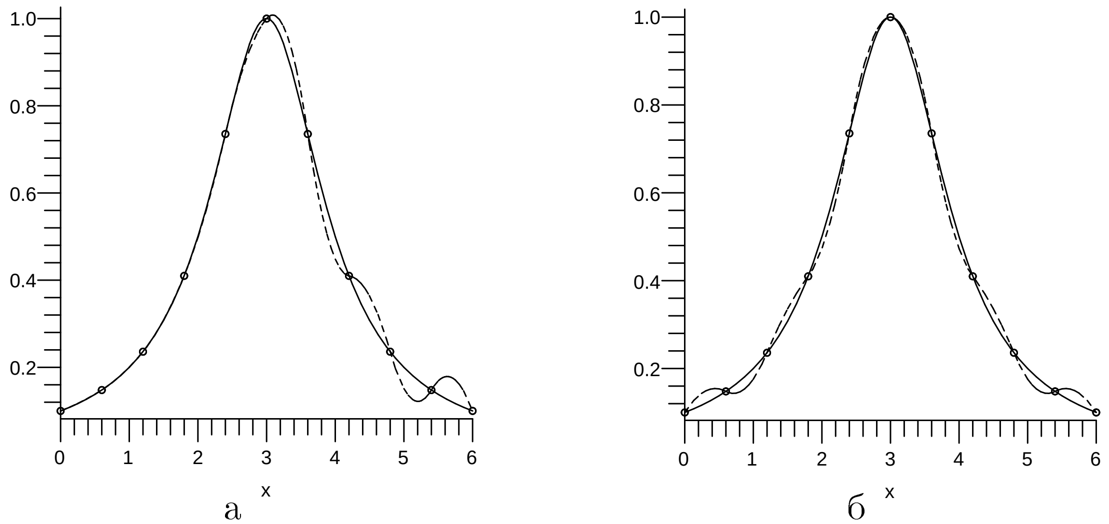
$$p_n = (-1)^n \left(p_0 + \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(f_k - f_{k-1})\right). \tag{2}$$

В случае отсутствия краевых условий, позволяющих вычислить эту производную, используют разностную производную или же вычисляют её с помощью формул численного дифференцирования. Однако, для близости полученной производной с точной, необходим маленький шаг измерений, что бывает затруднительным, особенно, если данные получены экспериментально. Но, даже, если производная точно известна, квадратичный сплайн, вообще говоря, не является устойчивым, и, следовательно, будет накапливать ошибки.

Для устранения этих недостатков предлагается построить сплайн, который будет обладать свойством минимальной нормы производной в пространстве $L_2[a, b]$. Это приведет к тому, что в начальной точке отрезка, из условия $\min\limits_{p_0} \|S'(x)\|^2_{L_2[a,b]}$, получается следующее значение первой производной сплайна:

$$p_0 = \frac{1}{Nh}\sum_{n=0}^{N-1}\left((-1)^n(f_{n+1} - f_n) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(f_k - f_{k-1})\right). \tag{3}$$

Таким образом, вопрос о необходимости задания краевых условий отпадает. На примере функции $f(x) = \dfrac{1}{1+(3-x)^2}$ проиллюстрирована её интерполяция квадратичным сплайном на отрезке $[0, 6]$, с шагом $h = 0,6$. На представленном рисунке можно заметить, что интерполяция сплайном с минимальной нормой производной (рисунок 1б) более гладкая, чем, когда в качестве производной в начальной точке задается точная производная (рисунок 1а).



а б

- - - сплайн; ——— интерполируемая функция

рисунок 1

Получена оценка остаточного члена интерполяционного квадратичного сплайна с минимальной нормой производной, которая обусловлена следующими теоремами.

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C[a,b]$, *тогда* $|S(x) - f(x)| \leqslant 2N\omega(f,h)$, *для* $x \in [a,b]$.

