На правах рукописи

Дубровский Алексей Дмитриевич

АНАЛИЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ХАОТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор *Магницкий Николай Александрович*

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор *Сидоров Сергей Васильевич*
кандидат физико-математических наук,
доцент *Тихомиров Василий Васильевич*

Ведущая организация:
Учреждение Российской академии наук Институт системного анализа РАН

Защита состоится *14 декабря 2011 г.* в *15:30* на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2011 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор *Захаров Евгений Владимирович*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

В современном научном мире моделирование динамических систем является одним из наиболее популярных методов описания явлений в природе и в жизни человека. Модель таких систем зачастую представляет собой систему дифференциальных уравнений. Особый интерес представляют предельные решения при времени, стремящемся к бесконечности. Несмотря на простоту нелинейной динамической системы, в фазовом пространстве могут возникать различные топологические структуры, такие как стационарные точки, периодические орбиты, торы, а также различные хаотические структуры. Более того, в фазовом пространстве эти структуры могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, в совокупности образовывая более сложные фрактальные атракторы. Задача локализации и стабилизации решений с определёнными фазово-пространственными характеристиками при различных параметрах системы представляет интерес как с теоретико-аналитической точки зрения, так и с практической.

В хаотической динамике изучение изменения структуры фазового пространства в динамических системах при изменении параметров системы является одной из актуальных тем. Из теории Фейгенбаума следует, что хаотическое поведение в одномерных отображениях возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Далее каскад бифуркаций может продолжаться каскадом бифуркаций Шарковского, который позднее был переоткрыт Ли и Йорке. В результате каскада изменение периода цикла следует порядку Шарковского:

$$\begin{gathered}1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \cdots \\ \cdots \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.\end{gathered} \tag{1}$$

Таким образом, цикл периода три указывает на существование в фазовом пространстве любого цикла из серии А.Н. Шарковского. Полный каскад Фейгенбаума–Шарковского наглядно проиллюстрирован на системах обыкновенных дифференциальных уравнений (далее ОДУ) Х.А. Лоренца, Ч.Й. Чуа, Д. Рёсслера и других. Н.А. Магницкий продолжил каскад Шарковского гомоклиническими и более сложными каскадами бифуркаций, а также выдвинул гипотезу об универсальности перехода к хаосу через каскад Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого (далее ФШМ). На сегодняшний день универсальность перехода была показана только в отображениях и системах ОДУ. С этой точки зрения в данной работе исследуются консервативные гамильтоновые системы и системы дифференциальных уравнений с частными производными с гладкими правыми частями.

Классический подход определения характера поведения решений при малых отклонениях по энергии основан на анализе поведения торов в канонически преобразованной системе. В соответствии с теоремой Колмогорова-Арнольда-Мозера (далее КАМ) должно существовать такое достаточно малое отклонение по энергии, при котором сохраняются почти все торы невозмущённой системы. Принято считать, что комплексификация фазового пространства, в результате которой рождаются новые торы около сепаратрисы, возникает вследствие расщепления самой сепаратрисы. Результаты, полученные в данной работе, показывают, что усложнение происходит через каскад бифуркаций ФШМ. Такой каскад наглядно продемонстрирован в системе осциллятора Дуффинга с периодическим внешним воздействием и внутренним затуханием. Стоит отметить, что модель такого осциллятора широко используется в ускорителях заряженных частиц. Гладкий переход от диссипативного случая к консервативному сохраняет сложность фазовой структуры с той лишь разницей, что в консервативном осцилляторе динамика фазового пространства задается торами вокруг циклов из каскада ФШМ.

Теория полей Янга–Миллса квантовой хромодинамики на основе группы

$SU(3)$ играет важную роль в Стандартной Модели в современной физике элементарных частиц. Предполагается, что теория неабелевых калибровочных полей способна объяснить и смоделировать сильное взаимодействие кварков и глюонов. Тем не менее, сама система уравнений Янга–Миллса остается не до конца изученной в связи с ее сложностью и нелинейностью. Динамическая система классических пространственно-однородных полей является гамильтоновой системой, которая зарекомендовала себя как неинтегрируемая стохастическая система. Калибровочное поле бозона Хиггса частично решает эту проблему для слабых полей. Но сильные поля могут изменить динамику от регулярной до хаотической в системе Янга–Миллса–Хиггса. Этот процесс главным образом связан с рождением новых эллиптических и гиперболических периодических решений вблизи границ сепаратрис, как результат нелокальных бифуркаций периодических решений и торов. В настоящей работе рассматривается динамическая система классических пространственно-однородных полей на плоскости при различных энергиях системы.

На текущий момент разработан ряд математических моделей вида реакции-диффузии, описывающих важные и актуальные процессы, такие как термоядерные реакции в реакторах, межвидовое сосуществование в животном мире, а также в различных науках, таких как химия, экология, теория морфогенеза, физика плазмы. В общем случае такое поведение задается системой ДУ с частными производными, предложенной Курамото и Цузуки в 1975 году. Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий и А.А. Самарский с помощью маломодового приближения системы описали качественное поведение вблизи термодинамической ветви в окрестности точки бифуркации, а также изучили спиральные волны системы. Авторами было также показано, что при определенных параметрах в системе существует диффузионный хаос. Несмотря на множество работ, посвященных изучению системы Курамото–Цузуки, хаотическое поведение остается малоизученным, а методов стабилизации неустойчивых периодических решений не существует.

Цель диссертационной работы Целью диссертационной работы является разработка новых подходов к локализации и стабилизации периодических решений динамических систем ОДУ, консервативных систем, гамильтоновых систем и систем с частными производными, а также применение разработанных подходов к хаотическим системам с целью выявления принципа усложнения структуры фазового пространства.

Научная новизна В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Разработан общий подход к локализации периодических решений систем ОДУ, консервативных систем и гамильтоновых систем с использованием методов кластеризации.

2. Предложен новый подход к стабилизации периодических решений систем ОДУ, консервативных систем, гамильтоновых систем и систем с частными производными.

3. Разработан метод стабилизации гамильтоновой гиперповерхности в системе ОДУ.

4. Предложен подход к устойчивому изменению параметров системы за конечное число шагов, который гарантирует малое ограниченное отклонение от заданного периодического решения.

5. Разработан подход к исследованию устойчивости периодических решений систем с частными производными для случая, когда весь спектр является счетным множеством.

6. Показано, что хаотическая динамика в консервативной и диссипативной системах Дюффинга–Холмса связаны и подчиняются универсальной теории ФШМ.

7. Показано, что хаотическая динамика в уравнениях Янга-Миллса-Хигса является результатом каскада бифуркаций типа вилки и бесконечного числа

каскадов ФШМ.

8. Показано, что усложнение системы Курамото–Цузуки начинается с бифуркаций простого периодического решения. Далее, простое периодическое решение порождает каскад бифуркаций типа вилки, в результате которого рождается бесконечное число неустойчивых циклов. А также, что каскад ФШМ присутствует при усложнении структуры спиральных волн.

Методы исследования В работе использованы теория дифференциальных уравнений, теория линейных операторов, теория и методы хаотической динамики, а также численные методы интегрирования и дифференцирования.

Практическая значимость Предложенные в работе подходы и методы локализации и стабилизации периодических решений имеют теоретическую и практическую значимость при изучении и управлении хаотическими диссипативными системами, консервативными системами и системами с частными производными. Впервые показывается универсальность теории перехода к хаосу ФШМ в консервативных и гамильтоновых системах. Также впервые предложен подход к стабилизации периодических решений динамических систем уравнений с частными производными. Предложенный метод стабилизации гамильтоновой гиперповерхности в каноническом преобразовании позволяет эффективно изучать гамильтоновы системы, а также является концептуальной основой для стабилизации энергии в близко гамильтоновых системах.

Возникновение хаотического или неустойчивого поведения в ускорителях заряженных частиц может являться результатом бифуркаций периодических решений осцилляторов Дюффинга–Холмса. В работе найдены параметры первых бифуркаций при увеличении энергии и диссипации, которые могут быть использованы как граничные условия при проектировании осцилляторов. Для случая, когда желаемое периодическое решение может быть в области неустойчивости, предложенный метод стабильного изменения параметров позволяет в оперативном порядке стабилизировать периодическое решение, а кластерный подход позволяет найти необходимое решение при сложном или хаотическом поведении.

Результаты, полученные при изучении простейшего случая полей Янга–Миллса системы классических пространственно-однородных полей на плоскости, указывают на то, что в более сложных системах и в многомерных случаях существуют не менее сложные фазовые структуры, чем из каскадов бифуркаций ФШМ и типа вилки, которые задаются калибровочным полем бозона Хиггса в Стандартной Модели.

Результаты, полученные при изучении системы Курамото–Цузуки, дают оценки точек и типов бифуркаций периодических решений, которые могут быть использованы при моделировании, например, термоядерных реакций или эко-систем.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- общий подход к локализации периодических решений систем ОДУ, консервативных систем и гамильтоновых систем с использованием методов кластеризации;

- подход к стабилизации периодических решений систем ОДУ, консервативных систем, гамильтоновых систем и систем с частными производными;

- подход к устойчивому изменению параметров системы, который гарантирует изменение параметров системы за конечное число шагов при ограниченной ошибке отклонения от заданного периодического решения;

- метод стабилизации гамильтоновой гиперповерхности;

- подход к иследованию устойчивости периодических решений систем с частными производными для случая, когда спектр является счетным множеством.

Апробация работы

Основные результаты работы и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

1. На Третьем международном междисциплинарном симпозиуме "Chaos and Complex Systems CCS2010 (Стамбул, Турция, 21-24 мая 2010 г.);

2. На Международном симпозиуме "Chaotic Dynamics of Ordinary and Partial Differential Equations"ICNAAM-2010 (Родос, Греция, 19-25 сентября 2010 г.);

3. На Всероссийском научно–исследовательском семинаре "Нелинейная динамика и управление"под руководством академиков РАН С.В. Емельянова и С.К. Коровина (Москва, Россия, 8 ноября 2010);

4. На научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия, 2007-2010).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 5 статей в ведущих рецензируемых журналах и 2 статьи в международных журналах.

Структура и объем диссертации

Диссертация содержит 135 страниц текста, состоит из введения, четырёх глав, заключения и библиографии.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе излагаются подходы к локализации и стабилизации неустойчивых периодических решений в хаотических динамических системах

ОДУ.

В разделе 1.1 даны основные обозначения и определения, использованные в изложении работы.

В разделе 1.2 приведены три основных подхода к стабилизации периодических решений систем ОДУ с управлением:

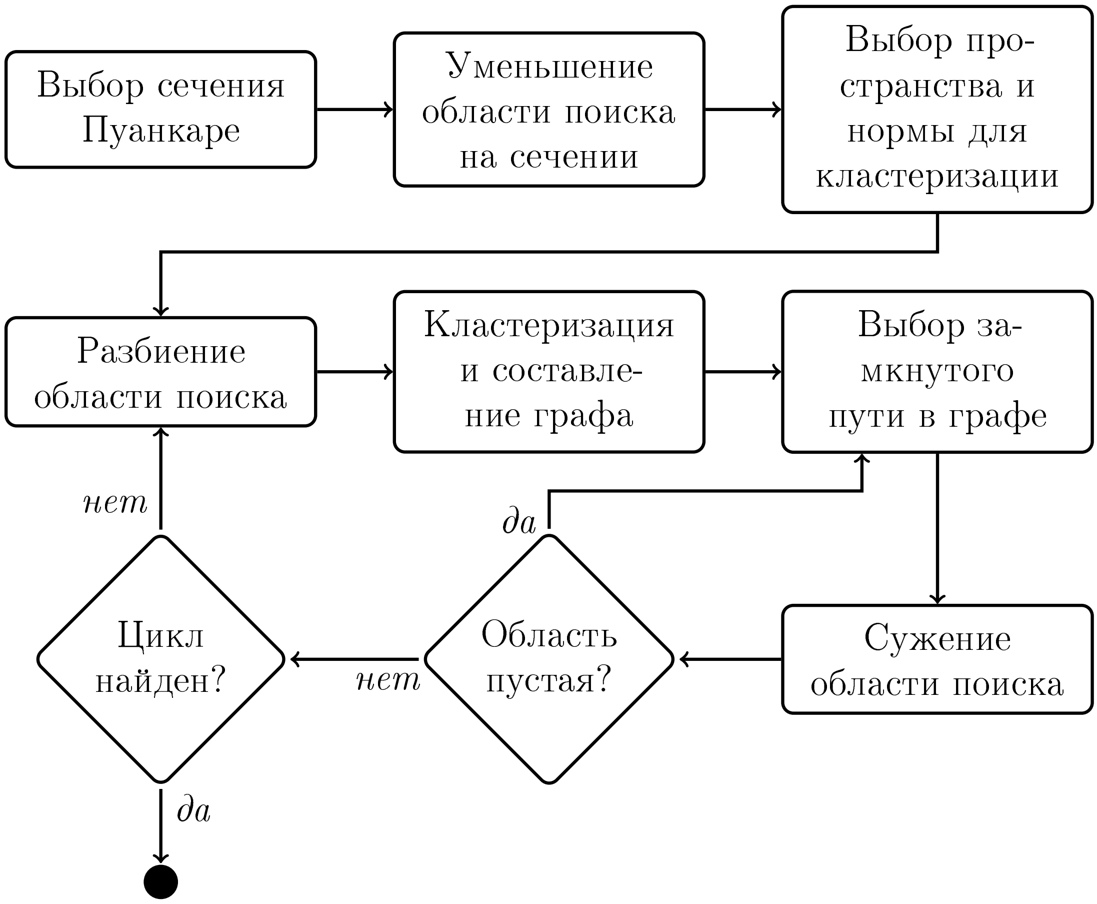
- подход, основанный на OGY-методе стабилизации неподвижной точки отображения Пуанкаре с дискретно изменяемой управляющей компонентой;

- подход, основанный на методе Пирагаса, который заключается в стабилизации с запаздыванием и непрерывной управляющей компонентой;

- подход, основанный на методе Магницкого, в котором стабилизация осуществляется при помощи расширенного пространства системы и непрерывно управляющими линейными компонентами.

В разделе 1.3 приведен подход к локализации неустойчивых периодических решений хаотической, сильно диссипативной системы Рёсслера с помощью кластеризации сечения Пуанкаре. При этом показывается переход от численного поиска в неограниченном двухмерном пространстве к поиску в ограниченном одномерном пространстве. Также приводится пример кластеризации одномерного пространства при фиксированных параметрах системы. Сам поиск периодических решений сводится к выбору различных циклов ориентированного графа, где вершинами являются кластеры векторного пространства, а связи определяются отображением Пуанкаре. Затем приводятся примеры локализованных неустойчивых периодических решений в фазовом пространстве, в котором присутствует хаотическое поведение.

Далее **в разделе 1.4** приводится общая схема локализации устойчивых и неустойчивых периодических решений хаотических систем:



Приводится теорема о сходящихся бесконечных последовательностях циклически связанных кластеров к периодическим решениям на сечении Пуанкаре:

Теорема 1. *Пусть существуют последовательности замкнутых областей* $A_{i,j} \subseteq M_p$, *где* $i \in [1,m]$ *и* $j \in [0,\infty]$, *такие, что удовлетворяют следущим условиям:*

1. $\exists j \geqslant 0, \forall i \in [1,m], k \in [1,m], i \neq k: \; A_{i,j} \bigcap A_{k,j} = \emptyset$,
2. $\forall i \in [1,m],\; j \geqslant 0: \; A_{i,j+n} \subseteq A_{i,j}$, *где* $n > 0$,
3. $\forall i \in [1,m]: \; \lim_{j\to\infty} A_{i,j} = a_i$, *где* a_i *- точка на сечении Пуанкаре* M_p,
4. $\forall j \geqslant 0: \; A_{1,j}, A_{2,j}, \cdots, A_{m,j}$ *- цикл кластеров,*

тогда цикл кластеров $A_{1,0} \to A_{2,0} \to A_{3,0} \to \cdots \to A_{m,0} \to A_{1,0}$ *содержит* *точки периодического решения системы, которое пересекает сечение Пуанкаре ровно m раз в различных точках: $a_1, a_2, \cdots, a_m$.*

Таким образом, процесс уточнения периодических точек на сечении Пуанкаре по приведенной схеме бесконечен, и если существует хоть один простой цикл в графе, то существует бесконечное число сложных циклов графа, которые могут отвечать различным циклам системы. Тем не менее, поиск периодических решений по простым циклам кластеров делится на конечное число процессов L. Это число процессов не превосходит числа $L \leqslant 2^{\lceil \sqrt{l} \rceil} - 1$, где l - полное число кластерных связей. Для уменьшения числа процессов и тем самым оптимизации поиска, предлагается использовать следующие метрики пространства для кластеризаци:

1. $\rho_{M_p \times PM_p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + (P_i(\mathbf{x}) - P_i(\mathbf{y}))^2}$,
2. $\rho_{M_p \times PM_p \times T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_{M_p \times PM_p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + a_t|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})|$, где a_t - некая положительная константа, $T(\mathbf{x})$ - время, необходимое для того, чтобы совершить отображение Пуанкаре динамической системой с начальной точкой в $\mathbf{x}$.

В разделах 1.5–1.8 вводится производная система динамической системы ОДУ и приводятся основные свойства.

Исходная система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu),$$
$$\mathbf{x} \in M \subset \mathbb{R}^m, \mu \in L \subset \mathbb{R}^k, t \in I \in \mathbb{I}_+, \mathbf{F} \in C^\infty$$

где μ - параметр системы, t - параметр времени, $\mathbf{x}$ - состояние системы.

Производная система:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y},\mu) = \{g_1(\mathbf{y},\mu),\cdots,g_m(\mathbf{y},\mu)\},\\
&g_i(\mathbf{y},\mu) = f_i(\mathbf{y},\mu) - y_{i\tau}\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\|\mathbf{y}_\tau\|^2_{L_2}},\\
&\|\mathbf{y}_\tau\|^2_{L_2} \neq 0,\\
&\mathbf{y}(t,\tau)|_{\tau=0} = \mathbf{y}(t,\tau)|_{\tau=2\pi}, \mathbf{y}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{y}_\tau|_{\tau=2\pi},\\
&y\in M\subset\mathbb{R}^m, \mu\in L\subset\mathbb{R}^k, t\in I\in\mathbb{I}_+, \tau\in[0,2\pi].
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Если $\mathbf{x}(t)$ является T-периодическим решением исходной системы, то функция $\mathbf{y}(t,\tau) = \mathbf{x}(Q(\tau))$ является стационарной в производной системе, где функция $Q : [0,2\pi] \to [0,T]$ непрерывна и $Q(0) = 0$, $Q(2\pi) = T$, $Q'(0) = Q'(2\pi)$.*

Теорема 3. *Если функция $\mathbf{y}(t,\tau) = \mathbf{y}(\tau)$ является стационарной в производной системе, тогда существует такая монотонно возрастающая функция $P : [0,T] \to [0,2\pi]$, что функция $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(P(t))$ при $t \in [0,T]$ является циклом T-периодического решения исходной системы.*

Теорема 4. *Периодическое решение $\mathbf{x}(t)$ исходной системы является орбитально-асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{y}(t,\tau) = \mathbf{x}(Q(\tau))$ является стационарной и асимптотически устойчивой на многообразии, перпендикулярном к $\mathbf{y}_\tau$ в производной системе, где $Q(\tau)$ - монотонно возрастающая функция $Q : [0,T] \to [0,2\pi]$ и T - период функции $\mathbf{x}(t)$. А многообразие $\mathbf{y}_\tau$ не является ни устойчивым, ни неустойчивым в производной системе.*

В разделах 1.9 и 1.10 излагается метод стабилизации стационарного решения производной системы следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{y},\mu) - \mathbf{y}_\tau\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\|\mathbf{y}_\tau\|^2_{L_2}} + \epsilon q,\\
\dot{q} &= \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu) - \mathbf{y}_\tau\frac{\mathbf{F}(\mathbf{y},\mu)\cdot\mathbf{y}_\tau}{\|\mathbf{y}_\tau\|^2_{L_2}}\right) + \beta q,
\end{aligned}
$$

где $\epsilon(\tau) = (\epsilon_1(\tau), \cdots, \epsilon_m(\tau))^T$, $\mathbf{a}(\tau) = (a_1(\tau), \cdots, a_m(\tau))$ и $\beta(\tau) \in \mathbb{R}$. В качестве иллюстрации подхода приводится пример стабилизации периодических решений системы Рёслера, где вводятся производная система и система, с помощью которой стабилизируется стационарное решение производной системы. Результатом стабилизации является весь цикл целиком, а не одна точка, получаемая другими подходами.

В заключительном разделе 1.11 приводятся основные положения и выводы к первой главе.

Результаты первой главы опубликованы в работах [2, 6].

Во второй главе излагаются методы и результаты анализов периодических решений в консервативных и гамильтоновых системах.

В разделе 2.1 излагается метод стабильного изменения параметров системы на примере осцилляторов Дуффинга–Холмса. Затем приводится теорема о достижимости других параметров системы за конечное число шагов, при этом на каждом шаге отклонение от заданного периодического решения не превышает заведомо выбранной величины. Этот подход является универсальным в том смысле, что в нем не требуется дополнительных вычислений для различных периодических решений. В заключении дается оценка отклонения от периодического решения при изменении параметров системы и оценка сходимости к периодическому решению при фиксированных параметрах системы. Предложенный подход также позволяет стабилизировать периодические орбиты.

В разделе 2.2 рассматриваются точки бифуркаций периодических решений системы диссипативного осциллятора Дуффинга–Холмса при малом внешнем воздействии и различных степенях диссипации. Найденные точки бифуркации образуют каскад бифуркаций, в результате которого рождаются также хаотические решения и цикл периода три. Подтверждается, что каскад подчиняется теории ФШМ. С помощью изложенного метода стабильного изменения параметров системы были найдены точки бифуркаций различных периодических решений в области параметров системы консервативного осциллятора Дуффинга–Холмса. Показано, что природа хаоса консервативного и диссипативного осцилляторов подчиняется универсальной теории бифуркаций ФШМ, при этом точки бифуркаций осцилляторов непрерывно связаны в области параметров системы.

В разделах 2.3, 2.4 рассматривается проблема того, что гиперповерхность гамильтоновых систем в фазовом пространстве при любых энергиях системы не является устойчивой в эквивалентной системе ОДУ, что приводит к неконтролируемой ошибке вычисления при численном интегрировании системы. Приводится общая теорема о достаточном условии устойчивости произвольной гиперповерхности системы ОДУ. На основе этой теоремы изложен пример глобальной стабилизации гиперповерхности системы Янга–Миллса на плоскости с помощью дополнительных диссипативных компонентов. Преимущества данного метода по сравнению с симплектическими методами проиллюстрированы численными экспериментами.

В разделе 2.5 приводится анализ изменения структуры фазового пространства при отображении Пуанкаре системы Янга–Миллса на плоскости. Найдена новая пространственно-временная симметрия отображения. Также найдены ограниченные фрактальные области параметров для различных порядков отображения такие, что только в этих областях могут существовать неподвижные точки отображения. В этих областях найдены многочисленные циклы различных порядков отображения.

В разделах 2.6–2.8 приводится детальный анализ простых периодических решений системы Янга–Миллса–Хиггса. Приводятся основные постоянные каскадов бифуркаций. Иллюстрируются основные типы простых решений и их бифуркации.

В разделе 2.9 приводится система ОДУ гамильтоновой системы

Янга–Миллса–Хиггса, в которой гиперповерхность является глобально устойчивой.

В разделе 2.10 приводятся основные результаты численного исследования перехода структуры фазового пространства системы Янга–Миллса–Хиггса от сильных полей к слабым вплоть до системы, в которой отсутствует механизм Хиггса. Хаотическое поведение и многочисленные периодические решения системы Янга–Миллса объясняются основными каскадами бифуркаций типа вилки простых периодических решений и бесконечным числом каскадов ФШМ.

Результаты второй главы опубликованы в работах [5, 7].

В третьей главе рассматривается задача исследования устойчивости периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений с частными производными.

В разделе 3.1 дано определение исследуемой динамической системы уравнений, приведены основные свойства и критерии устойчивости и неустойчивости периодических решений для задач, у которых спектр монодромии является счетным множеством.

В разделе 3.2 излагается метод нахождения больших по модулю собственных значений и собственных функций оператора монодромии, которые и определяют устойчивость и неустойчивость периодических решений. Приведены оценки точности вычисления собственных значений и собственных функций.

В разделах 3.3-3.5 приводится анализ устойчивости периодических решений системы уравнений Курамото–Цузуки и их асимптотическое поведение после бифуркаций. Показан каскад бифуркаций типа вилки простого периодического решения, в результате которого рождается бесконечное число неустойчивых циклов, показана закономерность точек бифуркаций.

В разделе 3.6 приводится анализ устойчивости спиральных волн системы уравнений Курамото–Цузуки. Показано существование подмножества решений, удовлетворяющих каскаду бифуркаций ФШМ.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 3].

В четвертой главе приводится подход к стабилизации периодических решений систем дифференциальных уравнений с частными производными. Этот подход является более общим случаем подхода, изложенного в первой главе. Он включает в себя исследование новой производной динамической системы, в которой любое стационарное решение задается периодическим решением исходной системы. Стабилизация стационарного решения осуществляется с помощью расширенной системы и линейных связей. Подход иллюстрируется на примере стабилизации простого периодического решения системы Курамото–Цузуки. Результатом стабилизации является весь цикл целиком.

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [4].

В заключении приводятся основные результаты, полученные в ходе исследования задачи локализации, стабилизации и анализа периодических решений:

- разработан подход к локализации как устойчивых, так и неустойчивых периодических решений на сечении Пуанкаре, основанный на кластеризации фазового пространства, и приводится общая схема локализации;

- разработан подход к стабилизации периодических решений как системы ОДУ, так и системы ДУ с частными производными, основанный на введении производной динамической системы уравнений, которая позволяет стабилизировать весь цикл целиком и не зависит от периода цикла;

- разработан метод стабильного изменения параметра системы, который позволяет быстро стабилизировать почти любое локализованное периодическое решение и переходить к другим параметрам системы;

- найдено, что периодические решения диссипативной системы Дуффинга–Холлмс действительно существуют и в консервативной системе: таким образом, показано, что хаотическая динамика в консервативных системах также описывается универсальной теорией ФШМ;

- разработан новый подход к численному изучению гамильтоновых систем, который стабилизирует гиперповерхность, и при этом он не изменяет динамики системы на выбранном энергетическом уровне, в то же время сравнительный анализ с другими методами показал преимущества в точности и вычислительной скорости;

- найдена новая пространственно-временная симметрия классических пространственно-однородных полей Янга–Миллса и показано, что периодические решения конечного периода могут существовать только в ограниченном фрактальном множестве;

- показано, что бесконечное число периодических решений системы Янга–Миллса любого порядка возникает в результате каскадов бифуркаций типа вилки основных периодических решений и бесконечного количества каскадов ФШМ в системе Янга–Миллса–Хиггса;

- разработан метод отыскания наибольших по модулю собственных значений оператора монодромии в Гильбертовом пространстве, у которого спектр оператора монодромии является счётным множеством;

- найден каскад бифуркаций типа вилки простого цикла и каскад бифуркаций ФШМ в системе уравнений Курамото–Цузуки.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Николаю Александровичу Магницкому за постановку задачи и ценные советы в работе над диссертацией.

Список публикаций

1. Дернов А. В., Дубровский А. Д. О бифуркациях и аттракторах в маломодовом приближении уравнения Курамото–Цузуки // Труды ИСА РАН.

2005. Т. 14.

2. Дубровский А. Д. Подход к стабилизации неустойчивых периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 44.

3. Дубровский А. Д. Исследование устойчивости периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений с частными производными // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53, № 14. С. 63–80.

4. Дубровский А. Д. Подход к стабилизации неустойчивых периодических решений автномных систем дифференциальных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 12. С. 1716–1722.

5. Дубровский А. Д. Природа хаоса в консервативных и диссипативных системах осциллятора Дюффинга—Холмса // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1652–1656.

6. Dubrovskiy A. D. Localization of unstable periodical solutions in chaotic systems // Journal of Concrete and Applicable Mathematics. 2011. Vol. 9, no. 1. Pp. 35–39.

7. Dubrovskiy A. D. Analysis of Periodical Solutions in the Duffing-Holmes Oscillator // American Institute of Physics Conference Series / Ed. by T. C. Simos T.E., Psihoyios G. Vol. 1281 of American Institute of Physics Conference Series. 2010. Pp. 888–891.