

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Капалин Иван Владимирович

# СТАБИЛИЗАТОРЫ МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

*доктор технических наук,*

*академик РАН, профессор*

*Коровин Сергей Константинович*

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук,*

*профессор*

*Потапов Михаил Михайлович*

*кандидат физико-математических наук,*

*доцент*

*Канатников Анатолий Николаевич*

Ведущая организация:

*Вычислительный центр РАН*

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

*доктор физико-математических наук,*

*профессор*

*Захаров Евгений Владимирович*

# Общая характеристика работы

## Актуальность работы

В диссертационной работе рассматриваются различные постановки задачи построения стабилизаторов минимальной размерности для линейных стационарных динамических систем, а также численные алгоритмы их решения. Выделяются два вида стабилизаторов минимальной размерности: стабилизаторы, присваивающие замкнутой системе любой наперед заданный устойчивый спектр, и стабилизаторы, присваивающие замкнутой системе некоторый (“какой получится”) устойчивый спектр. Первая задача интенсивно исследовалась в зарубежной и отечественной литературе, тогда как вторая привлекла внимание исследователей ненадолго и была слабо изучена. В представленной работе для этой задачи получен ряд новых результатов, в частности, было показано, что линейные уравнения, описывающие многообразие характеристических полиномов замкнутой системы, имеют ганкелеву структуру, также получены критерий существования стабилизатора фиксированной размерности и алгоритм построения стабилизатора минимальной размерности.

Стабилизаторы низкой размерности обладают рядом преимуществ перед стабилизаторами высокой размерности: простота физической реализации (меньше функциональных элементов), более высокая скорость численной реализации таких стабилизаторов (решается система дифференциальных уравнений низкой размерности). Одним из возможных мест применения полученных алгоритмов или их модификаций являются системы высокой размерности, требующие быстрого реагирования стабилизатора (такими системами является, например, системы управления ТОКОМАК или другими сложными объектами). Понижение размерности стабилизатора также может быть удобно на практике тем, что конечному пользователю проще настраивать систему автоматического управления (САУ) с меньшим числом параметров.

Необходимые требования к качеству САУ могут быть запрограммированы заранее, а конечному пользователю представляется стабилизатор наименьшей размерности.

### **Цель диссертационной работы**

Целью диссертационной работы является получение необходимых и достаточных условий существования стабилизатора фиксированной размерности, разработка алгоритмов синтеза стабилизаторов минимальной размерности. Также целью работы является анализ и сравнение существующих оценок на размерности стабилизаторов, задающих наперед заданный спектр замкнутой системы.

### **Научная новизна**

В работе получены следующие основные результаты:

1. Получены критерии существования стабилизатора фиксированной размерности для скалярных (SISO, Single Input Single Output), векторных (SIMO, Single Input Multiply Output и MISO, Multiply Input Single Output) и матричных систем (MIMO, Multiply Input Multiply Output);
2. Получены алгоритмы построения минимального стабилизатора в 3-х случаях: скалярном, векторном и матричном;
3. Предложены численные методы реализации алгоритмов построения стабилизатора минимальной размерности;
4. Проведен анализ и сравнение существующих оценок сверху на размерность стабилизаторов с наперед заданным спектром;
5. Введено обобщение матрицы Сильвестра для семейства из  $l$  полиномов, изучены её свойства (в частности, в терминах обобщенной матрицы Сильвестра получен критерий существования ровно  $k$  общих корней с учетом кратности у семейства полиномов).

### **Практическая значимость**

Ценность полученных результатов носит в первую очередь теоретиче-

ский характер. Полученные критерии существования стабилизатора фиксированной размерности раскрывают особую структуру (а именно ганкелеву структуру) системы уравнений, задающих многообразие характеристических полиномов замкнутой системы. Учет этой структуры в численных методах повышает эффективность решения задачи синтеза стабилизатора.

Проведенный сравнительный анализ существующих оценок может послужить основой для выбора стабилизатора наименьшей размерности среди рассматриваемых стабилизаторов, наделяющих замкнутую систему заданным спектром.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- Критерии существования стабилизатора фиксированной размерности для скалярных, векторных и матричных систем;
- Алгоритмы построения минимального стабилизатора в 3-х случаях: скалярном, векторном и матричном;
- Численные методы построения стабилизатора минимальной размерности;
- Сравнительный анализ (из рассматриваемых в работе) оценок на размерность стабилизатора с наперед заданным спектром, найдены множества, где одна из оценок является наилучшей;
- Введено обобщение матрицы Сильвестра для семейства из  $l$  полиномов, получены ряд её свойств (в частности, критерий существования ровно  $k$  общих корней с учетом кратности у семейства полиномов).