где для некоторой функции $g(t)$*–непрерывной на отрезке* $[c,d]$ *величина* $\omega(g,\delta) = \max\limits_{t_1,t_2\in[c,d],|t_1-t_2|\leqslant\delta} |g(t_1) - g(t_2)|$, $(0 \leqslant \delta \leqslant (d-c))$

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C^1[a,b]$, *то*

$$|S'(x) - f'(x)| \leqslant 3N\omega(f',h) \quad \textit{и}$$
$$|S(x) - f(x)| \leqslant 3(b-a)\omega(f',h)\,,$$

$x \in [a,b]$.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in C^2[a,b]$, *то*

$$|S''(x) - f''(x)| \leqslant \frac{1}{N}\,\|f''(x)\|_{C[a,b]} + (3N+1)\,\omega(f'',h),$$
$$|S'(x) - f'(x)| \leqslant \frac{b-a}{N^2}\,\|f''(x)\|_{C[a,b]} + 4(b-a)\,\omega(f'',h),$$
$$|S(x) - f(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8N^3}\,\|f''(x)\|_{C[a,b]} + \frac{(b-a)^2}{2N}\,\omega(f'',h)\,,$$

$x \in [a,b]$.

В параграфе I.2 рассматривается двумерная задача построения сплайна на равномерной прямоугольной сетке, которая сводится к последовательному построению одномерных сплайнов с минимальной нормой производной. Двумерный сплайн представляется на каждом частичном прямоугольнике сетки в виде сплайна с минимальной нормой производной по одной переменной с коэффициентами, являющимися сплайнами с минимальной нормой производной, по другой переменной. Показано, что, построенный таким образом двумерный сплайн, принадлежит к классу $C^{(1,1)}$.

В параграфе I.3 рассмотрено построение сплайна с минимальной нормой производной на примере кубического полиномиального сплайна. В данном случае, кроме заданных значений на сетке, требуется два дополнительных условия на границе. В качестве таких условий обычно выступают условия периодичности или дополнительно задаются значения первой и второй производной в начальной точке. В диссертации предложено находить значение первой производной в начальной и следующей точке из условия минимума нормы производной.

В параграфе I.4 исследуется применение сплайна с минимальной нормой производной в задачах интерполяции на примере вычисления интеграла от функции Бесселя.

ГлаваII <u>Сплайн с минимальной нормой производной в задачах аппроксимации</u> посвящена задачам аппроксимации. Построена аппроксимационная сплайн – функция с минимальной нормой производной в одномерном и двумерном случаях. Построен метод решения интегрального уравнения Фредгольма I – ого рода при помощи сплайна с минимальной нормой производной.

В параграфе II.1 рассматривается задача аппроксимации функции по значениям, заданным с погрешностью. Такие задачи решаются с помощью методов регуляризации. В диссертации исследуется метод регуляризации Тихонова. При решении задач аппроксимации показано, что в процессе регуляризации:

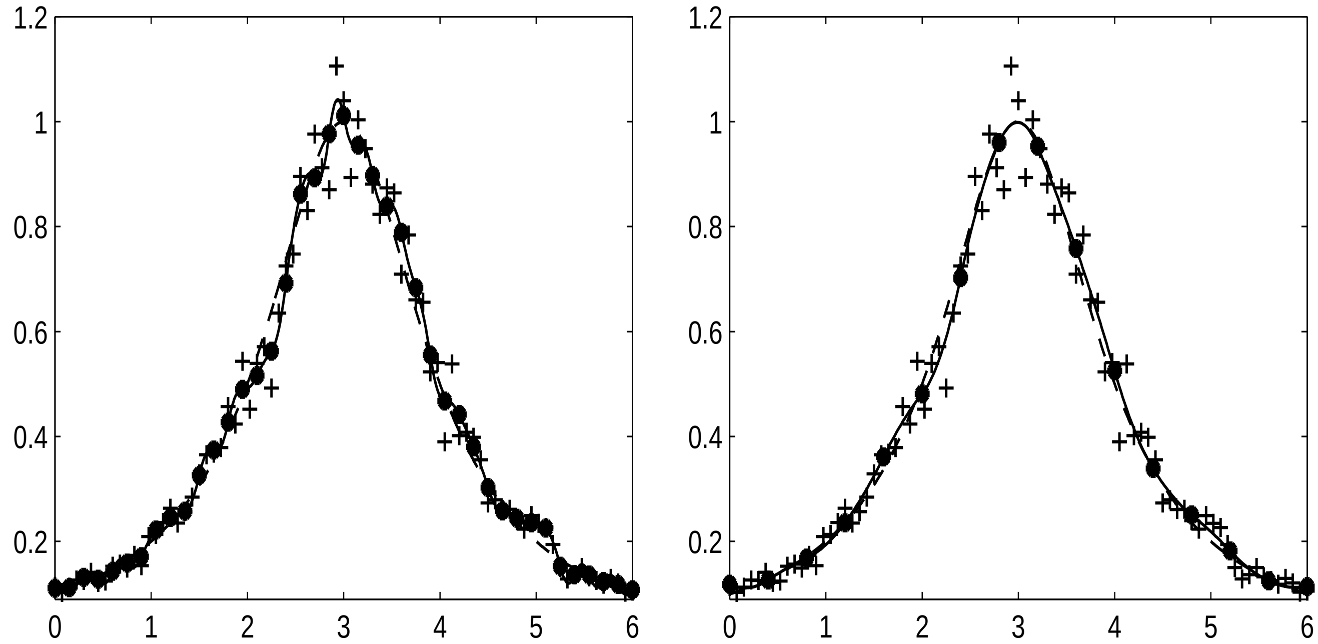
$$\min_{\bar{f},p_0}\left\{\|f^* - S(x,\bar{f},p_0)\|^2_{\mathbb{R}^{M+1}} + \alpha\|S'(x,\bar{f},p_0)\|^2_{L_2}\right\}, \qquad (4)$$

где $\bar{f}^* = (f_0^\delta, f_1^\delta, \ldots, f_{N_{\text{изм}}})$ измеренные значения, можно обойтись без дополнительных вычислений, связанных с поиском параметра регуляризации α, поскольку учитывается, что сплайн $S(x,\bar{f},p_0)$ достигает минимума нормы своей первой производной в пространстве L_2 по p_0 (производная в начальной точке). В соответствии с этим, второе слагаемое опускается. Учитывая также, что $p_0(\bar{f})$– выражается через "искомые" аппроксимационные значения

$\bar{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ предлагается вместо (4) решать следующую задачу:

$$\min_{\bar{f}} \|f^* - S(x, \bar{f})\|^2_{\mathbb{R}^{M+1}} \ ,$$

которая позволяет получить устойчивое решение. Следующий пример показывает применение вышеописанного метода при аппроксимации квадратичным сплайном с минимальной нормой производной функции $f(x) = \dfrac{1}{1 + (3 - x)^2}$, заданной 81–м значением на отрезке $[0, 6]$ с относительной погрешностью $\delta \approx \dfrac{1}{10}$. Чтобы избежать сильного влияния погрешности, число аппроксимационных значений, по которым строится сплайн, следует брать в несколько раз меньше числа заданных. На рисунке 2а сплайн построен по 41 аппроксимационному значению, рисунок 2б получен по 16–и аппроксимационным значениям.



а б

——— сплайн; - - - - интерполируемая функция;

+ заданные значения; • полученные значения

рисунок 2

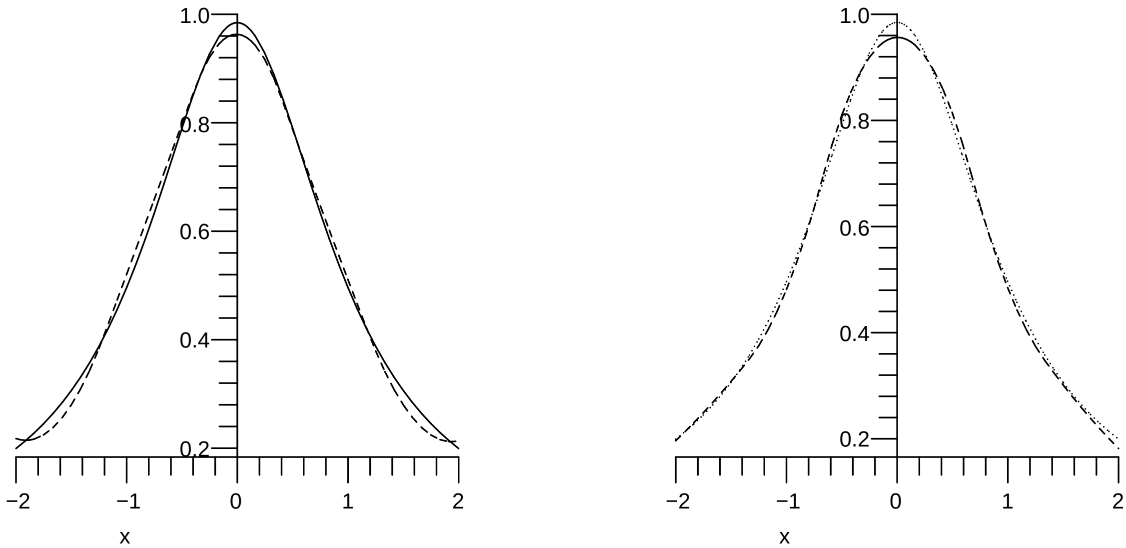
В параграфе II.2 исследуется задача построения двумерной сплайн аппроксимации. Аналогично одномерному случаю, задача минимизации:

$$\min_{\bar{f}, \bar{p}_x^0} \left\{ \|f^* - S\|^2_{R^{(N_\delta+1)\times(M_\delta+1)}} + \alpha \|S'(x, y)\|^2_{L_2} \right\}$$

где $\bar{p}_x^0 = (p_x^{0,0}, p_x^{0,1}, \ldots, p_x^{0,M})$–производные в точках (x_0, y_j), $j = 0, 1, \ldots, M$, сетки искомых значений $\bar{\Delta}_{NM}$, сводится к следующей задаче:

$$\min_{\bar{f}} \|f^* - S\|^2_{R^{(N_\delta+1)\times(M_\delta+1)}} \ .$$

Эффективность использования этого метода проиллюстрировано на примере функции $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$, заданной с относительной погрешностью $\dfrac{1}{100}$ на прямоугольной сетке значений $\Delta_{11,11}([-2,2]\times[-1,1])$. На рисунках отображено сечение графика плоскостью $y=-1/8$. На рисунке 3a аппроксимация построена на сетке полученных значений $\Delta_{6,6}([-2,2]\times[-1,1])$. На рисунке 3б искомые значения получены на сетке $\Delta_{7,7}([-2,2]\times[-1,1])$.



a　　　　　　　　b

——— интерполируемая функция　　　　......... интерполируемая функция

- - - - сплайн　　　　- - - - сплайн

рисунок 3

В параграфе II.3 разрабатывается метод решения интегральных уравнений Фредгольма I–ого рода с использованием сплайна с минимальной нормой производной. Построенный метод основывается на методе регуляризации Тихонова и состоит из двух этапов. На первом этапе строится решение интегрального уравнения:

$$\int_a^b K(x_n,t)y(t)dt = f_n^\delta\ ;$$

функция $y(t)$ аппроксимируется сплайном. При построении регуляризации, как упоминалось раньше, учитывается, что сплайн построен таким образом, что норма его первой производной достигает своего минимума в пространстве L_2 и $p_0(\bar f)$ выражается через искомые значения $\bar f$, следовательно, можно считать что, условия, накладываемые на стабилизатор, частично выполняются, соответственно, задача минимизации:

$$\min_{p_0,\bar y^\delta}\{\|\mathcal{A}S - f^*\|^2_{\mathbb{R}^{M+1}} + \alpha\Omega[S]\}$$

сводится к следующей задаче:

$$\min_{\bar{y}^\delta}\{\|\mathcal{A}S - f^*\|^2_{\mathbb{R}^{M+1}}\} \ ,$$

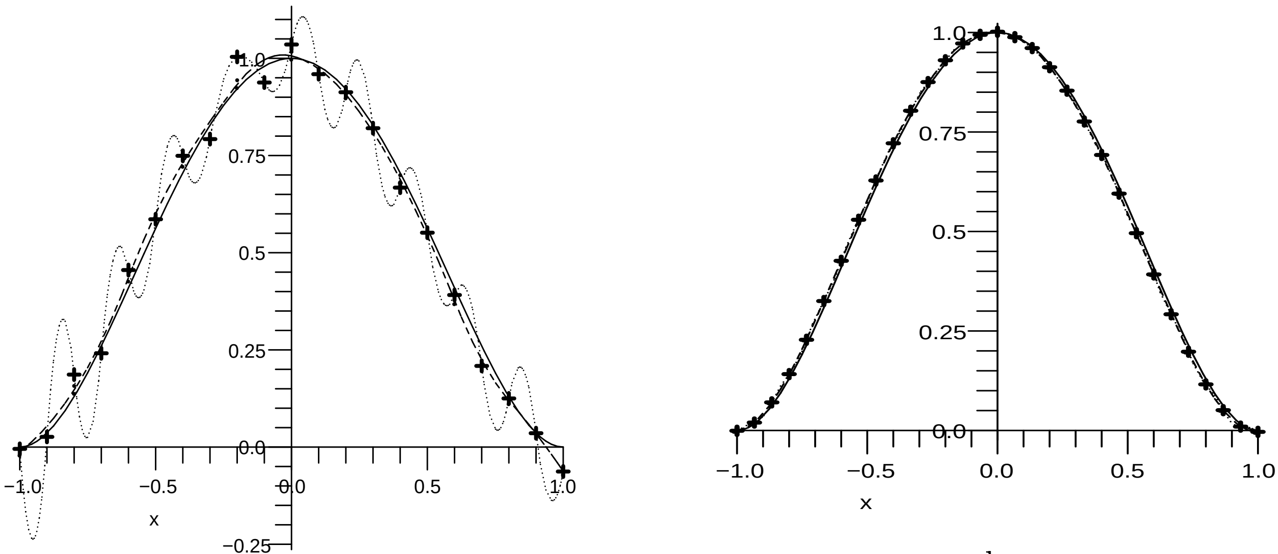
где $\mathcal{A}$– линейный интегральный оператор, S–сплайн, f^* – вектор заданных значений.

Второй этап заключается в том, что, по полученным на первом этапе значениям $\bar{y}^\delta$, строится аппроксимация, описанная в параграфе II.1, которая и дает окончательное решение.

Рисунок 4 показывает, что, описанный метод, позволяет эффективно решать интегральные уравнения Фредгольма I – ого рода. Для следующего интегрального уравнения

$$\int\limits_{-1}^{1} K(x,t)u(t)dt = f(x) \ ,$$

где $K(x,t) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + \frac{1}{100}}}$, строится аппроксимация решения $u(t) = (1-t^2)^2$ при заданном 41 значении правой части с относительной погрешностью $\approx 10^{-3}$, промежуточное решение строится по 21 значению, а окончательное по 10 значениям (рисунок a). Рисунок б отображает решение при заданном 61 значении с погрешностью $\approx 10^{-6}$; промежуточное решение получено по 31 значению, и окончательное по 15 значениям, полученным на втором этапе описанного метода.



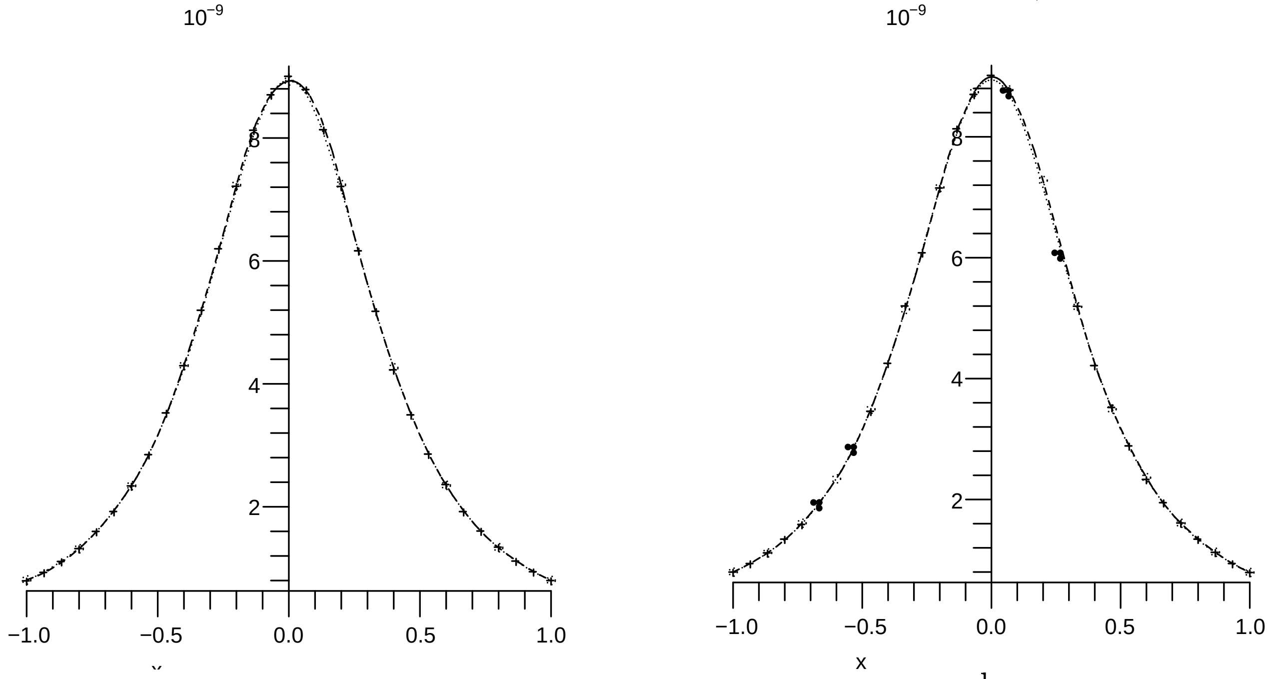
a b

——— точное решение; .... промежуточное решение;

- - - окончательное решение

рисунок 4

ГлаваIII посвящена применению сплайн функции с минимальной нормой производной при математическом моделировании задач гравиразведки. В параграфе III.1 рассматривается аппроксимация результатов математического моделирования в двумерном случае при помощи разработанного сплайна и метода на примере задачи определения гравитационного потенциала по измеренным значениям. На рисунке 5а задано 31 значение с относительной погрешностью $\simeq 1\%$ на промежутке 2км с равномерным шагом. На рисунке 5б отображена смоделированая ситуация, когда в силу природных или другого рода условий не удается получить измерения с равномерным шагом на всем отрезке (участки, на которых измерение пропущено выделены жирными точками).

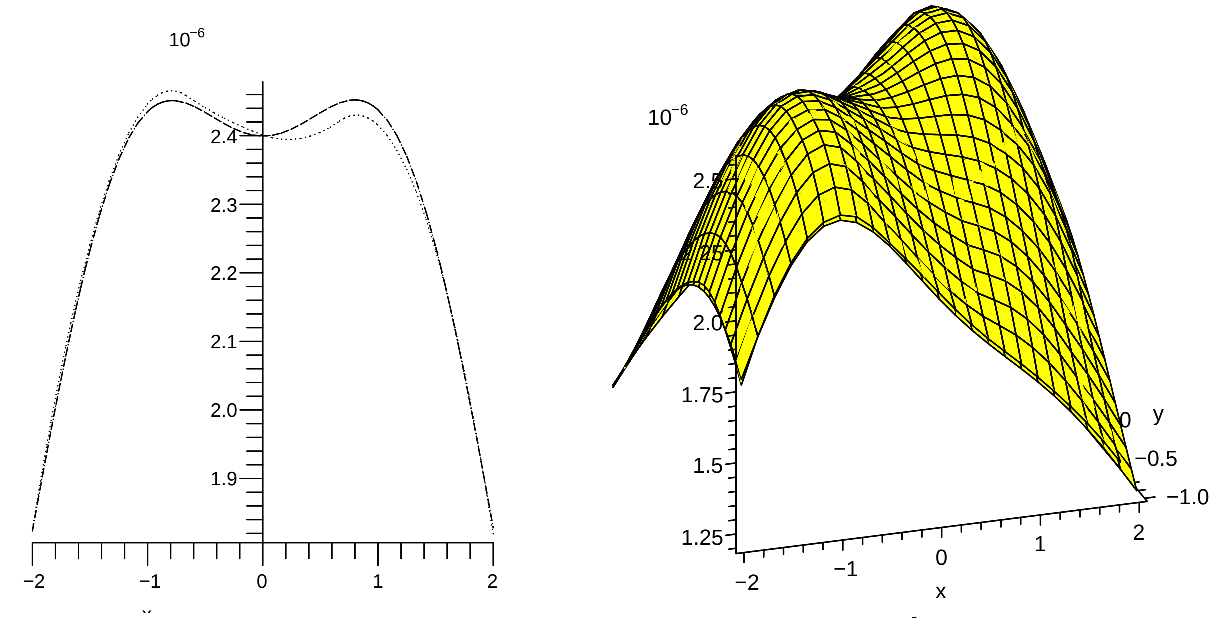


a b

.... гравитационный потенциал; - - - сплайн аппроксимация

рисунок 5

В параграфе III.2 рассматривается аппроксимация результатов математического моделирования в трехмерном случае. Рисунок 6 показывает результат математического моделирования задачи определения гравитационного потенциала, когда достаточно близко расположены два тела.



a b

——— гравитационный потенциал; .... сплайн аппроксимация

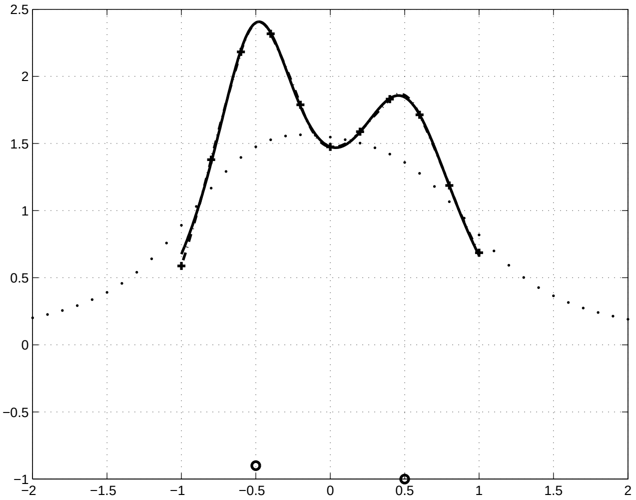
рисунок 6

Проведенные исследования показали, что можно, таким образом, успешно решать интегральные уравнения первого рода и достаточно хорошо восстанавливать решение задачи аналитического продолжения потенциала поля.

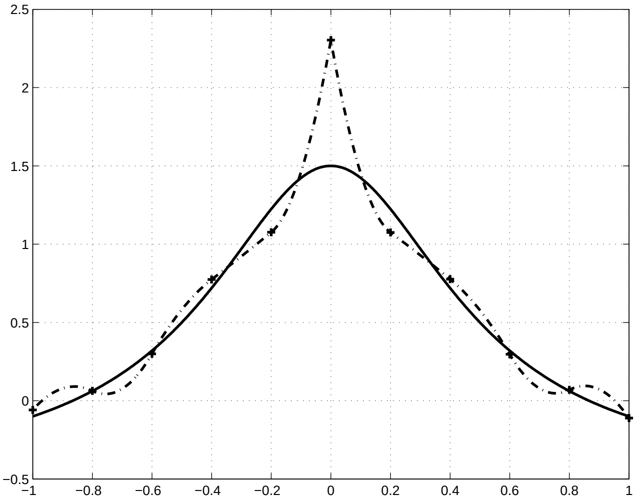
В параграфе III.3 рассматривается задача аналитического продолжения потенциала в сторону источников; исследуется случай, когда в силу большого количества заданных значений, отрезок, на котором строится сплайн, приходится разделить, и на каждой половине построить сплайн с минимальной нормой производной, что в точке стыка сплайнов приводит к разрыву первой производной. В диссертации предложено устранить этот разрыв с помощью кубического сплайна. Описанный подход позволяет эффективно решать задачу аналитического продолжения гравитационного потенциала.

На рисунке 7 показано решение задачи аналитического продолжения с помощью разработанного метода решения интегральных уравнений Фредгольма I– ого рода. Рисунок а иллюстрирует полученное решение в случае, когда два источника близко расположены: $x_1 = -0,5$ и $x_2 = 0,5$ на глубине $\zeta = 0,9$ и $\zeta = 1$ так, что потенциал на дневной поверхности, заданный с погрешностью $\delta \approx 10^{-6}$ 41 значением, не указывает на существование второго источника. Рисунок б: отрезок продолжения потенциала делится пополам и на каждой половине строится свой сплайн с минимальной нормой производной. Производная для каждого сплайна строится в точке стыка т.е. в точке 0 причем норма производной каждого сплайна минимальна. Значение производной справа и слева от точки стыка, вообще говоря, не совпадают. Как показывает рисунок б, в точке стыка образуется "нежелательный угол".

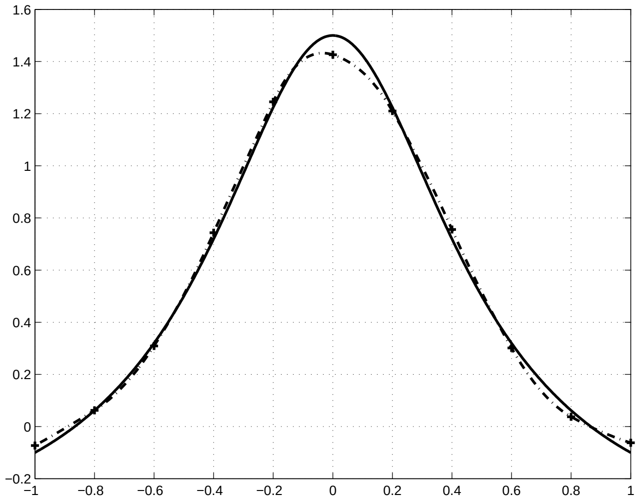
На рисунке в. показано, что от недостатка разрыва производной в точке стыка квадратичных сплайнов, можно избавиться. Для этого в окрестности точки стыка строится кубический сплайн соединяющий квадратичные сплайны.



а



б



в

—— гравитационный потенциал; - - - сплайн аппроксимация

рисунок 7

В **Заключении** приведены основные полученные результаты диссертационной работы:

1. Разработан алгоритм построения квадратичного и кубического сплайнов с минимальной нормой первой производной, что позволяет уменьшить погрешность сплайн аппроксимации результатов математического моделирования. Разработан алгоритм построения двумерного параболического

сплайна, который сводится к последовательному построению одномерных сплайнов с минимальной нормой производной.

2. Показано, что применение сплайна с минимальной нормой производной в задачах аппроксимации позволяет обходиться без стабилизатора, то есть регуляризация задачи достигается с помощью свойства самого сплайна.

3. Исследовано применение сплайна при решении интегрального уравнения Фредгольма I–ого рода и математическом моделировании задач гравиразведки. В частности, рассмотрена задача аналитического продолжения и получено хорошее решение этой задачи при помощи сплайна с минимальной производной.

Основные положения диссертации изложены в работах

1. Дмитриев В.И. Ингтем Ж.Г. Использование сплайн аппроксимации при решении интегрального уравнения первого рода//Прикладная математика и информатика №14, М: Изд-во ВМиК МГУ, 2003, с.5-10.

2. V.I.Dmitriev, J.G. Ingtem Solving an Integral Equation of the First Kind by Spline Approximation // Computational Mathematics and Modeling vol.15, №2, 2004, p.99-104.

3. Ингтем Ж.Г. Сплайн функция с минимальной нормой производной в задачах интерполяции и аппроксимации // Вестник Московского Университета Вычислительная математика и кибернетика//2008 №4 (стр.16-27).

4. Дмитриев В.И. Ингтем Ж.Г. Двумерный сплайн с минимальной производной// Прикладная математика и информатика, №33 - М., МАКС Пресс, 2009, (стр.101-107).

5. V.I.Dmitriev J.G. Ingtem A two-dimensional minimum-derivative spline// Computational mathematics and modeling vol.21 №2 pp 206-211// Springer 2010.