Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Гончаров Олег Игоревич

# АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в *кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.*

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | *доктор технических наук,*<br>*академик РАН, профессор,*<br>*Коровин Сергей Константинович* |
| Официальные оппоненты: | *доктор физико-математических наук,*<br>*профессор,*<br>*Крищенко Александр Петрович*<br>*доктор физико-математических наук,*<br>*профессор,*<br>*Арутюнов Арам Владимирович* |
| Ведущая организация: | *Институт системного анализа РАН* |

Защита состоится «____» _____________ 2012 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____» _____________ 2012 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,
*доктор физико-математических наук,*
*профессор* *Захаров Евгений Владимирович*

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы** Билинейными системами (биафинными системами) называют динамические системы вида

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i (A_i x + b_i), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u = (u_1, \ldots, u_m)^T$ — управление, $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — постоянные матрицы. Если вектор-столбцы $b_i$ нулевые, то системы называются билинейными (однородными билинейными):

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=0}^{m} u_i A_i x. \tag{2}$$

В общем случае систему (1) можно свести к системе (2) на многообразии (например, см. [1, разд. 3.8]). В дальнейшем будем называть системы вида (1) биафинными, а системы (2) — билинейными.

Впервые как отдельный класс билинейные системы были введены в монографии [2]. С одной стороны, их можно рассматривать как простейший, во многом близкий к линейным, класс нелинейных систем, что позволяет использовать методы линейной теории. Билинейные системы также обладают полезными алгебраическими свойствами [3], [1, гл. 2]. С другой стороны, они позволяют аппроксимировать поведение нелинейных систем достаточно общего вида с произвольной точностью ([4], [5]).

Как правило билинейные системы возникают при линеаризации нелинейных систем в окрестности точки равновесия. Существует большое количество физических, химических и биологических процессов, описываемых билинейными системами. Распространенность билинейных моделей в химии обусловлено тем, что закон действующих масс имеет, вообще говоря, билинейный характер (скорость реакции одновременно пропорциональна концентрациям реагентов и катализатора). В биологии билинейными уравнениями описывается базовая модель "хищник-жерва", процессы диффузии в клеточной мембране, газообмен. Примерами билинейных систем в физике являются электродвигатель с управлением по силе тока в обмотке возбуждения, процессы теплообмена, дистилляция, процессы управляемого деления ядра.

Билинейные системы остаются достаточно сложным объектом для изучения. До сих пор отсутствуют конструктивные критерии управляемости, отсутствуют единые методы построения стабилизаторов, в общем случае не выполнен принцип разделения задачи стабилизации и наблюдения, т.е. невозможно осуществить синтез наблюдателей независимо от регулятора.

В литературе рассматривались различные подходы к задаче стабилизации систем (1) и (2). В простейшем случае возможно использование постоянных управлений, однако, возможности этого метода сильно ограничены.

Для решения задачи использовались и линейные законы управления [6], [7], [8]. Подстановка линейной обратной связи в уравнение (2) превращает его в систему дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью [9], [10].

Во многих работах рассматривались квадратичные и однородные законы управления. Обратная связь такого рода решает задачу стабилизации (экспоненциальной в случае однородного закона управления), если матрица $A_0$ нейтральна (вещественные части всех собственных значений равны нулю) и множество $N$, на котором управление обнуляется, не является инвариантным множеством системы (2) [11], [12]. При определенных условиях возможно обобщение этого метода на системы с неустойчивой матрицей $A_0$ [13].

Стабилизующее управление для (2) можно строить используя методы теории оптимального управления (например, [12], [14], [15]). В этом случае могут возникать как и квадратичные, так и разрывные законы управления (bang-bang control).

Как правило при рассмотрении задачи стабилизации билинейной системы предполагается, что фазовый вектор известен полностью, однако, на практике такое предположение выполнено не всегда, чаще всего известен некоторый линейный функционал от вектора состояния $x$ системы (1):

$$y = Cx, \tag{3}$$

где $y \in \mathbb{R}^l$, $l < n$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ — известная матрица. Задача восстановления вектора состояния билинейной системы имеет различные постановки. Одной из наиболее важных и тесно связанной с задачей стабилизации является задача равномерного наблюдения. Требуется построить динамическую систему (наблюдатель), восстанавливающую по выходу $y$ и входу $u$ системы (1)–(3) неизвестный фазовый вектор $x$. При этом не накладывается никаких ограничений на вход $u(t)$, кроме, быть может, его ограниченности. В общем случае билинейная система может оказаться ненаблюдаема при определенных входных воздействиях [16], и для построения равномерного наблюдателя приходится накладывать определенные ограничения на структуру системы [17].

Существуют различные подходы к синтезу равномерных наблюдателей. В [18], [16] предлагается использовать наблюдатель Калмана, размерность наблюдателя при этом получается $n(n + 1)$. Предложены методы, основанные на использовании линейных матричных неравенств (LMI) для построения наблюдателя, при этом вход предполагается ограниченным, а для обоснования асимптотической устойчивости динамики ошибки используется метод Ляпунова [19], [20]. При выполнении определенных алгебраических условий возможно исключение нелинейности из уравнений, описывающих динамику ошибки [21], [22], [23]. Существуют подходы, основанные на использовании иерархии коэффициентов обратной связи [24, с. 162].

Из краткого обзора литературы видно, что хотя существуют различные подходы к решению задачи стабилизации билинейной системы, применимость большинства из них ограниченна определенными классами систем при отсутствии сколько-нибудь общей теории. Новые подходы к стабилизации билинейных систем представляют существенный теоретический и практический интерес.

**Цель диссертационной работы** Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов синтеза регуляторов для однородных билинейных систем, обеспечивающих асимптотическую устойчивость нулевого решения. Разработка алгоритмов синтеза равномерных наблюдателей для билинейных систем.

**Научная новизна** В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Предложен метод стабилизации однородных билинейных систем специального вида при помощи статической обратной связи переменной структуры.

2. Предложены алгоритмы построения стабилизирующих регуляторов для билинейных систем различного вида на основе метода трансверсальных функций.

3. Найдено достаточное условие существования и алгоритм построения периодического стабилизирующего управления по открытому контуру.

4. Предложен метод построения наблюдателя скалярных и векторных билинейных систем.

**Практическая значимость** Полученные результата допускают практическое применение при синтезе алгоритмов управления для различных объектов, описываемых билинейными системами, могут быть использованы в дальнейших теоретических исследованиях.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. Алгоритм стабилизации однородных билинейных систем специального вида при помощи статической обратной связи переменной структуры.
2. Алгоритмы построения стабилизирующих регуляторов для билинейных систем различного вида на основе метода трансверсальных функций.
3. Достаточное условие существования и алгоритм построения периодического стабилизирующего управления по открытому контуру.
4. Алгоритм синтеза наблюдателя, основанного на иерархии коэффициентов обратной связи, для скалярных и векторных билинейных систем.

**Апробация работы** Основные результаты работы и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах.

1. На Второй традиционной всероссийской молодежной летней школе "Управление, информация и оптимизация" (Переславль-Залесский, Россия, 2010).
2. На конференции "Тихоновские чтения" (Москва, Россия, 2011 г.)
3. На научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление" под руководством академиков РАН С.В. Емельянова и С.К. Коровина (Москва, Россия, 2010-2011);
4. На научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия, 2010-2011);

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах.

**Структура и объем диссертации** Диссертация содержит 127 страниц текста, состоит из введения, обзора литературы, 3-х глав, одного приложения и библиографии.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** рассматривается задача стабилизации билинейной системы специального вида при помощи обратной связи переменной структуры.

В **разделе 1.1** рассмотрена билинейная система специального вида. Предполагается, что билинейная система (2) приводится к специальному виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B(x)u, \end{cases} \tag{4}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$ — части фазового вектора, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ — матрицы подходящей размерности, а входная матрица $B(x)$ имеет вид $B(x) = [B_1x, B_2x, \ldots, B_mx]$, $B_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Для решения задачи стабилизации предлагается использовать замену входа

$$u = B(x)^{-1}v, \tag{5}$$

формально приводящую систему (4) к линейному виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + v. \end{aligned} \tag{6}$$

Если предположить, что система (6) управляема, то существует обратная связь $v = Kx$, обеспечивающая ее асимптотическую устойчивость, тогда в качестве управления для (4) можно использовать

$$u = B^{-1}(x)Kx. \tag{7}$$

Однако, такое управление неприменимо на множестве $N$, где происходит вырождение матрицы $B(x)$:

$$N = \{x | \det B(x) = 0\} \tag{8}$$

Более того, управление (7) будет неограниченно возрастать при приближении к множеству $N$, поэтому введем множество $N_\rho$, которое будем использовать как индикатор “близости” к $N$:

$$N_\rho = \{x : d(x, N) \le \rho \|x\|_2\}. \tag{9}$$

Здесь символом $d(x, N)$ обозначено расстояние от точки $x$ до множества $N$: $d(x, N) = \inf_{y \in N} \|x - y\|_2$.

Рассмотрим управление

$$u = \begin{cases} B^{-1}(x)Kx, & \text{при } x \notin N_\rho, \\ k(x), & \text{при } x \in N_\rho, \end{cases} \tag{10}$$

где $k(x)$ — некоторая обратная связь по состоянию.

Пусть выполнены следующие предположения:

**П.1** Матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такова, что система (6), замкнутая обратной связью (7) асимптотически устойчива.

**П.2** Вектор-функция $k(x)$ является однородной функцией нулевой степени ($k(\lambda x) = k(x)$ при любом $\lambda > 0$), ограничена, возможно, разрывна.

При подстановке управления (10) в уравнение (4) получим систему с переменной структурой

$$\dot{x} = f_\rho(x), \text{ где } f_\rho(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{при } x \notin N_\rho, \\ f_2(x), & \text{при } x \in N_\rho. \end{cases} \tag{11}$$

где векторное поле $f_1(x)$ получено подстановкой в правую часть уравнения (4) управления (7), а $f_2(x)$ — подстановкой $u = k(x)$ в уравнение (4). Заметим, что поле $f_1(x)$ линейно, т.е. имеет вид $f_1(x) = F_1 x$ в области определения и по непрерывности может быть доопределено на множество $N$.

Рассмотрим дифференциальное включение (при помощи дифференциальных включений вводится понятие решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью [25, гл. 2] )

$$\dot{x} \in F_{12}(x), \text{ где } F_{12}(x) = \mathrm{co}(\{f_1(x)\} \cup M_{f_2}(x)), \tag{12}$$

где $M_f(x)$ — множество предельных точек отображения $f(x)$ в точке $x$, $\mathrm{co}(M_f(x))$ — выпуклое замыкание.

Пусть дополнительно к предположениям П.1–П.2 выполнено следующие условие:

**П.3 Условие неинвариантности множества $\mathbf{N}_\rho$.** У дифференциального включения (12) не существует решения, имеющего участок, лежащий во множестве $N$.

В предположениях П.1–П.3 доказывается следующая основная теорема

**Теорема 1.** *Пусть выполнены предположения П.1–П.3. Тогда при достаточно малом $\rho$ система (11) будет глобально асимптотически устойчива, и обратная связь (10) решает задачу стабилизации системы (4).*

В **разделе 1.2** хорошо известный результат (см., например,[1, с. 106]) о стабилизации билинейной системы с нейтральной матрицей при помощи однородной обратной связи доказывается с использованием техники из раздела 3.1.

В **разделе 1.3** рассматривается задача проверки условия П.3. Предложено простое достаточное условие и алгоритм проверки выполнения условия П.3.

В **разделе 1.4** приведены результаты численного моделирования билинейной динамической системы, замкнутой обратной связью (10).

Результаты первой главы опубликованы в работе [**?** ].

**Во второй главе** рассматривается задача стабилизации билинейной системы общего вида (2). Для построения стабилизирующей обратной связи применяется метод трансверсальных функций [26].

В **разделе 2.1** изложена основная идея предлагаемого метода, приведены поясняющие примеры.

В **разделе 2.2** кратко излагается метод трансверсальных функций [26], приведено определение трансверсальной функции, формулировка теоремы о ее существовании.

В **разделе 2.3** метод трансверсальных функций применяется для преобразования билинейной системы (2). С входными матрицами $A_1, \ldots, A_m$ связывается матричная алгебра Ли $\mathfrak{g}_\beta = \mathrm{Lie}\{A_1, \ldots, A_m\}$ с базисом $A_1, \ldots, A_l$. Размерность алгебры $\mathfrak{g}_\beta$ равна $l$, $l \geq m$. Рассматривается матричная система

$$\dot{X} = A_0 X + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i X, \quad X(0) = I. \tag{13}$$

Множество достижимости этой системы образует множество переходных матриц билинейной системы (2). Если $A_0 = 0$ (система без свободного члена), то множество переходных матриц совпадает с матричной группой Ли $G_\beta$, алгеброй Ли группы $G_\beta$ является $\mathfrak{g}_\beta$. Если же $A_0 \neq 0$, то множество переходных матриц является полугруппой.

Согласно [26], для векторных полей $A_i X : G_\beta \to \mathfrak{g}_\beta$, $i = \overline{1, m}$ можно построить трансверсальную функцию $F(\theta) : \mathbb{T}^{l-n} \to G_\beta$, определенную на торе $\mathbb{T}^{l-n}$ размерности $l - n$.

Можно сформулировать следующую основную теорему:

**Теорема 2.** *Пусть в билинейной системе (2) матрицы* $A_1, \ldots, A_m$ *неза-*

*висимы, множество переходных матриц соответствующей системы без свободного члена* $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i A_i x$ *является группой Ли* $G_\beta$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}_\beta = \mathrm{Lie}\{A_1, \dots, A_m\}$ *размерности* $l$*, матрицы* $A_1, \dots, A_l$ *образуют базис алгебры* $\mathfrak{g}_\beta$*. Пусть* $F(\theta) : \mathbb{T}^{l-n} \to G_\beta$ *— трансверсальная функция для* $A_1, \dots, A_m$*, определенная на торе* $\mathbb{T}^{l-m}$ *размерности* $l - m$*.*

*Тогда*

- *Существует функция* $u(\theta, v) : \mathbb{T}^{l-m} \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ *такая, что замена координат* $\xi = F(\theta)^{-1} x$ *и преобразование входов* $u = u(\theta, v)$ *приводит систему (2) к виду*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F(\theta)^{-1} \left( A_0 + \sum_{i=1}^{l} v_i A_i \right) F(\theta) \xi, \\ \dot{\theta} &= u_{m+1,l}(\theta, v), \end{aligned} \tag{14}$$

  *где* $u_{m+1,l} = (u_{m+1}, \dots, u_l)^T$ *— последние* $l - m$ *компонент вектор-функции* $u(\theta, v)$*,* $v \in \mathbb{R}^l$ *— новый вход системы.*

- *Существует функция* $\tilde{u}(\theta, v) : \mathbb{T}^{l-m} \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ *такая, что замена координат* $\xi = F(\theta)^{-1} x$ *и преобразование входов* $u = \tilde{u}(\theta, w)$ *приводит систему (2) к виду*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left( F(\theta)^{-1} A_0 F(\theta) + \sum_{i=1}^{l} w_i A_i \right) \xi, \\ \dot{\theta} &= \tilde{u}_{m+1,l}(\theta, w), \end{aligned} \tag{15}$$

  *где* $w \in \mathbb{R}^l$ *— новый вход системы.*

В **разделе 2.4** перечислены различные алгоритмы синтеза стабилизирующих регуляторов для билинейных систем. Основная идея заключается в использовании Теоремы 2 для сведения задачи стабилизации (2) к задаче стабилизации (14) или (15). Т.к. у преобразованной системы присутствует дополнительно $l - m$ входов, то синтез регулятора для нее упрощается.

Приведены способы построения стабилизирующего регулятора в следующих случаях:

1. Для билинейной системы (2) выполнено ранговое условие алгебры Ли (Lie Algebra Rank Condition):

$$\operatorname{rank}\rho_x(\mathfrak{g}_\beta) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}A_1x & A_2x & \dots & A_lx\end{bmatrix} = n \text{ при любом } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0. \tag{16}$$

2. Существует симметричная положительно определенна матрица $K = K^T > 0$, такая что

$$\{\xi : \xi^T K A_i \xi = 0, i = \overline{1,l}\} = \{0\}. \tag{17}$$

3. Билинейная система (2) может быть приведена к виду подобному (4).

4. Для расширенной билинейной системы с $l$ входами

$$\dot{\xi} = A_0\xi + \sum_{i=1}^{l} w_i A_i \xi_i,$$

замкнутой обратной связью $w_i = w_i(\xi)$ существует квадратичная функция Ляпунова.

Отдельно выделяется случай, когда стабилизацию системы (2) можно осуществить без использования обратной связи (т.е. по открытому контуру).

**Теорема 3.** *Пусть существует такой набор постоянных $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_l$, что для некоторой константы $\gamma > 0$ выполнено равенство*

$$A_0 + \hat{v}_1 A_1 + \dots + \hat{v}_l A_l = -\gamma I, \tag{18}$$

*тогда существует периодическое управление $u(t)$, решающее задачу асимптотической стабилизации (2).*

Периодическое управление $u(t)$ может быть получено как решение системы дифференциальных уравнений, выписываемых в явном виде.

В **разделе 2.4** приведены результаты численного моделирования.

Результаты второй главы опубликованы в работе [**?** ] и [**?** ].

**В третьей главе** рассматривается задача построения равномерного наблюдателя для биафинной системы с линейным выходом. Алгоритм синтеза наблюдателей, основанный на иерархии коэффициентов обратной связи, приведенный в [24, с. 162] обобщается на более широкий класс систем, включая и векторные системы.

В **разделе 3.1** рассматривается случай скалярной билинейной системы (размерность выхода рана единице).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(Bx + d) \\ y = Cx. \end{cases} \tag{19}$$

Предполагается, что матрица $A$ приведена к канонической форме управляемости, матрица $B$ является нижнетреугольной, а $C = (1, 0, \dots, 0)$, т.е.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Данное предположение не ограничивает общности рассуждений, т.к. приводимость билинейной системы к виду (19) является критерием равномерной наблюдаемости.

Второе предположение заключается в ограниченности входного сигнала $u(t)$:

$$|u(t)| \leq u_0. \tag{22}$$

Предлагается использовать наблюдатель

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u(B\hat{x} + d) + L(y - C\hat{x}), \tag{23}$$

где $L$ представляет собой вектор-столбец коэффициентов обратной связи: $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$.

Имеет место следующая теорема:

**Теорема 4.** *Пусть в системе (19) матрицы $A$ и $B$ имеют вид (20); коэффициенты обратной связи $l_i$ наблюдателя (23) выбраны из условия*

$$\begin{gathered} l_i(\mu) = \mu^i \bar{l}_i + \tilde{l}_i(\mu), \\ \text{где } s^n + \bar{l}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{l}_n = \prod_{i=1}^{n} (s - \bar{\lambda}_i), \\ \bar{\lambda}_j < -1 \text{ вещественные и различные}; \end{gathered} \tag{24}$$

*известна мажоранта входа $u(t)$: $|u(t)| \leq u_0$.*

*Тогда при достаточно больших $\mu > 0$ (т.е. при всех $\mu > M$) ошибка наблюдения $e = x - \hat{x}$ будет экспоненциально стремиться к нулю, и будет иметь место неравенство*

$$\|e(t)\| \leq C(\mu) e^{-(\mu - \kappa)t}, \tag{25}$$

*где константа $\kappa$ не зависит от выбора коэффициента усиления $\mu$.*

В **разделе 3.2** Теорема 4 обобщается на случай системы с несколькими входами: $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $l > 1$. Предполагается, что пара $(C, A_0)$ приведена к одной из канонических форм наблюдаемости [24, с. 29], входная матрица $B$ разбивается на блоки, каждый из которых имеет нижнетреугольный вид. Наблюдатель имеет вид (23), однако, $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Строится иерархия коэффициентов, сходная с (24).

Результаты третьей главы опубликованы в работе [**?** ].

**В приложении А** излагается метод трансверсальных функций [26].

**В Заключении** перечислены результаты, выдвигаемые на защиту.

## Список публикаций


[] *О. И. Гончаров.* Асимптотическая стабилизация некоторого класса билинейных систем с использованием обратной связи переменной структуры // *Дифференциальные уравнения.* — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1564–1572.

[] *О. И. Гончаров.* Метод трансверсальных функций в задачах стабилизации билинейных систем // *Дифференциальные уравнения.* — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 102–116.

[] *О. И. Гончаров.* Использование метода трансверсальных функций для решения задачи стабилизации билинейных систем // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва МГУ имени М.В. Ломоносова, 14 июня 2011 г.: Тезисы докладов. — Москва: МАКС Пресс, 2011.

[] *О. И. Гончаров, В. В. Фомичев.* Наблюдатели для многосвязных систем с произвольным относительным порядком // Нелинейная динамика и управление. Выпуск 8: Сборник статей / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина. — ФИЗМАТЛИТ, 2009.


## Цитированная литература


[1] *David L. Elliott.* Bilinear Control Systems. Matrices in Action, Ed. by S. Antman, J. Marsden, L. Sirovich. — Springer, 2009.

[2] *R. R. Mohler.* Bilinear Control Processes. — New York and London: ACADEMIC PRESS, 1973.

[3] *V. Jurdjevic, H. J. Sussmann.* Controllability on Lie groups // *J. Differ. Equ.* — 1972. — Vol. 12. — Pp. 313–329.

[4] *H. J. Sussmann.* Semigroup representation, bilinear approximation of input-output maps

and generalized input // Lect. Notes in Econom. and Math. Systems, Ed. by G. Marchesini, S. Mitter. — Berlin: Springler-Verlag, 1976. — Vol. 131. — Pp. 172–192.

[5] *A. Balakrishnan.* Are all nonlinear systems bilinear // Joint American Control Conference. — 1976.

[6] *S. Celikovsky.* On the stabilization of the homogeneous bilinear systems // *Control Lett.* — 1993. — Vol. 21. — Pp. 503–510.

[7] *Francesco Amato, Carlo Cosentino, Antonino S. Fiorillo, Alessio Merola.* Stabilization of Bilinear Systems Via Linear State-Feedback Control // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs.* — 2009. — Vol. 56, no. 1. — Pp. 76–80.

[8] *С. К. Коровин, В. В. Фомичев.* Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // *ДАН. Теория управления.* — 2004. — Т. 398, № 1. — С. 38–43.

[9] *V. Ye. Belozyorov.* Design of linear feedback for bilinear control systems // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* — 2002. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 493–511.

[10] *V. Ye. Belozyorov.* On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential equations // *Journal of Dynamical and Control Systems.* — 2005. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 329–351.

[11] *V. Jurdjevic, J. P. Quinn.* Controllability and stability // *J. Differential Equations.* — 1978. — no. 28. — Pp. 381–389.

[12] *M. Slemrod.* Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity // *SIAM J. Contr. Optim.* — 1978. — Vol. 16. — Pp. 131–141.

[13] *P. Gutman.* Stabilizing controllers for bilinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1981. — