МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Жуковский Сергей Евгеньевич

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ И УПРАВЛЯЕМЫМ СИСТЕМАМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Арутюнов Арам Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
доцент Ильин Александр Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор Никольский Михаил Сергеевич

Ведущая организация:

Центральный экономико-математический институт РАН.

Защита состоится "___"_________ 2011 года в ___ на заседании диссертационного совета Д501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВМК МГУ.

Автореферат разослан "___"_______ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д. ф.-м. н., профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена применению теории α-накрывающих отображений в метрических пространствах к исследованию локальной разрешимости дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегральных уравнений и управляемых систем. В частности, рассматриваются

- управляемая система вида
$$\dot{x} = f(t, x, u), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; g(t, x, u) \in V, \;\; u \in U,$$
где x – фазовая переменная, u – управление;

- задача Коши для интегро-дифференциального уравнения
$$f\Big(t, \dot{x}(t), x(t), \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{K}(t, s, x(s))\, ds\Big) = 0, \;\; \dot{x}(t) \in \Omega, \;\; x(t_0) = x_0;$$

- интегральное уравнение вида
$$f\Big(t, x(t), \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{K}(t, s, x(s))\, ds\Big) = 0, \;\; x(t) \in \Omega;$$

- операторные уравнения Вольтерра в метрических функциональных пространствах.

В перечисленных задачах считаем заданными функции f, g, $\mathcal{K}$, множества U, V, Ω, вектор x_0 и число t_0.

Рассмотренные и многие другие прикладные задачи анализа и теории дифференциальных уравнений сводятся к решению уравнений вида

$$F(x) = y \tag{1}$$

с неизвестным x или уравнений более общего вида

$$F(x) = \Phi(x). \tag{2}$$

Здесь F, $\Phi : X \to Y$ – заданные отображения, и для многих задач пространства X, Y являются лишь метрическими.

Если X и Y – линейные нормированные пространства, то при исследовании вопроса разрешимости этих уравнений часто применяется теорема об обратной функции. Также нередко используется классический принцип сжимающих отображений. Особенно его применение обосновано в случае, когда соответствующие отображения не являются гладкими, или, более того, пространство $X = Y$ метрическое. Если X и Y разные метрические пространства, используются более общие принципы существования точек совпадения двух отображений, как правило, основанные на понятии накрывания отображений.

Начавшееся в 80-х годах XX века активное изучение накрывающих отображений пополнило арсенал исследования разрешимости уравнений в метрических пространствах новыми методами. Эти методы основаны на теоремах о точках совпадения отображений, теоремах о липшицевых возмущениях α-накрывающих отображений, и т.д. В становление и развитие теории α-накрывающих отображений существенный вклад внесли работы Авакова Е.Р., Арутюнова А.В. [1], Дмитрука А.В., Иоффе А.Д., Милютина А.А. [2], Мордуховича Б.Ш.[3], Обуховского В.В., Осмоловского Н.П., Фоменко Т.Н. и других.

Важно отметить, что частным случаем задачи о точках совпадения отображений является задача о существовании неподвижной точки, а принцип сжимающих отображений представляет собой следствие общих теорем о точках совпадения в терминах α-накрывания. Этот факт позволяет существенно расширить класс задач, разрешимость которых традиционно доказывается с помощью принципа сжимающих отображений. Такой подход применим, например, к исследованию локальной разрешимости уравнений с вольтерровыми по Тихонову А.Н.[4] отображениями и, в частности, к исследованию интегральных уравнений Вольтерра, обыкновенных дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений и т.д. Отметим, что задачи о разрешимости уравнений Вольтерра, как правило, рассматриваются для уравнений в банаховых функциональных пространствах[5]. Однако использование теории α-накрывающих отображений позволяет получить достаточные условия разрешимости такого рода задач и в нелинейных

[1] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН, т. 416, № 2, 2007, с. 151–155.

[2] *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН, т. 35, вып. 6, 1980, с. 11—46.

[3] *Mordukhovich, B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. 1. Springer. 2005.

[4] *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А, т. 1, вып. 8, 1938, с. 1–25.

[5] *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч.1. Нижний Новгород, 1992. 110 с.

метрических функциональных пространствах.

Удобным инструментом для изучения вопроса разрешимости уравнений является теорема об обратной функции. Отметим, что это утверждение применимо только в банаховых пространствах для достаточно гладких отображений в окрестности нормальной точки. В случае, когда уравнение рассматривается в нелинейном метрическом пространстве, или же входящее в уравнение отображение не является достаточно гладким, классические теоремы об обратной функции неприменимы. Однако получить конструктивные достаточные условия разрешимости уравнений в этом случае возможно с помощью теорем о липшицевых возмущениях α-накрывающих отображений. Этот факт позволяет получить достаточные условия существования решения для многих негладких задач. Так, например, в терминах α-накрывания можно получить достаточные условия локальной разрешимости обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, без априорного предположения гладкости входящих в задачу функций. Отметим также, что некоторые аналоги теоремы о неявной функции для α-накрывающих отображений применимы к исследованию управляемых систем. Такие утверждения позволяют получить достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы без предположения гладкости входящих в задачу функций.

Описанный выше подход к исследованию уравнений с помощью теории α-накрывающих отображений, несмотря на перечисленные преимущества, до настоящего времени почти не использовался.

Цель работы. Основными целями диссертационной работы являются:
1) разработка методов исследования дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений, управляемых систем, основанных на теории накрывающих отображений;
2) получение новых признаков локальной разрешимости управляемых систем, дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной;
3) исследование свойств α-накрывающих вольтерровых отображений в метрических функциональных пространствах и получение достаточных условий локальной разрешимости абстрактных и интегральных уравнений Вольтерра, не разрешенных относительно неизвестной функции.

Методика исследования. Для решения поставленных задач использовались методы дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций вещественной переменной, теории многозначных отображений, теории α-накрывающих отображений.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. Среди них можно выделить следующие наиболее важные:

1) Получены утверждения о свойствах α-накрывающих отображений, применимые к изучению дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений, управляемых систем, абстрактных и интегральных уравнений Вольтерра. Решена задача о липшицевом возмущении условно α-накрывающих отображений.

2) Доказана теорема о локальной разрешимости управляемых систем без априорного предположения гладкости смешанных ограничений по переменной управления. Достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы получены в терминах α-накрываемости.

3) Доказана теорема о локальной разрешимости управляемых систем в предположении определенной гладкости смешанных ограничений по переменной управления. Достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы получены в терминах 2-регулярности.

4) Получены достаточные условия локальной разрешимости абстрактных уравнений Вольтерра в метрических функциональных пространствах.

5) Получены достаточные условия локальной разрешимости дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Получены достаточные условия локальной разрешимости интегральных уравнений, не разрешенных относительно неизвестной функции.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании глобальной разрешимости управляемых систем со смешанными ограничениями, при исследовании продолжаемости решений и корректной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, абстрактных уравнений Вольтерра. Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании разрешимости и корректности математических моделей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:
1) международная конференция "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов, 2009);
2) семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов (рук. д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов, 2009, 2010);
3) семинар кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ (рук. академик РАН, проф. А.Б. Куржанский, 2011)

4) семинар кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. Ф.П. Васильев, 2011);
5) семинар кафедры нелинейных динамических систем факультета ВМК МГУ (рук. академик РАН, проф. С.К. Коровин, 2011).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, содержащего 42 наименования. Общий объем диссертации – 92 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении дается литературный обзор, обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, описывается структура и дается краткое содержание работы, излагаются основные научные результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена разработке математического аппарата исследования локальной разрешимости управляемых систем, дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Вольтерра. Вначале даются определения α-накрывающих отображений, затем изучаются их свойства и выводятся достаточные условия разрешимости уравнений в метрических пространствах в терминах α-накрывания.

Приведем одно из общепринятых определений α-накрывающего отображения (см. параграф 1.1).

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Обозначим замкнутый шар в пространстве X с центром в точке $x \in X$ и радиуса $r \geq 0$ через $B_X(x, r)$. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $F : X \to Y$ называется α-накрывающим, если для любых $x \in X$, $r \geq 0$ выполнено включение

$$B_Y(F(x), \alpha r) \subseteq F(B_X(x, r)).$$

В диссертации также используются и следующие более общие определения α-накрываемости. Пусть заданы множества $U \subseteq X$, $W \subseteq Y$ и $\mathfrak{B} \subseteq X \times [0, +\infty)$.

Определение 1. *Отображение $F : X \to Y$ называется α-накрывающим множество W на системе $\mathfrak{B}$, если*

$$(x, r) \in \mathfrak{B} \Rightarrow B_Y(F(x), \alpha r) \cap W \subseteq F\big(B_X(x, r)\big).$$

Отображение $F : X \to Y$ называется условно α-накрывающим множество W относительно U на системе $\mathfrak{B}$, если оно является α-накрывающим множество $W \cap F(U)$ на системе $\mathfrak{B}$.

В параграфе 1.2 исследуется вопрос о существовании непрерывного правого обратного отображения к α-накрывающему отображению.

Параграф 1.3 посвящен изучению следующего типа накрывания. Пусть U, Σ, Y – метрические пространства с метриками ρ_U, ρ_Σ, ρ_Y соответственно. Расстояние от точки $y \in Y$ до множества $Y_0 \subset Y$ будем обозначать через $\operatorname{dist}(y, Y_0)$. Пусть заданы отображение $G : \Sigma \times U \to Y$, множество $U_0 \subset U$ и замкнутое множество $V \subset Y$.

Определение 2. *Пусть существуют такие* $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, *что*

$$G\Big(\sigma, B_U\big(u_0, r(\sigma, u_0)\big)\Big) \cap V \neq \emptyset \ \ \forall\, \sigma \in \Sigma, \ \ \forall\, u_0 \in U_0,$$

$$\text{где } r(\sigma, u_0) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{dist}\big(G(\sigma, u_0), V\big)^{1/\beta}.$$

Тогда будем говорить, что на множестве U_0 *отображение* $G(\cdot, \cdot)$ *является* $(\alpha, \beta)-$*накрывающим множество* V *по переменной* u.

Далее в этом параграфе доказывается вспомогательное утверждение о свойствах множества решений некоторых включений, использующееся во второй главе диссертации для исследования локальной разрешимости управляемых систем.

В параграфе 1.4 получено следующее утверждение о липшицевом возмущении накрывающего отображения.

Для заданных отображения $\Upsilon : X \times X \to Y$ и точки $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$\Upsilon(x, x) = y \tag{3}$$

относительно неизвестного $x \in X$. Пусть даны точка $u_0 \in X$ и числа $\alpha > \beta \geq 0$, $R > 0$. Положим

$$w_0 = \Upsilon(u_0, u_0), \quad U = B_X(u_0, R), \tag{4}$$

$$\mathfrak{r}(y) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \rho_Y\big(y, w_0\big), \quad \mathfrak{U}(y) = B_X(u_0, \mathfrak{r}(y)).$$

Для каждого $x_2 \in U$ определим

$$W(x_2) = B_Y(\Upsilon(u_0, x_2), \alpha R), \quad \mathfrak{B}(x_2) = \{\, (x_2, r) \ : \ 0 \leq r \leq R - \rho_X(x_2, u_0)\, \}.$$

Теорема 1. *Пусть пространство* X *полно и выполнены следующие предположения:*

а) *для любого* $x_2 \in U$ *отображение* $\Upsilon(\cdot, x_2) : X \to Y$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(x_2)$ *относительно множества* U *на*

системе $\mathfrak{B}(x_2)$;
b) *для любых* $x_1, x_2 \in U$ *выполнено*

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1, x_1), \Upsilon(x_1, x_2)) \leq \beta\rho_X(x_1, x_2);$$

c) *для любой последовательности* $\{u_k\} \subset U$ *из того, что* $u_k \to u$, $\Upsilon(u_k, u) \to y$, *следует* $\Upsilon(u, u) = y$.

Тогда, если

$$\mathfrak{r}(y) \leq R, \tag{5}$$

$$y \in \bigcap_{x_2 \in \mathfrak{U}(y)} \Upsilon(U, x_2), \tag{6}$$

то существует такая точка $\xi \in U$, *что* $\Upsilon(\xi, \xi) = y$ *и* $\rho_X(\xi, u_0) \leq \mathfrak{r}(y)$.

Отметим, что если отображение $\Upsilon(\cdot, x_2) : X \to Y$ является "безусловно" α-накрывающим множество $W(x_2)$ на системе $\mathfrak{B}(x_2)$, то включение (6) становится следствием неравенства (5) и α-накрываемости и в формулировке теоремы 1 его можно опустить. Отметим, также, что предположение **b)** выполнено, например, если отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ при всех x_1 является β-липшицевым. Для выполнения **c)** достаточно замкнутости или непрерывности отображения $\Upsilon(\cdot, x_2)$ при всех x_2.

Вторая глава посвящена следующей задаче. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) \tag{7}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \tag{8}$$

смешанным ограничением

$$g(t, x, u) \in V \ \ \dot{\forall} t \tag{9}$$

и ограничением на управление

$$u(t) \in U \ \ \dot{\forall} t. \tag{10}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ – время, t_0 – заданный начальный момент времени, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, x_0 – заданная начальная точка, $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – заданные функции, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ – заданные замкнутые множества. В качестве допустимых управлений рассматриваются всевозможные измеримые существенно ограниченные функции $u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, или всевозможные непрерывные функции $u(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, для которых выполняется (10).

Определение 3. *Будем говорить, что система (7) – (10) локально разрешима в точке* (t_0, x_0)*, если существуют число* $\tau > 0$ *и допустимое управление* $u(\cdot)$ *такие, что задача Коши*

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \ \ x(t_0) = x_0$$

на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ *имеет решение* $x(\cdot)$*, для которого выполняется (9), т.е.* $g(t, x(t), u(t)) \in V$ *при п.в.* $t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Цель исследований второй главы заключается в нахождении достаточных условий локальной разрешимости системы (7) – (10). В терминах накрывания эти условия формулируются в параграфе 2.2.

Пусть задано $u_0 \in U$ и некоторое положительное число γ. Предположим, что функция $f : [t_0, t_0 + \gamma] \times B(x_0, \gamma) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

- при п.в. t функция $f(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна;
- при любых (x, u) функция $f(\cdot, x, u)$ измерима;
- существует такая суммируемая функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $|f(t, x, u)| \leq \psi(t)$ при п.в. $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, для любого $u \in B(u_0, \gamma)$, $x \in B(x_0, \gamma)$.

Для задачи (7)–(10) с управлением $u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ справедливо следующее условие локальной разрешимости.

Теорема 2. *Предположим, что*
a) *функция* g *непрерывна на* $[t_0, t_0 + \gamma] \times B(x_0, \gamma) \times U$*;*
b) $g(t_0, x_0, u_0) \in V$;
c) *существуют такие* $\alpha > 0$ *и* $\beta \geq 1$*, что для любого* $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$ *на множестве* $U_0(t) = U \cap B(u_0, r(t))$*, где* $r(t) = \alpha^{-1}(\mathrm{dist}(g(t, x_0, u_0), V))^{1/\beta}$*, функция* $g(t, \cdot, \cdot) : B(x_0, \gamma) \times U \to \mathbb{R}^k$ *является* $(\alpha, \beta)-$*накрывающей множество* V *по переменной* u.

Тогда система (7)–(10) локально разрешима в точке (t_0, x_0).

Теорема 2 справедлива без априорных предположений дифференцируемости функции g по переменной u. Для случая, когда функция g дважды непрерывно дифференцируема по переменной u, результаты теоремы 2 существенно усилены в параграфе 2.4.

Для формулировки введем необходимые понятия. Пусть заданы замкнутые выпуклые конусы $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ и точка $u_0 \in U$. Пусть, кроме того, задано отображение $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, являющееся дважды непрерывно дифференцируемым в окрестности точки u_0, причем

$$F(u_0) \in V.$$

Определим выпуклые конусы C и E по формулам

$$C = \frac{\partial F}{\partial x}(u_0)U - V + \operatorname{span}\{v_0\},$$

$$E = \left\{ x = u + \nu u_0 \ : \ u \in U,\ \nu \in \mathbb{R},\ \nu v_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(u_0)u \in V \right\},$$

где $v_0 = -F(u_0) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(u_0)u_0$, а $\operatorname{span} A$ – линейная оболочка множества A.

Определение 4. *Пусть существует такой вектор h, что*

$$h \in E,\ \ -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u_0)[h,h] \in C.$$

Отображение F называется 2-регулярным в точке u_0 относительно конусов U, V по направлению h, если имеет место

$$C + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u_0)[h,E] = \mathbb{R}^k.$$

Возвращаясь к задаче (7)–(10), потребуем непрерывности допустимого управления, $u(\cdot) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$. Предположим, что для любых $(t,x) \in [t_0, t_0+\gamma] \times B(x_0,\gamma)$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по u на $B(u_0,\gamma)$, причем эти производные непрерывны по совокупности переменных в окрестности точки (t_0,x_0,u_0), а отображение $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,x,\cdot)$ при любых $(t,x) \in [t_0,t_0+\gamma] \times B(x_0,\gamma)$ удовлетворяет условию Липшица на $B(u_0,\gamma)$ с константой Липшица, не зависящей от (t,x) (здесь $\gamma > 0$ определено перед теоремой 2).

Теорема 3. *Пусть существует такой вектор h, что функция $g(t_0,x_0,\cdot)$ 2-регулярна в точке u_0 относительно конусов U, V по направлению h. Тогда система (7)–(10) локально разрешима в точке (t_0,x_0).*

В третьей главе диссертации исследуется задача локальной разрешимости дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, а также интегральных и абстрактных уравнений Вольтерра в функциональных метрических пространствах.

В параграфе 3.1 дается определение вольтеррового оператора, формулируется задача о локальной разрешимости абстрактного уравнений Вольтерра и исследуются метрические свойства пространств сужений.

Пусть даны множества E_1, E_2 и определены некоторые множества X и Y функций $x : [a,b] \to E_1$ и $y : [a,b] \to E_2$, соответственно. Пусть $\gamma \in (a,b)$. Для функции $x \in X$ обозначим через x^γ ее сужение на $[a,\gamma]$. Определим отображение $\Pi_X^\gamma : x \mapsto x^\gamma$. Для произвольного множества $U \subseteq X$ положим $U^\gamma = \Pi_X^\gamma U$. Аналогично, зададим отображение Π_Y^γ, ставящее в соответствие каждой функции $y \in Y$ ее сужение y^γ на $[a,\gamma]$, и для $W \subseteq Y$ обозначим $W^\gamma = \Pi_Y^\gamma W$.

Определение 5. *Отображение $F : X \to Y$ называют вольтерровым (по А.Н. Тихонову), если для любого $\gamma \in (a,b)$ и произвольных $x, u \in X$, удовлетворяющих равенству $\Pi_X^\gamma x = \Pi_X^\gamma u$, имеет место $\Pi_Y^\gamma F(x) = \Pi_Y^\gamma F(u)$ (для измеримых функций равенства должны выполняться при почти всех $t \in [a,\gamma]$).*

Пусть заданы вольтерров оператор $F : X \to Y$ и элемент $y \in Y$. Рассмотрим уравнение
$$Fx = y \tag{11}$$
относительно неизвестного $x \in X$. Для каждого $\gamma \in (a,b)$ определим оператор $F^\gamma : X^\gamma \to Y^\gamma$ равенством $F^\gamma(x^\gamma) = \Pi_Y^\gamma F(x)$ и положим $y^\gamma = \Pi_Y^\gamma y$.

Определение 6. *Если существуют такие $\gamma \in (a,b]$ и $\xi^\gamma \in X^\gamma$, что $F^\gamma \xi^\gamma = y^\gamma$, то уравнение (11) будем называть локально разрешимым, а функцию ξ^γ – его решением, определенным на $[a,\gamma]$.*

Пусть теперь (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) – метрические пространства функций $x : [a,b] \to E_1$ и $y : [a,b] \to E_2$ соответственно. Для исследования свойств вольтеррова отображения $F : X \to Y$ потребуется, чтобы при любом $\gamma \in (a,b)$ формула
$$\rho_{X^\gamma}(x^\gamma, u^\gamma) = \inf\{\rho_X(x,u) \,:\, \Pi_X^\gamma x = x^\gamma,\, \Pi_X^\gamma u = u^\gamma\} \tag{12}$$
определяла расстояние в X^γ. Аналогичным равенством должно определяться расстояние и в множестве Y^γ.

Далее в параграфе 3.1 доказывается, что формула (12) определяет метрику на множестве X^γ при некотором $\gamma \in (a,b)$, если
$$\forall\, u \in X,\ \ \forall\, x^\gamma \in X^\gamma\ \exists\, x \in X :\ \ \Pi_X^\gamma x = x^\gamma,\ \ \rho_X(x,u) = \rho_{X^\gamma}(x^\gamma, u^\gamma). \tag{13}$$

В параграфе 3.2 получен критерий локальной разрешимости уравнения (3), в случае, когда отображение $\Upsilon : X \times X \to Y$ является вольтерровым по каждому аргументу.

Пусть даны точка $u_0 \in X$ и числа $\alpha > \beta \geq 0$, $R > 0$, $\gamma \in (a, b]$. Определим отображение $\Upsilon^\gamma : X^\gamma \times X^\gamma \to Y^\gamma$ равенством $\Upsilon^\gamma({x_1}^\gamma, {x_2}^\gamma) = \Pi_Y^\gamma \Upsilon(x_1, x_2)$, где $x_1, x_2 \in X$ – произвольные продолжения функций ${x_1}^\gamma, {x_2}^\gamma \in X^\gamma$. Положим $y^\gamma = \Pi_Y^\gamma y$, $w_0^\gamma = \Pi_Y^\gamma w_0$, $U^\gamma = \Pi_Y^\gamma U$, где w_0, U заданы равенствами (4). Кроме того, обозначим

$$\mathfrak{r}(y^\gamma) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \rho_{Y^\gamma}\big(y^\gamma, w_0^\gamma\big), \quad \mathfrak{U}(y^\gamma) = B_X(u_0, \mathfrak{r}(y^\gamma)).$$

Для каждого $x_2 \in U$ определим

$$W^\gamma(x_2^\gamma) = B_{Y^\gamma}(\Upsilon^\gamma(u_0^\gamma, x_2^\gamma), \alpha R),$$
$$\mathfrak{B}^\gamma(x_2^\gamma) = \{\, (x_2^\gamma, r) \ : \ 0 \leq r \leq R - \rho_{X^\gamma}(x_2^\gamma, u_0^\gamma)\,\}.$$

Отметим, что если пространство X удовлетворяет условию (13), то $W^\gamma(x_2^\gamma) = \Pi_Y^\gamma W(x_2)$, где $W(x_2) = B_Y(\Upsilon(u_0, x_2), \alpha R)$.

Теорема 4. *Пусть пространства X, Y удовлетворяют условию (13), пространство X полное и выполнены следующие предположения:*
a) *для любого $x_2 \in U$ отображение $\Upsilon^\gamma(\cdot, x_2^\gamma) : X^\gamma \to Y^\gamma$ является условно α-накрывающим множество $W^\gamma(x_2^\gamma)$ относительно U^γ на системе $\mathfrak{B}^\gamma(x_2^\gamma)$;*
b) *для любых $x_1, x_2 \in U$ выполнено*

$$\rho_Y(\Upsilon^\gamma(x_1^\gamma, x_1^\gamma), \Upsilon^\gamma(x_1^\gamma, x_2^\gamma)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2);$$

c) *для любой последовательности $\{u_k\} \subset U$ из того, что $u_k^\gamma \to u^\gamma$, $\Upsilon^\gamma(u_k^\gamma, u^\gamma) \to y^\gamma$, следует $\Upsilon^\gamma(u^\gamma, u^\gamma) = y^\gamma$.*

Тогда, если

$$\mathfrak{r}(y^\gamma) \leq R, \ \ y^\gamma \in \bigcap_{x_2 \in \mathfrak{U}(y^\gamma)} \Pi_Y^\gamma \Upsilon(U, x_2),$$

то существует определенное на $[a, \gamma]$ решение $\xi^\gamma \in U^\gamma$ уравнения (3), удовлетворяющее оценке $\rho_{X^\gamma}(\xi^\gamma, u_0^\gamma) \leq \mathfrak{r}(y^\gamma)$.

В параграфе 3.3 рассматриваются достаточные условия разрешимости интегрального уравнения.

Пусть заданы замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, измеримая по первому аргументу, непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов функция $f : [a, b] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ и измеримая по совокупности первого и второго аргументов, непрерывная по третьему аргументу функция $\mathcal{K} : [a, b] \times [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение

$$f\Big(t, x(t), \int_a^t \mathcal{K}(t, s, x(s))\, ds\Big) = 0, \ \ x(t) \in \Omega, \ \ t \in [a, b]. \qquad (14)$$

Решение будем искать в классе $L_\infty([a,b],\Omega)$ измеримых существенно ограниченных функций $x:[a,b]\to\Omega$.

Пусть заданы функция $u_0\in L_\infty([a,b],\Omega)$ и положительные числа R, d, α. Положим $V=B_{\mathbb{R}^m}\big(0,d\big)$. Для п.в. $t\in[a,b]$, любых $z\in V$ обозначим

$$U(t)=B_\Omega(u_0(t),R),\;\; W(t,z)=B_{\mathbb{R}^l}\big(f(t,u_0(t),z),\alpha R\big).$$

Теорема 5. *Пусть*
a) *существует такая суммируемая функция* $\mathcal{N}:[a,b]\to[0,+\infty)$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, $s\in[a,t]$ *выполнено неравенство* $|\mathcal{K}(t,s,u_0(s))|\le\mathcal{N}(s)$;
b) *существует такая суммируемая функция* $\mathcal{M}:[a,b]\to[0,+\infty)$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, $s\in[a,t]$, *любых* $x,\bar x\in U(t)$ *имеет место неравенство*

$$|\mathcal{K}(t,s,x)-\mathcal{K}(t,s,\bar x)|\le\mathcal{M}(s)|x-\bar x|;$$

c) *существует такое* $\Lambda>0$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $x\in U(t)$, *выполнено неравенство* $|f(t,x,0)|\le\Lambda$;
d) *существует такое неотрицательное число* P, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $x\in U(t)$, $z,\bar z\in V$ *имеет место неравенство*

$$|f(t,x,z)-f(t,x,\bar z)|\le P|z-\bar z|;$$

e) *при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $z\in V$ *отображение* $f\big(t,\cdot,z\big):\Omega\to\mathbb{R}^l$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(t,z)$ *относительно* $U(t)$ *на системе* $\mathfrak{A}(t)=\big\{(v,r):\; v\in U(t),\; r\in[0,\,R-|v-u_0(t)|\,]\big\}$.

Тогда, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|f(t,u_0(t),0)|<\alpha R,$$

$$0\in\bigcap_{z\in V}f(t,U(t),z),\quad \dot\forall\, t\in[a,b],$$

то уравнение (14) локально разрешимо.

В параграфе 3.4 рассматриваются достаточные условия разрешимости интегро-дифференциального уравнения.

Пусть заданы вектор $A\in\mathbb{R}^n$, измеримая по первому аргументу, непрерывная по совокупности второго, третьего и четвертого аргументов функция $f:[a,b]\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ и измеримая по совокупности первого и второго аргументов, непрерывная по третьему аргументу функция $\mathcal{K}:[a,b]\times[a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение

$$f\Big(t,\dot x(t),x(t),\int_a^t\mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds\Big)=0,\;\; x(a)=A,\;\; \dot x(t)\in\Omega. \qquad (15)$$

Решение будем искать в классе $AC_\infty(A,[a,b],\Omega)$ абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ таких, что $x(a)=A$ и $\dot x\in L_\infty([a,b],\Omega)$.

Пусть заданы функция $u_0\in AC_\infty(A,[a,b],\Omega)$ и положительные числа R, d, α. Положим $V=B_{\mathbb{R}^m}\big(0,d\big)$, $\mathrm{B}=B_{\mathbb{R}^n}\big(A,d\big)$. Для п.в. $t\in[a,b]$, любых $\chi\in\mathrm{B}$, $z\in V$ обозначим

$$U(t)=B_\Omega(\dot u_0(t),R),\;\; W(t,\chi,z)=B_{\mathbb{R}^l}\big(f(t,\dot u_0(t),\chi,z),\alpha R\big).$$

Теорема 6. *Пусть функция $\mathcal{K}$ удовлетворяет предположениям* **a)**, **b)** *теоремы 5, и*
c) *существует такое $\Lambda>0$, что при п.в. $t\in[a,b]$, любых $y\in U(t)$, выполнено неравенство $|f(t,y,A,0)|\le\Lambda$;*
d) *существует такое неотрицательное число P, что при п.в. $t\in[a,b]$, любых $y\in U(t)$, $z,\bar z\in V$, $\chi,\bar\chi\in\mathrm{B}$ имеет место неравенство*

$$|f(t,y,\chi,z)-f(t,y,\bar\chi,\bar z)|\le P\max\{|\chi-\bar\chi|,\,|z-\bar z|\};$$

e) *при п.в. $t\in[a,b]$, всех $\chi\in\mathrm{B}$, $z\in V$ отображение $f\big(t,\cdot,\chi,z\big):\Omega\to\mathbb{R}^l$ является условно α-накрывающим множество $W(t,\chi,z)$ относительно $U(t)$ на системе $\mathfrak{A}(t)=\big\{(v,r):\,v\in U(t),\;r\in[0,\,R-|v-u_0(t)|\,]\big\}$.*

Тогда, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|f(t,\dot u_0(t),A,0)|<\alpha R,$$

$$0\in\bigcap_{\chi\in\mathrm{B},\;z\in V}f(t,U(t),\chi,z),\quad \dot\forall\, t\in[a,b],$$

то уравнение (15) локально разрешимо.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Араму Владимировичу Арутюнову за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Жуковский С.Е.* Некоторые свойства решений включений с накрывающей левой частью // Вестник Тамбовского университета. Серия: Ест. и техн. науки, т. 14, вып. 4, 2009, с. 712.

[2] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения, т. 46, № 11, 2010, с. 1561–1570.

[3] *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства // Труды МИАН, т. 271, 2010, с. 9–19.

[4] *Arutyunov, A.V., Zhukovskiy, S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis, 29 July 2010, DOI: 10.1080/00036811003735873.

[5] *Жуковский С.Е.* Об одном классе операторов в пространстве непрерывных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Ест. и техн. науки, т. 15, вып. 6, 2010, с. 696–698.