Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

НЕФЕДОВА Юлия Сергеевна

УТОЧНЕНИЕ СТРУКТУРЫ МОМЕНТНЫХ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. Ю. Королев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. В. Сенатов
	доктор физико-математических наук, профессор С. Я. Шоргин
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится 23 сентября 2011 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан ___ августа 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность:

Суммы независимых случайных величин традиционно являются одним из основных объектов исследования в теории вероятностей. Такое внимание к ним обусловлено тем, что сумма случайных величин – довольно удобная и зачастую разумная математическая модель для описания количественных характеристик стохастических ситуаций. Однако, даже если функции распределения случайных слагаемых известны, вычислить в явном виде функцию распределения их суммы при большом числе слагаемых как правило практически невозможно. Стандартным решением данной проблемы является использование в качестве неизвестного распределения суммы его асимптотической аппроксимации, вид которой определяется соответствующей предельной теоремой, описывающей трансформацию распределения суммы при неограниченном увеличении числа слагаемых. Как сказано в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова[1], «*познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами*». Наиболее популярной асимптотической аппроксимацией для распределения суммы случайных величин является нормальное распределение вероятностей. Возможность нормальной аппроксимации обосновывается центральной предельной теоремой теории вероятностей. При решении вопроса об адекватности математических моделей, основанных на нормальной аппроксимации, ключевую роль играет точность аппроксимации распределения суммы случайных величин нормальным распределением. В связи с этим большую важность приобретает задача построения удобных и легко вычисляемых аналитических оценок точности нормальной аппроксимации, зависящих от основных параметров задачи – числа слагаемых в сумме и их первых моментов. Об оценках, в которых вся необходимая информация о распределении слагаемых сосредоточена лишь в простых характеристиках – первых моментах слагаемых, будем

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Москва–Ленинград, ГИТТЛ, 1949.

говорить как о *моментных* оценках. Именно моментным оценкам и посвящена данная работа. Всюду далее будет предполагаться, что распределения независимых случайных слагаемых в сумме одинаковы.

В работе рассматриваются две схемы суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин и связанные с ними предельные теоремы. В первой схеме число слагаемых считается неслучайным. Во второй схеме индекс суммирования сам является случайной величиной, независимой от слагаемых. При этом рассматриваются две возможности: в первой индекс является случайной величиной с распределением Пуассона, во второй число слагаемых в суммах формируется в соответствии с дважды стохастическим пуассоновским процессом (процессом Кокса).

Среди предельных теорем для сумм неслучайного числа случайных величин наряду с законом больших чисел главное место занимает центральная предельная теорема, первый вариант которой был доказан еще А. де Муавром в 1730 г. Эта теорема утверждает, что распределение стандартизованной суммы большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией близко к нормальному закону.

Задача изучения точности нормальной аппроксимации привлекала внимания многих исследователей. В частности, над ней работали А. М. Ляпунов, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, П. Леви, Г. Крамер, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоров, К.–Г. Эссеен, И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, В. М. Золотарев, В. В. Сазонов, В. В. Петров, Л. В. Осипов, П. Холл, К. Хейди и другие выдающиеся математики.

Вопросы, связанные с оценками точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин, широко освещены в научной литературе – в частности, им уделено большое внимание в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова[1], в монографиях И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника[2], Р. Н. Бхаттачария и Р. Ранга Рао[3], В. В. Петрова[4,5], В. М. Золотарева[6] и В. В. Сенатова[7,8].

Несколько слов о том, почему данная работа посвящена именно моментным оценкам. Этот вопрос тесно связан с вопросом о том, что считать оценкой. Самой точной и правильной оценкой невязки $\Delta_n(x)$ между допредельной функцией распределения нормированной суммы и предельной нормальной функцией распределения является, очевидно, сама невязка: $\Delta_n(x) \leqslant \Delta_n(x)$, но по своему смыслу *оценка* должна иметь более простой вид по сравнению с оцениваемой величиной и эффективно вычисляться, требуя лишь *некоторую наиболее доступную* информацию об исходных распределениях. Конечно же, оценки в терминах псевдомоментов (см, например, [9]) или дзета-метрик (см., например, [10]) могут быть существенно точнее оценок, рассматриваемых в данной диссертации. Однако чтобы вычислить характеристики, участвующие в указанных оценках (псевдомоменты или дзета-метрики), необходима полная информация о распределениях слагаемых. Но при этом, естественно, имея такую информацию и современные компьютеры, на практике вполне можно оценить погрешность нормальной аппроксимации численно, не прибегая к аналитическим оценкам. В оценках же моментного типа вся необходимая информация сосредоточена лишь в простых характеристиках интегрального типа (первых трех

---

[2] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. *Независимые и стационарно связанные величины.* – М., "Наука", 1965.

[3] Р. Н. Бхаттачария, Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. – М.: Наука, 1982, 286 с.

[4] В. В. Петров. *Суммы независимых случайных величин.* М., "Наука", 1972.

[5] В. В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М., "Наука", 1987.

[6] В. М. Золотарев. *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, М., "Наука", 1986.

[7] V. V. Senatov. *Normal Approximation: New Results, Methods and Problems.* – VSP, Utrecht, 1998.

[8] В. В. Сенатов. *Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения..* – М., Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

[9] В. И. Паулаускас. Об одном усилении теоремы Ляпунова. – *Литовский математический сборник*, 1969, т. 9, вып. 2, с. 173–179.

[10] И. С. Тюрин. Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова. – *Успехи матем. наук*, 2010, т. 65, вып. 3, с. 201–202.

моментах), которые, как правило, можно эффективно оценить по выборке, особенно в случае одинаково распределенных слагаемых.

На практике часто возникает ситуация, когда число n слагаемых в сумме заранее не известно. Так, например, в медицинской статистике или страховой практике как правило, заранее фиксируется не число наблюдений, а время для сбора информации. В таких ситуациях естественно предположить, что индекс суммирования является целочисленной случайной величиной. В данной работе мы сосредоточимся на рассмотрении ситуаций, в которых случайный индекс суммирования N_λ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$:

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots,$$

или же случайный индекс суммирования $N(t)$ является случайной величиной со смешанным пуассоновским распределением:

$$\mathsf{P}(N(t) = k) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda^k d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $t > 0$ – параметр смешивающего распределения. Здесь случайная величина $\Lambda(t)$ называется *структурной*. Последняя ситуация, например, имеет место, когда параметр t имеет смысл времени, а случайный индекс $N(t)$ формируется в соответствии с дважды стохастическим пуассоновским процессом с накопленной интенсивностью $\Lambda(t)$ (процессом Кокса, управляемым процессом $\Lambda(t)$).

Асимптотической теории случайного суммирования посвящены монографии А. Гута [11], В. М. Круглова и В. Ю. Королева [12], Б. В. Гнеденко и В. Ю. Королева [13], В. В. Калашникова [14],

---

[11] A. Gut. *Stopped Random Walks.* – Springer, New York, 1988.

[12] В. М. Круглов, В. Ю. Королев. *Предельные теоремы для случайных сумм.* – М., Изд-во Московского университета, 1990.

[13] B. V. Gnedenko, V. Yu. Korolev. *Random Summation: Limit Theorems and Applications.* – CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[14] V. V. Kalashnikov. *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications.* – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

В. Е. Бенинга и В. Ю. Королева [15] и другие.

Цель работы:

Целью данной диссертации является уточнение структуры оценок точности асимптотических аппроксимаций для распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Методика исследования:

В работе используются методы математического и функционального анализа, а также методы теории вероятностей. Для уточнения неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме в первой главе применяется модифицированный метод Падитца (см. [16]), заключающийся в разбиении вещественной прямой на зоны «малых», «умеренных» и «больших» значений аргумента. Также метод доказательства неравномерных оценок основан на специальном усечении случайной величины. Для нахождения минорант для нижних оценок используется метод Прохорова–Мацкявичюса (см. [17]), согласно которому с указанной целью предложено рассматривать масштабные смеси нормальных законов.

Научная новизна:

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Уточнены неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин с конечным абсолютным моментом порядка $2+\delta$, $\delta \in (0, 1]$.

---

[15] V. Bening, V. Korolev. *Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance.* – VSP, Utrecht, 2002.

[16] L. Paditz. On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. – *Statistics* (*Berlin: Akademie-Verlag*), 1989, v. 20, No. 3, p. 453–464.

[17] В. К. Мацкявичюс. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. – *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, вып. 3, с. 565-569.

2. Уточнена при $\delta = 1$ и впервые обобщена на случай $0 < \delta < 1$ неравномерная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме с уточненной структурой. На основе этой оценки уточнены абсолютные константы в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских и смешанных пуассоновских случайных сумм.

3. Впервые найдена нижняя оценка для абсолютной константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм. В частности, найдены нижние оценки для верхней и нижней асимптотически правильных постоянных.

4. Уточнена при $0 < \delta < 1$ верхняя оценка абсолютной константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм.

5. Впервые найдена нижняя оценка для абсолютной константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм. В частности, найдены нижние оценки для верхней и нижней асимптотически правильных постоянных в случае, когда предельное распределение является распределением Лапласа.

6. Впервые построены практически применимые оценки точности аппроксимации распределений отрицательных биномиальных случайных сумм с параметрами индекса $r > 0$ и $p = (1+t)^{-1}$ при $t \to \infty$ для случая, когда $r \leqslant \delta/2$. Показано, что в случае $r < \delta/2$ скорость сходимости имеет порядок $O(t^{-r})$, а в случае $r = \delta/2$ – порядок $O(t^{-\delta/2}\ln(t))$, $(t \to \infty)$. В обоих случаях найдены положительные миноранты для абсолютной константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена и тем самым доказана правильность установленных порядков скорости сходимости.

Практическая значимость:

Результаты диссертации имеют теоретический характер и одновременно допускают удобное применение к решению различных практических задач, связанных с использованием асимптотических аппроксимаций, в частности, нормальной.

Апробация работы:

Результаты диссертации докладывались на II международном научно-практическом конгрессе «Ультрасовременные телекоммуникации и системы управления» (2010 г., Москва), на международной конференции «Прага Стохастика–2010» (2010 г., Прага, Чехия), на 14-й международной конференции по прикладным стохастическим моделям и анализу данных (2011 г., Рим, Италия), на международной конференции «Стохастические модели и их приложения», посвященной 80-летию М. Арато (2011 г., Дебрецен, Венгрия), на международных конференциях студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов–2010» и «Ломоносов–2011» (2010, 2011 гг., МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва), на научной конференции «Тихоновские чтения» в МГУ (2010 г.), неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре «теория риска и смежные вопросы» на факультете ВМК МГУ и нашли свое отражение в трудах упомянутых семинаров и конференций.

Публикации:

Основные результаты диссертации представлены в 12 работах ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]), из них 3 статьи опубликованы в научных журналах, включенных в перечень ВАК ([1], [2], [3]).

Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 123 наименования. Объем работы 126 страниц.

Содержание работы

Глава 1 посвящена неравномерным оценкам скорости сходимости в классической центральной предельной теореме для сумм фиксированного числа независимых одинаково распределенных случайных величин.

Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с общей функцией распределения $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x)$, удовлетворяющих условиям

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{E}X_1^2 = 1, \quad \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} < \infty, \tag{1}$$

при некотором $\delta \in (0, 1]$. Обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$ множество всех функций распределения F случайной величины X_1, удовлетворяющих условиям (1). Пусть $F_n(x) = \mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_n < x) = F^{*n}(x)$ – n-кратная свертка функции распределения $F(x)$ с собой. Пусть $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ – соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального закона:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Положим

$$\Delta_n(x) = |F_n\big(x\sqrt{n}\big) - \Phi(x)|, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1.$$

При условиях (1) известна неравномерная оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме (см. работы [18] и [19]): существуют такие положительные конечные числа $C(\delta)$, что справедливо неравенство

$$\sup_x \big(1 + |x|^{2+\delta}\big)\Delta_n(x) \leqslant C(\delta) \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}}. \tag{2}$$

[18] С. В. Нагаев. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. – *Теория вероятностей и ее применения*, 1965, т. 10, вып. 2, с. 231–254.

[19] А. Бикялис. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. – *Литов. матем. сб.*, 1966, т. 6, вып. 3, с. 323–346.

Наилучшие на сегодняшний день оценки для $C(\delta)$ приведены в статье[20] для $0 < \delta \leqslant 1$. В частности, там показано, что $C(1.0) \leqslant 25.80$.

Основным результатом раздела 1.1 является теорема, уточняющая оценки, полученные в работе[20].

Теорема 1. *Для константы $C(\delta)$ в неравенстве* (2) *справедливы следующие верхние оценки:*

$\delta =$	$C(\delta) \leqslant$	$\delta =$	$C(\delta) \leqslant$
1.0	18.1139	0.5	13.0258
0.9	17.2651	0.4	11.9605
0.8	16.1524	0.3	10.9675
0.7	15.0866	0.2	10.0561
0.6	14.0576	0.1	9.2114

Нижеследующая теорема раздела 1.1. в случае $\delta = 1$ уточняет, а также обобщает на случай $0 < \delta < 1$ результат работы[21].

Теорема 2. *Для любых $n \geqslant 1$, $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ и $x \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{|t|\geqslant x} |t|^{2+\delta}\Delta_n(t) \leqslant C(x,\delta)\frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}},$$

где $C(x,\delta)$ – ограниченная невозрастающая функция от $x \geqslant 0$, такая, что $C(x,\delta) \to 1$ при $x \to \infty$.

Описан алгоритм, позволяющий при каждом $0 < \delta \leqslant 1$ находить верхние оценки для $C(x,\delta)$, приведены результаты вычислений, проведенных в соответствии с этим алгоритмом.

В разделе 1.2 рассматриваются альтернативные неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме с

[20] Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. – *Информатика и ее применения*, 2011, т. 5, вып. 1, с. 39–45.

[21] V. Nikulin. An algorithm to estimate a nonuniform convergence bound in the central limit theorem, 2010, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1004/1004.0552v1.pdf.

уточненной структурой. В статье [22] для случая $\delta = 1$ была получена неравномерная оценка уточненной структуры вида

$$(1 + |x|^3)\Delta_n(x) \leqslant 22.7707\frac{\beta_3 + 1}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1,\ F \in \mathcal{F}_3. \qquad (3)$$

При этом, поскольку всегда $\beta_3 \geqslant 1$, при больших значениях β_3 оценка (3) точнее, чем (2) за счет меньшего значения абсолютной константы.

Нижеследующая теорема раздела 1.2 при $\delta = 1$ уточняет, а при $0 < \delta < 1$ обобщает неравенство (3) работы [22].

Теорема 3. *При каждом $0 < \delta \leqslant 1$ существуют конечные положительные постоянные $C_{st}(\delta)$ такие, что справедливо неравенство*

$$\sup_x (1 + |x|^{2+\delta})\Delta_n(x) \leqslant C_{st}(\delta)\frac{\beta_{2+\delta} + 1}{n^{\delta/2}}, \quad n \geqslant 1,\ F \in \mathcal{F}_{2+\delta}. \qquad (4)$$

Также в этом разделе описан алгоритм, позволяющий при каждом $0 < \delta \leqslant 1$ находить верхние оценки для $C_{st}(\delta)$. Результаты вычислений для $\delta = 0.1, 0.2, \ldots, 1$, проведенных в соответствии с этим алгоритмом, приведены в таблице 1.

$\delta =$	$C_{st}(\delta) \leqslant$	$\delta =$	$C_{st}(\delta) \leqslant$
1.0	15.7601	0.5	11.1145
0.9	14.6317	0.4	10.4485
0.8	13.6105	0.3	9.8553
0.7	12.6898	0.2	9.3343
0.6	11.8592	0.1	8.8837

Таблица 1: Оценки констант $C_{st}(\delta)$ в (4).

Построенные оценки использованы в разделе 2.3 главы 2 для уточнения абсолютной константы в неравномерной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм.

[22] С. В. Гавриленко. Уточнение неравномерных оценок скорости сходимости распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону. – *Информатика и ее применения,* 2011, т. 5, вып. 1, с. 12–24.

Глава 2 посвящена оценкам скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм.

В этой главе относительно $X_1, X_2, \ldots$ мы будем предполагать, что

$$\mathsf{E}X_1 \equiv \mu, \quad \mathsf{D}X_1 \equiv \sigma^2 > 0, \quad \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} < \infty, \tag{5}$$

при некотором $\delta \in (0,1]$. Обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$ множество всех функций распределения F случайной величины X_1, удовлетворяющих условиям (5). Рассматривается *пуассоновская случайная сумма*

$$S_\lambda = X_1 + \cdots + X_{N_\lambda},$$

где индекс суммирования N_λ имеет распределение Пуассона с некоторым параметром $\lambda > 0$. Предполагается, что при каждом $\lambda > 0$ случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы. Для определенности полагаем, что $S_\lambda = 0$ при $N_\lambda = 0$.

Функцию распределения стандартизованной пуассоновской случайной суммы $\widetilde{S}_\lambda \equiv (S_\lambda - \lambda\mu)/\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}$ обозначим $F_\lambda(x)$.

Известно, если слагаемые $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяют моментным условиям (5), то справедлив следующий аналог неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (см., например, книгу [23])

$$\Delta_\lambda \equiv \sup_x \bigl|F_\lambda(x) - \Phi(x)\bigr| \leqslant C(\delta) L_\lambda^{2+\delta}, \tag{6}$$

где $C(\delta) > 0$ зависит только от δ, а $L_\lambda^{2+\delta}$ – нецентральная ляпуновская дробь порядка $2+\delta$:

$$L_\lambda^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{(m^2+\sigma^2)^{(2+\delta)/2}\lambda^{\delta/2}}.$$

Наилучшая на сегодняшний день верхняя граница для $C(1)$ равна 0.3041 (см. [24, 25]). В работе [26] при $0 < \delta < 1$ приведены

---

[23] В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, С. Я. Шоргин. *Математические основы теории риска.* – М., "Физматлит", 2011.

[24] В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. –*Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2010, т. 17, вып. 1, с. 25–56.

[25] V. Korolev, I. Shevtsova. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. – *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010, Online first: http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370, 04 June 2010.

[26] И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации для распределений

верхние оценки для $C(\delta)$, справедливые в асимптотическом смысле, когда ляпуновская дробь $L_\lambda^{2+\delta}$ бесконечно мала. Однако нижние оценки для $C(\delta)$ до сих пор найдены не были. Важность задачи отыскания нижних оценок для $C(\delta)$ подчеркивается тем фактом, что полученная в [24,25] верхняя оценка $C(1) \leqslant 0.3041$ строго меньше наименьшего теоретически возможного значения абсолютной постоянной в классическом неравенстве Берри–Эссеена $C_0(1) \geqslant 0.4097\ldots$

В разделе 2.1 для случая $\delta = 1$ и в разделе 2.2 при $0 < \delta < 1$ найдены нижние оценки для абсолютной постоянной $C(\delta)$ в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (6). В терминах, введенных в работе [27], определена *верхняя асимптотически правильная постоянная*

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\lambda\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{F}_{2+\delta}} \Delta_\lambda / L_\lambda^{2+\delta}.$$

Построенная миноранта $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ и будет нижней оценкой для $C(\delta)$.

Теорема 4. *Для $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ справедлива нижняя оценка*

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{\gamma>0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} I_0(\gamma),$$

где $I_0(\gamma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{\gamma}{2})^{2k}(k!)^{-2}$ – модифицированная функция Бесселя.

Приведены конкретные значения минорант $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ для некоторых $\delta \in (0,\, 1]$. В частности, $C(1) \geqslant 0.2344$.

Также в указанных разделах найдена миноранта для $C(\delta)$, остающаяся справедливой при сколь угодно малых значениях ляпуновской дроби $L_\lambda^{2+\delta}$. Для этого в терминах, введенных в работе [27], определена *нижняя асимптотически правильная постоянная*

$$\underline{C_{\text{ап}}}(\delta) \equiv \limsup_{\ell\to 0} \limsup_{\lambda\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{F}_{2+\delta}:\ L_\lambda^{2+\delta}=\ell} \Delta_\lambda/\ell.$$

пуассоновских случайных сумм. – *Обозрение промышленной и прикладной математики*, 2007. Т. 14. Вып. 1. С. 3–28.

[27] И. Г. Шевцова. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца. – *Теория вероятностей и ее применения*, 2010. Вып. 2. С. 271–304.

Теорема 5. *Для $\underline{C_{\text{ап}}}(\delta)$ справедливы нижние оценки*

$$\underline{C_{\text{ап}}}(1) \geqslant \frac{1}{2}\lim_{\gamma\to\infty}\sqrt{\gamma}e^{-\gamma}I_0(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0.1994...,$$

$$\underline{C_{\text{ап}}}(\delta) \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1+\delta/2}\Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)}\ \sup_{s>0}\frac{\left(1+\frac{s^2}{2}\right)^{-1/2}+\frac{s^2}{4}-1}{2\sqrt{2}s^{2+\delta}},\quad 0<\delta<1,$$

где $\Gamma(\cdot)$– гамма-функция Эйлера: $\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$.

Приведены конкретные значения минорант $\underline{C_{\text{ап}}}(\delta)$ для некоторых $\delta \in (0,\,1)$. В частности, $C(0.9) \geqslant 0.0182$.

В разделе 2.2 уточнены верхние оценки для абсолютной постоянной $C(\delta)$ в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (6) в случае $0<\delta<1$.

Теорема 6. *При условии (5) для любого $\lambda>0$ при каждом $0<\delta<1$ справедливо неравенство*

$$\sup_x |F_\lambda(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C(\delta)\beta_{2+\delta}}{(\mu^2+\sigma^2)^{1+\delta/2}\lambda^{\delta/2}} \tag{7}$$

с той же константой $C(\delta)$, что и в неравенстве Берри–Эссеена с уточненной структурой для «классических» сумм (см. работу[28]*). В частности, $C(0.9) \leqslant 0.3089$.*

В разделе 2.3 рассмотрены неравномерные оценки (8) скорости сходимости в центральной предельной теореме для пуассоновских случайных сумм. Доказана теорема, уточняющаяя результаты работ [20] и [22].

Теорема 7. *Для любых $x\in\mathbb{R}$ и любого $\lambda>0$ при каждом $0<\delta\leqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\left(1+|x|^{2+\delta}\right)\left|F_\lambda(x)-\Phi(x)\right| \leqslant C_{st}(\delta)\frac{\beta_{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2}(\mu^2+\sigma^2)^{1+\delta/2}}, \tag{8}$$

где константа $C_{st}(\delta)$ – та же, что и в неравномерном неравенстве уточненной структуры (4) для сумм фиксированного числа слагаемых (см. таблицу 1).

[28] М. Е. Григорьева, И. Г. Шевцова. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. – *Информатика и ее применения*, 2010, т. 4, вып. 2, с. 78–85.

Глава 3 посвящена оценкам скорости сходимости распределений смешанных пуассоновских случайных сумм к масштабным смесям нормальных законов.

Рассматривается *смешанная пуассоновская случайная сумма*

$$S(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)},$$

где индекс суммирования $N(t)$ является случайной величиной со смешанным пуассоновским распределением:

$$\mathsf{P}(N(t) = k) = \frac{1}{k!} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^k d\mathsf{P}(\Lambda(t) < \lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $t > 0$ – параметр смешивающего распределения, $\Lambda(t)$ – структурная случайная величина. Предполагается, что при каждом $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ независимы. Для определенности полагаем, что $S(t) = 0$ при $N(t) = 0$.

В главе 3 относительно $X_1, X_2, \ldots$ мы будем предполагать, что

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 \equiv \sigma^2 > 0, \quad \mathsf{E}|X_1|^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} < \infty, \tag{9}$$

при некотором $\delta \in (0, 1]$. Пусть также $\Lambda(t)/d(t) \xrightarrow{d} \Lambda$, $(t \to \infty)$, где $d(t) > 0$ – вспомогательная нормирующая (масштабирующая) функция, неограниченно возрастающая при $t \to \infty$.

Обозначим

$$\Delta_t(x) = \left| \mathsf{P}\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x \right) - \int\limits_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right) d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda) \right|,$$

$$\delta_t(x) = \left| \mathsf{P}\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x \right) - \mathsf{P}(\Lambda < x) \right|.$$

В таком случае справедлив следующий аналог неравенства Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм:

$$\sup_x \Delta_t(x) \leqslant C(\delta) \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} \mathsf{E}[\Lambda(t)]^{-\delta/2} + \frac{1}{2} \sup_x \delta_t(x), \tag{10}$$

где $C(\delta)$ – та же абсолютная константа, что и в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (см. неравенство (6)). В частности, $C(1) \leqslant 0.3041$.

Впервые неравенство (10) было доказано в работе [29] с другими, лучшими на тот момент верхними оценками абсолютной константы $C(\delta)$. Однако вопрос о нижних оценках постоянной $C(\delta)$ оставался открытым.

Если $N(t)$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r > 0$ и $p = (1+t)^{-1} > 0$, $t > 0$, то при условии $r > \delta/2$ справедливо неравенство, являющееся следствием неравенства (10):

$$\Delta_t \equiv \sup_x \Delta_t(x) \leqslant C(r,\delta) L_t^{2+\delta}, \quad L_t^{2+\delta} = \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} t^{\delta/2}}, \tag{11}$$

где $C(r,\delta) = C(\delta)\Gamma(r - \frac{\delta}{2})/\Gamma(r)$. Однако задача построения оценки точности аппроксимации распределений отрицательных биномиальных случайных сумм при $r \leqslant \delta/2$ ранее решена не была.

В разделе 3.1 при условии, что $r > \delta/2$ найдены нижние оценки для абсолютной постоянной $C(r,\delta)$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена для отрицательных биномиальных случайных сумм (11). Определена *верхняя асимптотически правильная постоянная:*

$$\overline{C}_{\text{ап}}(r,\delta) = \limsup_{t\to\infty} \sup \frac{\Delta_t}{L_t^{2+\delta}}, \quad r > 0,$$

где супремум берется по всем распределениям случайной величины X_1, для которой справедливы условия (9).

Теорема 8. *Для верхней асимптотически правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ап}}(r,\delta)$ при каждом $r > \delta/2$ справедлива следующая нижняя оценка*

$$\overline{C}_{\text{ап}}(r,\delta) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{\gamma>0} \frac{\gamma^{\delta/2}}{(\gamma+1)^r} \cdot {}_2F_1\left(\left[\frac{r}{2}, \frac{r+1}{2}\right], 1, \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\right),$$

где

$${}_2F_1\left([a,b], c, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}, \quad (a)_k = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

– обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса.

[29] С. В. Гавриленко, В. Ю. Королев. Оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм – *Системы и средства информатики*, ИПИ РАН, Москва, 2006, специальный выпуск, с. 248–257.

Подробно рассмотрен случай $r = 1$, когда случайная величина $N(t)$ имеет геометрическое распределение. При этом предельное (при $t \to \infty$) распределение для стандартизованной геометрической суммы $S(t)$ является распределение Лапласа.

Теорема 9. *Для константы* $\overline{C}_{\text{ап}}(1,\delta)$ *справедлива следующая нижняя оценка*

$$\overline{C}_{\text{ап}}(1,\delta) \geqslant \frac{1}{2}\sup_{\gamma>0}\frac{\gamma^{\delta/2}}{\sqrt{2\gamma+1}}.$$

Также построена миноранта *нижней асимптотически правильной постоянной*:

$$\underline{C_{\text{ап}}}(1,\delta) = \limsup_{\ell\to 0}\limsup_{t\to\infty}\sup_{F:\ L_t^{2+\delta}=\ell}\Delta_t/\ell. \tag{12}$$

Теорема 10. *Для* $\underline{C_{\text{ап}}}(1,\delta)$ *справедливы следующие нижние оценки*

$$\underline{C_{\text{ап}}}(1,1) \geqslant \frac{1}{2}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\gamma+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3535\ldots,$$

$$\underline{C_{\text{ап}}}(1,\delta) \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2+\delta/2}\Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)}\sup_{s>0}\frac{1}{s^{2+\delta}}\Big(\sqrt{1+s^2}-s^2-1+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e(1+3s^2)(1-\operatorname{erf}(1)) - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{1+s^2}(1+2s^2)(1-\operatorname{erf}(\sqrt{1+s^2}))\Big),$$

$0<\delta<1$, *где* $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ – *«функция ошибок».*

Приведены конкретные значения минорант $\overline{C}_{\text{ап}}(1,\delta)$ и $\underline{C_{\text{ап}}}(1,\delta)$ для некоторых $\delta \in (0,1]$. В частности, $\overline{C}_{\text{ап}}(1,1) \geqslant 0.3535$, $\underline{C_{\text{ап}}}(1,0.9) \geqslant 0.0199$.

В разделе 3.2 построены неравномерные оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм к масштабным смесям нормальных законов. Доказана следующая теорема:

Теорема 11. *Предположим, что выполнены условия* (9). *Тогда при каждом* $t > 0$ *при любом* $x \in \mathbb{R}$ *имеет место оценка*

$$\Delta_t(x) \leqslant C_{st}(\delta) \cdot \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}(d(t))^{\delta/2}} \cdot \mathsf{E}\Big\{ \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Big[\Big(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Big)^{1+\delta/2} + |x|^{2+\delta} \Big]^{-1} \Big\} + \\ + \int\limits_0^{+\infty} |\delta_t(\lambda)| \, d_\lambda \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \Big), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где константа $C_{st}(\delta)$ *– та же, что и в неравномерной оценке для пуассоновских случайных сумм (см. теорему* 7 *с верхними оценками для* $C_{st}(\delta)$ *в таблице* 1). *В частности,* $C_{st}(1) \leqslant 15.7601$.

Полученные оценки при $\delta = 1$ существенно уточняют и обобщают на случай $0 < \delta < 1$ результат работы [22].

В разделе 3.3 доказаны аналоги неравенств Берри–Эссеена для отрицательных биномиальных случайных сумм в случае, когда у отрицательного биномиального распределения параметр $r \leqslant \delta/2$. Показано, что в случае $r < \delta/2$ оценка имеет порядок $O(t^{-r})$, а в случае $r = \delta/2$ – порядок $O(t^{-\delta/2}\ln(t))$, $(t \to \infty)$.

Теорема 12. *Пусть случайная величина* $N(t)$ *имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами* $r > 0$ *и* $p = (1+t)^{-1}$, *где* $t > 0$. *Предположим, что выполнены условия* (9) *и* $r < \delta/2$. *Тогда для любого* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\Delta_t \leqslant K(r,\delta) \frac{L^{2r/\delta}}{t^r}, \quad L = \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}},$$

где

$$K(r,\delta) = \frac{\delta \varkappa^{1-2r/\delta}(C(\delta))^{2r/\delta}}{2\Gamma(r+1)(\delta/2 - r)},$$

$C(\delta)$ *– та же, что и в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм,* $\varkappa = 0.54093654\ldots$ *(см.* [30]).

Следствие 1. *В условиях теоремы* 12 *для любого* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\Delta_t \leqslant K(r,\delta) \frac{L}{t^r} = K(r,\delta) \frac{\beta_{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} t^r}.$$

[30] Р. Н. Бхаттачария, Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. – М.: Наука, 1982, 286 с.

Теорема 13. *Пусть случайная величина $N(t)$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r > 0$ и $p = (1+t)^{-1}$, где $t > 0$. Предположим, что выполнены условия (9) и $r = \delta/2$. Тогда для любого $t > 0$ и $\delta \in (0, 1]$ справедлива оценка*

$$\Delta_t \leqslant K(\delta) \left[\frac{2}{\delta} + \ln \left(1 + \frac{t}{(C(\delta)L/\varkappa)^{2/\delta}} \right) \right] \cdot \frac{L}{t^{\delta/2}},$$

где $K(\delta) = C(\delta)/\Gamma(\delta/2)$, а $C(\delta)$ – та же, что и в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм.

Следствие 2. *Для любых $0 < \delta \leqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\Delta_t \leqslant \frac{\overline{C}(\delta)}{\Gamma(\delta/2)} \left[\frac{2}{\delta} + \ln \left(1 + \frac{t}{(\underline{C}(\delta)/\varkappa)^{2/\delta}} \right) \right] \frac{L}{t^{\delta/2}},$$

где $\overline{C}(\delta)$ и $\underline{C}(\delta)$ – соответственно верхние и нижние оценки для $C(\delta)$.

В обоих случаях приведены положительные миноранты для абсолютной константы в аналогах неравенства Берри–Эссеена теорем 12,13 и тем самым доказана правильность установленных порядков скорости сходимости.

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук, профессора Виктора Юрьевича Королева, которому автор выражает искреннюю признательность. Автор также считает своим приятным долгом выразить благодарность Ирине Геннадьевне Шевцовой за полезные консультации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. О неравномерных оценках скорости сходимости в ЦПТ. – *Теория вероятностей и ее применения*, 2011, т. 56, вып. 3.

2. Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм. – *Информатика и ее применения*, 2011, т. 5, вып. 1, с. 39–45.

3. Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. Уточнение структуры неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме с приложением к пуассоновским случайным суммам. – *Доклады РАН*, 2011.

4. Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. Двусторонние оценки для абсолютной константы в неравенстве Берри-Эссеена для пуассоновских случайных сумм. – *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*. Изд-во Пермского университета. Пермь, 2010, Вып. 22. С. 121-128.

5. Ю. С. Нефедова. Оценки скорости сходимости в предельной теореме для отрицательных биномиальных случайных сумм. – *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*. Изд-во Пермского университета. Пермь, 2011, Вып. 23.

6. Yu. Nefedova, I. Shevtsova. On the constants in the uniform and non-uniform versions of the Berry-Esseen inequality for Poisson random sums. – *International Conference on Ultra Modern Telecommunications* (*ICUMT*), 2010, IEEE, p.1141–1144.

7. Yu. Nefedova. The lower estimates for the constants in the analogs of the Berry–Esseen inequality for sums of random number of random variables. – *Book of abstracts of the 14th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis,* 2011, Rome, Italy, p.1021–1028.

8. Yu. Nefedova. The lower estimates for the constants in the analogs of the Berry–Esseen inequality for sums of random number of random variables. – *Proceedings of the 14th Conference of Applied Stochastic Models and Data Analysis,* 2011, Rome, Italy, ISBN 97888467-3045-9.

9. Ю. С. Нефедова. Нижние оценки для константы в аналоге неравенства Берри–Эссеена для обобщенных процессов Кокса. – *Сборник тезисов конференции «Ломоносов-2011»* , секция «Вычислительная математика и кибернетика», стр. 19-21.

10. Ю. С. Нефедова, И. Г. Шевцова. Двусторонние оценки для констант в равномерном и неравномерном аналогах неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм. – *Материалы научной конференции «Тихоновские чтения – 2010»*, стр. 56-57.

11. Yu. Nefedova, I. Shevtsova. On the accuracy of the normal approximation to Poisson random sums. – *Book of abstracts of the conference Prague Stochastics 2010*, p. 112.

12. Ю. С. Нефедова. Численный поиск нижней оценки для абсолютной константы в неравенстве Берри-Эссеена для пуассоновских случайных сумм. – *Сборник тезисов «Ломоносов–2010»,* секция «Вычислительная математика и кибернетика», стр. 124-126.

В работах [1] и [3] Нефедовой Ю.С. было проведено доказательство теорем, вошедших в главу 1 данной диссертационной работы, а также разработан и реализован алгоритм для вычислений верхних оценок для абсолютной константы в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эсеена.

В работах [2] и [4] Нефедовой Ю.С. принадлежит доказательство нижних оценок для верхних асимптотически правильных постоянных, уточнение верхней оценки для константы в неравенстве Берри–Эсеена для пуассоновских случайных сумм в случае $0 < \delta < 1$.

В работах [6],[10] и [11] Нефедовой Ю.С. получен явный вид минорант верхних и нижних асимптотически правильных постоянных при $0 < \delta \leqslant 1$, уточнена верхняя оценка для константы в неравномерном аналоге неравенства Берри–Эсеена для пуассоновских случайных сумм.