### **Апробация работы**

Основные результаты работы и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

1. На XV международной научной конференции студентов, аспирантов

и молодых ученых “Ломоносов-2008”;

2. На XVII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2010”;

3. На научной конференции “Тихоновские чтения - 2010”;

4. На научной конференции САИТ-2009.

5. На специальном семинаре “Семинар по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова” при кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления.

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 6 статей (5 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ).

### **Достоверность**

Все результаты диссертации строго математически доказаны, апробированы на международных научных конференциях и семинарах. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах в ведущих математических журналах (Доклады РАН, Дифференциальные уравнения) и рецензируемых сборниках.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация содержит 139 страниц текста, состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений, библиографии.

## **Содержание работы**

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** приведена хронология развития проблемы стабилизации в теории автоматического управления, рассмотрены различные постановки задачи стабилизации, которые исследовались ранее.

**Во второй главе** рассматривается стабилизатор с назначением наперед заданного спектра замкнутой системы, исследуются различные оценки сверху на размерность  $k$  такого стабилизатора. Результаты главы опубликованы в работе [1].

**В разделе 2.1** поставлена задачи стабилизации с произвольным наперед заданным спектром.

Дана исходная линейная стационарная динамическая система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор системы,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — измеряемый выход,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  — управление;  $A, B$  и  $C$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей, причем пара  $\{A, B\}$  — управляема, пара  $\{C, A\}$  — наблюдаема, и  $\text{rank } C = l$ ,  $\text{rank } B = r$ .

Стабилизатором будем называть систему вида

$$\begin{cases} \dot{z} = Pz + Qy, \\ \hat{u} = Mz + Ny, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $z(t) \in \mathbb{R}^k$  — фазовый вектор стабилизатора,  $y(t)$  — выход системы (1.1),  $\hat{u}(t)$  — управление, формируемое стабилизатором;  $P, Q, M$  и  $N$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Под задачей стабилизации подразумевается поиск такого стабилизатора (1.2), что замкнутая система, получаемая при назначении управления  $u = v - \hat{u}$ , где  $v$  — некоторое новое управление (Рис. 1.1), асимптотически устойчива (далее слово “асимптотически” будет опускаться). Система, полу-

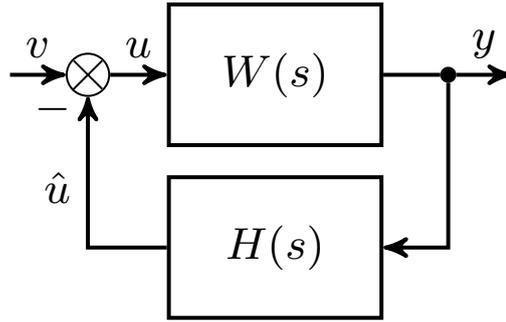


Рис. 1.1. Обратная связь со стабилизатором  $H$ ,  $v$  — некоторое управление,  $\hat{u}$  — выход стабилизатора,  $y$  и  $u$  — выход и вход исходной системы

чаемая замыканием обратной связью  $u = v - \hat{u}$ , имеет вид

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BNC & -BM \\ QC & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v, \\ y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Для управляемых и наблюдаемых систем используются понятия индексов наблюдаемости и управляемости.

**Определение 1.** Индексом наблюдаемости  $\mu$  исходной системы (1.1) называют такое минимальное число  $\mu$ , что выполнено равенство

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{\mu-1} \end{pmatrix} = n.$$

**Определение 2.** Индексом управляемости  $\nu$  исходной системы (1.1) называют такое минимальное число  $\nu$ , что выполнено равенство

$$\text{rank} \left( B, AB, \dots, A^{\nu-1}B \right) = n.$$

**В разделе 2.2** представлены рассматриваемые оценки на размерность стабилизатора (1.2) вида

$$k \leq k_0 = n + 1 - l - r, \quad (1.4)$$

$$k \leq k_1 = \max \{n + 2 - l - r - \nu, \nu - l, \mu - r + 1\}, \quad (1.5)$$

$$k \leq k_2 = \max \{n + 2 - l - r - \mu, \mu - r, \nu - l + 1\}, \quad (1.6)$$

$$k \leq k_3 = \min \{\nu - 1, \mu - 1\}, \quad (1.7)$$

и их краткий обзор.

**В подразделе 2.2.1** приведен анализ и сравнение рассматриваемых оценок, получены множества  $Q_{ij}$ , разбивающие плоскость параметров  $(\mu, \nu)$  на непересекающиеся подмножества. Их структура в зависимости от параметров  $n, r, l, \nu$  и  $\mu$  описана в этом подразделе.

**В подразделе 2.2.2** приведена развернутая форма “объединения” рассматриваемых оценок вида, т.е. получено явное выражение для минимума из

оценок  $k_i$  в зависимости от параметров системы  $n$ ,  $l$ ,  $r$ ,  $\mu$  и  $\nu$ .

$$k_{min} = \left\{ \begin{array}{ll} (n+1) - (l+r) - (\mu-1), & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{11} \text{ и} \\ & \nu + \mu \geq n + 3 - l - r; \\ n + 1 - l - r, & \text{если } (\nu, \mu) = (\bar{\nu}, \bar{\mu}) \in Q_{33}; \\ \nu - l, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{41} \cup Q_{42} \cup Q_{43}; \\ \mu - r, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{14} \cup Q_{24} \cup Q_{34} \\ & \text{и } r - 1 \leq \mu - \nu; \\ \mu - r + 1 = \nu - l + 1, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{33} \cup Q_{32} \cup \\ & \cup Q_{23} \cup Q_{22}, (\nu, \mu) \neq (\bar{\nu}, \bar{\mu}); \\ \nu - l + 1, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{13} \cup Q_{12}; \\ \mu - r + 1, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{31} \cup Q_{21} \\ & \text{и } r \geq \mu - \nu; \\ \nu - 1, & \text{если } (\mu, \nu) \in Q_{11} \text{ и} \\ & \nu + \mu \leq n + 2 - l - r, \\ & \text{либо } (\mu, \nu) \in Q_{14} \cup Q_{24} \cup Q_{34} \\ & \text{и } r \geq \mu - \nu, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

при условии, что  $\nu < \mu$  и  $r > 1$ ,  $l > 1$ . Также в подразделе приведен иллюстрирующий пример, показывающий, что минимальной может оказаться любая из оценок  $k_i$ .

**В третьей главе** рассмотрена задача синтеза минимального стабилизатора с “каким либо” устойчивым спектром замкнутой системы в трех случаях: скалярном (SISO, Single Input Single Output), векторном (SIMO, Single Input Multiply Output и MISO, Multiply Input Single Output) и матричном (MIMO, Multiply Input Multiply Output).

**В разделе 3.1** приведены две постановки задачи поиска минимального стабилизатора для линейных динамических систем: в терминах пространства состояний и в терминах передаточных функций (ПФ). В силу меньшего количества искомых параметров в случае описания с помощью ПФ далее используется только она.

Поставим в соответствие исходной системе (1.1) и стабилизатору (1.2) передаточные функции:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\Theta(s)}{\alpha(s)} \quad (1.9)$$

$$H(s) = M(sI - P)^{-1}Q + N = \frac{\Xi(s)}{\psi(s)}, \quad (1.10)$$

где  $\Theta(s) = [\theta_{ij}(s)]$  и  $\Xi(s) = [\xi_{ij}(s)]$  — матрицы из полиномов от  $s \in \mathbb{C}$  размерностей  $r \times l$  и  $l \times r$  соответственно, при этом  $\deg \theta_{ij}(s) < \deg \alpha(s) = n$ ,  $\deg \xi_{ij}(s) \leq \deg \psi(s) = k$ . Тогда замкнутой системе соответствует передаточная функция

$$W_f(s) = (I_l + W(s)H(s))^{-1}W(s) = \frac{Z(s)}{\gamma(s)}, \quad (1.11)$$

где  $\gamma(s)$  — характеристический полином системы (1.3),  $\deg \gamma = n + k$ ,  $Z(s)$  — полиномиальная матрица, такая что степени любого её элемента меньше  $n + k$ .

Таким образом, задача синтеза минимального стабилизатора состоит в поиске такой полиномиальной матрицы  $\Xi(s)$  и такого полинома  $\psi(s)$ , что характеристический полином  $\gamma(s)$  устойчив, число  $k$  — размерность стабилизатора (1.2) — минимально, и выполнены условия физической реализуемости, т.е.  $\deg \xi_{ij}(s) \leq \deg \psi(s) = k$ .

**В разделе 3.2** введены основные обозначения. В частности введены

матрицы типа Сильвестра для семейства полиномов  $a_1(s), \dots, a_l(s)$  вида

$$S_{p_1, \dots, p_l}(a_1, \dots, a_l) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_1^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{q-1} & & a_1^0 \\ a_1^q & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_1^{q-1} \\ 0 & \dots & a_1^q \end{matrix}}^{p_1} & & \overbrace{\begin{matrix} a_l^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l^{q-1} & & a_l^0 \\ a_l^q & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_l^{q-1} \\ 0 & \dots & a_l^q \end{matrix}}^{p_l} \\ \dots & & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $a_i(s) = \sum_{i=0}^{\deg a_i} a_i^j s^i$ . Если  $p_1 = \dots = p_l = p$ , то используется обозначение  $S_{p_1, \dots, p_l}(a_1, \dots, a_l) = S_p(a_1, \dots, a_l)$ .

**В разделе 3.3** рассматриваются SISO-системы, т.е.  $r = l = 1$ . В этом случае передаточные функции исходной системы (1.9) и стабилизатора (1.10) имеют вид:

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad H(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)},$$

где  $\beta(s)$  и  $\phi(s)$  — полиномы от  $s$ , а ПФ замкнутой системы (1.3) принимает вид

$$W_f = \frac{\beta(s)\psi(s)}{\gamma(s)}, \quad (1.13)$$

где  $\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s)$  — характеристический полином замкнутой системы, при этом  $\deg \gamma = n + k$ .

Проводится краткое исследование свойств матриц типа Сильвестра для

ДВУХ ПОЛИНОМОВ ВИДА

$$S_{k+1}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \alpha^0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^1 & \alpha^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \alpha^0 \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{k+1} \mid \overbrace{\begin{matrix} \beta^0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta^1 & \beta^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \beta^0 \\ \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & & \vdots \\ 0 & \beta^{n-1} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{k+1} \end{pmatrix},$$

где  $S_{k+1}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 2(k+1)}$ ,  $\alpha(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i s^i$ ,  $\beta(s) = \sum_{i=0}^{\deg \beta} \beta^i s^i$ ,  $\beta^i = 0$  при  $i > \deg \beta$ .

Далее формулируется основной результат раздела:

**Теорема 1.** Пусть у управляемой и наблюдаемой системы (1.1) вход и выход скалярные ( $r = l = 1$ ). Для системы (1.1) тогда и только тогда существует стабилизатор размерности  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 2$ ), когда среди решений системы уравнений

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n+k+1} \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{n+k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-k} & f_{n-k+1} & \dots & f_{2n-2} \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \vdots \\ \gamma^{n+k-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

порождаемой единственным линейно независимым решением  $f = (f_1, \dots, f_{2n-1})$  уравнения  $f \cdot S_{n-2}(\alpha, \beta) = 0$  с матрицей типа Сильвестра, существует устойчивое решение  $\tilde{\gamma} = (\gamma^0, \dots, \gamma^{n+k-1}, 1)^T$  (т.е. отвечающее устойчивому полиному  $\gamma(s) = \gamma^0 + \gamma^1 s + \dots + \gamma^{n+k-1} s^{n+k-1} + s^{n+k}$ ).

На его основе построен алгоритм синтеза минимального стабилизатора, который демонстрируется на нескольких примерах. Результаты раздела опубликованы в работе [2].

**В подразделе 3.3.1** приведены примеры построения минимального стабилизатора для нескольких скалярных динамических систем.

**В разделе 3.4** рассмотрены MISO-системы и SIMO-системы, т.е. случаи  $r \geq 1, l = 1$  и  $r = 1, l \geq 1$ . Изложение, в силу аналогичности, проводится только для MISO-систем ( $r \geq 1, l = 1$ ). Передаточные функции исходной системы (1.9) и стабилизатора (1.10) имеют вид:

$$W(s) = \frac{\left( \beta_1(s) \ \dots \ \beta_r(s) \right)}{\alpha(s)}, \quad H(s) = \frac{\left( \phi_1(s) \ \dots \ \phi_r(s) \right)^T}{\psi(s)}.$$

Показано, что в данном случае характеристический полином замкнутой системы имеет вид  $\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \sum_{i=1}^r \phi_i(s)\beta_i(s)$ . Вид характеристического полинома  $\gamma(s)$  приводит к рассмотрению матриц Сильвестра  $S_{k+1}(\alpha, \beta_1(s), \dots, \beta_r(s))$  для семейства полиномов  $\alpha(s)$  и  $\beta_i(s)$  вида (1.12).

Опираясь на понятие квадратной обобщенной матрицы Сильвестра для семейства полиномов, введенное в Приложении А, вида

$$S_{bar} = \left( \begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha^0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^1 & \alpha^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\bar{k}} & \overbrace{\begin{matrix} \beta_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1^1 & \beta_1^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_1^{n-1} & & \vdots \\ 0 & \beta_1^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1^n \end{matrix}}^{q_1} & \overbrace{\begin{matrix} \beta_r^0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_r^1 & \beta_r^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_r^n & \beta_r^{n-1} & & \vdots \\ 0 & \beta_r^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_r^n \end{matrix}}^{q_r} \end{array} \right),$$

построены вектора  $f_i$ , являющиеся аналогом вектора  $f$  из условия Теоремы 1 для скалярного случая. Здесь числа  $\bar{k}$  и  $q_i$  связаны соотношением  $\bar{k} \geq q_i$  и

$\sum_{i=1}^r q_i = n$  и вычисляются в процессе построения матрицы  $S_{bar}$ , который описан в Приложении А.

Из векторов  $f_i$  построена матрица

$$F_{k+1} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n+k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1,q_1-k-1} & f_{1,q_1-k} & \cdots & f_{1,n+q_1-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r,1} & f_{r,2} & \cdots & f_{r,n+k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r,q_r-k-1} & f_{r,q_r-k} & \cdots & f_{r,n+q_r-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k+1-\text{rank } S_{k+1}) \times (n+k+1)}, \quad (1.15)$$

$r$  строчных блоков которой, по аналогии со скалярным случаем, имеют ганкелеву структуру. Для матрицы  $F_{k+1}$  доказано основное утверждение этого раздела

**Теорема 2.** Пусть дана управляемая и наблюдаемая динамическая система (1.1) и  $r \geq 1$ ,  $l = 1$ . Стабилизатор (1.2) размерности  $k$  существует тогда и только тогда, когда найдется устойчивый полином  $\gamma(s)$ ,  $\deg \gamma = n+k$ , коэффициенты  $\tilde{\gamma}$  которого удовлетворяют системе уравнений

$$F_{k+1} \tilde{\gamma} = 0, \quad (1.16)$$

где  $F_{k+1}$  имеет вид (1.15).

На основе Теоремы 2 построен алгоритм синтеза минимального стабилизатора, работа которого демонстрируется на примере в подразделе 3.4.1 для одной векторной динамической системы.

Результаты раздела опубликованы в работе [5].

**В разделе 3.5** исследована самая общая постановка задачи минимальной стабилизации, когда  $r \geq 1$ ,  $l \geq 1$ , т.е. число входов и выходов произвольно.

Для исследования этого случая привлечен аппарат дробно-матричного представления (ДМП) передаточных функций (ПФ). Именно, ПФ исходной системы и стабилизатора представлены в виде

$$W(s) = \mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{B}(s), \quad H(s) = \Phi(s)\Psi^{-1}(s), \quad (1.17)$$

где  $\det[\Psi(s)] = \psi(s)$  и  $\det[\mathcal{A}(s)] = \alpha(s)$  — характеристические полиномы стабилизатора и исходной системы соответственно. Введены обозначения  $\mu_i(\mathcal{A})$  — максимальная степень полинома в  $i$ -й строке полиномиальной матрица  $\mathcal{A}(s)$ ,  $\nu_j^c(\Psi)$  — максимальная степень полинома в  $j$ -м столбце полиномиальной матрица  $\Psi(s)$ . Показано, что для полиномиальных матриц в (1.17) имеют место представления  $\mathcal{A} = \text{diag}(s^{\mu_1}, \dots, s^{\mu_l}) + \mathcal{A}_r(s)$  и  $\Psi(s) = \Psi_{lc} \text{diag}(s^{\nu_1^c}, \dots, s^{\nu_l^c}) + \Psi_r(s)$ , где  $\mu_i = \mu_i(\mathcal{A}) > \mu_i(\mathcal{B})$  и  $\nu_j^c = \nu_j^c(\Psi) \geq \nu_j^c(\Phi)$ , т.е. строчные степени матрицы  $\mathcal{A}(s)$  строго больше соответствующих строчных степеней матрица  $\mathcal{B}(s)$  и столбцовые степени матрица  $\Psi(s)$  не меньше, чем соответствующие столбцовые степени  $\Phi(s)$ . Кроме того, выполнены неравенства  $\mu_{i+1} \geq \mu_i$ , где  $\mu_l = \mu$  — индекс наблюдаемости исходной системы (1.1).

Опираясь на представление (1.17), была получена ПФ замкнутой системы  $W_f(s) = \Psi(s)\Gamma(s)^{-1}\mathcal{B}(s)$ , где

$$\Gamma(s) = \mathcal{A}(s)\Psi(s) + \mathcal{B}(s)\Phi(s), \quad \gamma(s) = \det \Gamma(s), \quad \deg \gamma(s) = n + k, \quad (1.18)$$

$\gamma(s)$ , как и ранее, характеристический полином замкнутой системы.

С помощью обозначений  $\nu^c = \max_i \{\nu_i^c\}$ ,  $\mathcal{A}(s) = \sum_{i=0}^{\mu} \mathcal{A}_i \cdot s^i$ ,  $\mathcal{B}(s) = \sum_{i=0}^{\mu-1} \mathcal{B}_i \cdot s^i$ ,  $\Psi(s) = \sum_{i=0}^{\nu^c} \Psi_i \cdot s^i$  и  $\Phi(s) = \sum_{i=0}^{\nu^c-1} \Phi_i \cdot s^i$ , матричное полиноми-

альное уравнение (1.18) представлено в виде уравнения

$$\underbrace{\left( \begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{\mathcal{A}_0 \ \dots \ 0}^{\nu^c+1} & & & \overbrace{\mathcal{B}_0 \ \dots \ 0}^{\nu^c+1} & & \\ \mathcal{A}_1 \ \dots \ 0 & & & \mathcal{B}_1 \ \dots \ 0 & & \\ \vdots \ \ddots \ \vdots & & & \vdots \ \ddots \ \vdots & & \\ \mathcal{A}_{\mu-1} & & \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_{\mu-1} & & \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{A}_\mu & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathcal{A}_{\mu-1} & \vdots & \ddots & \mathcal{B}_{\mu-1} \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_\mu & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)}_{S_{\nu^c+1, \nu^c+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Phi} \end{pmatrix} = \tilde{\Gamma}, \quad (1.19)$$

где  $\tilde{\Gamma} = \left( \Gamma_0^T \ \Gamma_1^T \ \dots \ \Gamma_{\nu^c+\mu-1}^T \ \Gamma_{\nu^c+\mu}^T \right)^T$ , матрицы  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$  определяются аналогично  $\tilde{\Gamma}$ ;  $S_{\nu^c+1, \nu^c+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  — матрица Сильвестра для полиномиальных матриц  $\mathcal{A}(s)$  и  $\mathcal{B}(s)$ . Указано, что в матрице  $S_{\nu^c+1, \nu^c+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  присутствует по крайней мере  $\sum_{i=1}^l (\mu - \mu_i)$  нулевых строк.

Проведено исследование свойств матриц типа  $S_{\nu^c+1, \nu^c+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . В частности, построен аналог квадратной обобщенной матрицы Сильвестра  $S_{bar}^l$ , на основе которой получены вектора  $f_i$ . Из полученных векторов  $f_i$ , составлена матрица

$$F_{\nu^c+1} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,(\mu+\nu^c+1)l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1,(q_1-\nu^c-2)l+1} & f_{1,(q_1-\nu^c-2)l+2} & \dots & f_{1,(\mu+q_1-1)l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r,1} & f_{r,2} & \dots & f_{r,(\mu+\nu^c+1)l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r,(q_r-\nu^c-2)l+1} & f_{r,(q_r-\nu^c-2)l+2} & \dots & f_{r,(\mu+q_r-1)l} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Рассуждения завершаются основным результатом.

**Теорема 3.** Для системы (1.1) найдется стабилизатор (1.2) размерности  $k$  тогда и только тогда, когда для какого-либо набора чисел  $\nu_1^c, \nu_2^c, \dots, \nu_l^c$ , такого, что  $\sum_{i=1}^l \nu_i^c = k$ , из решений  $\tilde{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{(\mu+\nu^c+1)l \times 1}$  систем уравнений  $F_{\nu^c+1} \tilde{\Gamma}_i = 0$ , ( $i$ -ое решение с единицей в строке с номером  $(\mu_i + \nu_i^c)l + i$  и нулями в строках с номерами  $dl + z$ ,  $z = \overline{1, i-1}$ ,  $d = \overline{\mu_z + \nu_i^c, \mu + \nu^c}$  и  $dl + z$ ,  $z = \overline{i, l}$ ,  $t = \overline{\mu_z + \nu_i^c + 1, \mu + \nu^c}$ ), можно составить матрицу  $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}_1 \dots \tilde{\Gamma}_l)$ , соответствующую устойчивому полиному

$$\gamma(s) = \det [\Gamma(s)]. \quad (1.21)$$

Здесь матрица  $F_{\nu^c+1}$  имеет ганкелеву структуру (1.20).

На основе Теоремы 3 сформулирован алгоритм поиска минимального стабилизатора. Результаты этого раздела опубликованы в работах [3, 4].

**В подразделе 3.5.1** приведен пример поиска минимального стабилизатора для одной квадратной динамической системы с двумя входами и выходами.

**В четвертой главе** приведены численные методы решения задачи пересечения линейного многообразия, описываемого системами уравнений (1.14) или (1.16), либо некоторого нелинейного множества, описываемого уравнением (1.21), с множеством устойчивых полиномов в пространстве полиномов.

**В разделе 4.1** рассмотрено применение символьного метода решения неравенств от многих переменных с целочисленными коэффициентами, реализованного в программе QEPSCAD и доступного в среде Internet по адресу: <http://www.usna.edu/cs/~qepscad/B/QEPSCAD.html>.

**В подразделе 4.1.1** рассмотрен пример решения одной задачи с помощью программы QEPSCAD.

**В разделе 5.1** задача, рассматриваемая в главе, сводится к задаче ми-

нимизации с ограничениями вида

$$\min_{t, x_i: \Delta_{n+k}(\tilde{\gamma}(x))t^2-1=0} \left\{ (\tau - t)^2 + \sum_{i=1}^p (x_i - x_{i0})^2 \right\}, \quad (1.22)$$

где  $t$ ,  $x = (x_1, \dots, x_p)$  — переменные минимизации,  $\tau$ ,  $x_{i0}$  — произвольные числа;  $\tilde{\gamma}(x)$  — решение системы уравнений (1.14) (или (1.16)), записанное через фундаментальную систему решений в виде  $\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\gamma}_0 + Gx$ , где  $G \in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times p}$ ;  $\Delta_{n+k}(\tilde{\gamma}(x))$  — определитель матрицы Гурвица [1], записанной для полинома  $\gamma(s)$  с коэффициентами из столбца  $\tilde{\gamma}(x)$ . В свою очередь задача минимизации (1.22) в соответствии с работой [2] эквивалентна решению системы полиномиальных уравнений вида

$$\begin{cases} t^2 \Delta_{n+k}(\tilde{\gamma}(x)) - 1 = 0, \\ 2(x_i - x_{i0}) - (t - \tau)t^3 \frac{\partial \Delta_{n+k}(\tilde{\gamma}(x))}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, p}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Систему полиномиальных уравнений решается гомотопными методами, реализованными в программе HOM4PS-2.0, доступной в среде Internet по адресу: [http://hom4ps.math.msu.edu/HOM4PS\\_soft.htm](http://hom4ps.math.msu.edu/HOM4PS_soft.htm).

**В подразделе 5.1.1** приведен пример синтеза минимального стабилизатора для одной векторной системы с одним входом и двумя выходами.

**В разделе 6.1** рассматриваемая в главе задача сводится к решению системы полиномиальных неравенств, при это предполагается, что коэффициенты характеристического полинома  $\gamma(s)$  лежат в определенных интервалах. Приведен метод решения полиномиальных неравенств на ограниченном множестве, опирающийся на метод ветвей и границ с применением полиномов Бернштейна. Полином вида

$$h(x) = \sum_{i=0}^n h_i \cdot C_n^i \cdot x^i \cdot (1 - x)^{n-i},$$

где  $x \in \mathbb{R}$ , называется полиномом Бернштейна или полиномом в форме Бернштейна. В многомерных случаях, т.е. когда  $x \in \mathbb{R}^q$ , полином Бернштейна

имеет вид:

$$h(x) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq n_1 \\ \vdots \\ 0 \leq i_q \leq n_q}} h_{i_1, \dots, i_q} \cdot C_{n_1}^{i_1} \cdot x_1^{i_1} (1 - x_1)^{n_1 - i_1} \cdot \dots \cdot C_{n_q}^{i_q} \cdot x_q^{i_q} (1 - x_q)^{n_q - i_q},$$

где  $n_i$  — максимальная степень, в которой встречается переменная  $x_i$  в полиноме  $h(x)$ .

Описаны свойства полиномов Бернштейна и рекурсивный алгоритм решения полиномиальных неравенств на ограниченном множестве.

**В подразделе 6.1.1** приведен пример решения задачи минимальной стабилизации с наличием ограничений на коэффициенты характеристического полинома  $\gamma(s)$  замкнутой системы.

**В Заключение** приведены основные результаты: три критерия существования стабилизатора фиксированной размерности, алгоритмы синтеза стабилизатора минимальной размерности, численные методы решения задачи о пересечении линейного многообразия с множеством устойчивых полиномов в пространстве коэффициентов полиномов, также введено обобщение матрицы Сильвестра для семейства полиномов, на основе которого был сформулирован критерий существования общих корней у семейства полиномов.

**В Приложении А** приведено исследование матриц типа Сильвестра. В частности, введены понятия обобщенной матрицы Сильвестра (ОМС) и квадратной обобщенной матрицы Сильвестра. Приведен алгоритм построения квадратной обобщенной матрицы Сильвестра (КОМС), сопровождаемый примером. Доказано одно свойств последних строк в блоках КОМС, которое используется для рассуждений в векторных и матричных системах.

**В Приложении В** приведены вспомогательные и дополнительные результаты. В частности, доказан критерий существования общих корней у семейства полиномов:

**Теорема 4.** Семейство полиномов  $\alpha(s), \beta_1(s), \dots, \beta_l(s)$  имеет ровно  $k$  общих корней (с учетом кратности) тогда и только тогда, когда ранг ОМС этого семейства равен  $n + m - k$ , т.е.

$$\text{rank } S(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l) = n + m - k,$$

где  $S(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l)$  — обобщенная матрица Сильвестра для семейства полиномов  $\alpha(s)$  и  $\beta_i(s)$ ;  $\deg \alpha = n$ ,  $m = \min_{1 \leq i \leq l} \{\deg \beta_i\}$ .

Результаты этого раздела опубликованы в работе [6].

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Сергею Константиновичу Коровину за постановку задачи и постоянное внимание и ценные советы в работе над диссертацией, а также Фомичеву Василию Владимировичу за помощь в исследовании тематики задачи минимальной стабилизации и оформлении текста диссертации.

## Список публикаций

1. Капалин И. В. Верхние оценки размерности стабилизатора для линейных конечномерных систем // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2011. № 2. С. 13–19.
2. Капалин И. В., Фомичев В. В. О построении минимальных стабилизаторов для скалярных систем // Нелинейная динамика и управление. 2009. Т. 7. С. 37–52.
3. Коровин С. К., Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. 2011. Т. 441, № 5.
4. Капалин И. В. Минимальная стабилизация динамических систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 8. С. 1214–1216.

5. Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальная стабилизация векторных (MISO и SIMO) систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1573–1582.
6. Капалин И. В., Фомичев В. В. Свойства обобщенной матрицы Сильвестра // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2011. № 3. С. 16–23.

## **Цитированная литература**

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1967. С. 508–512.
2. Gutman S., Chojnowski F. Fixed and Minimal Order Compensators // IMA J. Math. Control Inform. 1991. Vol. 7, no. 4. Pp. 361–373.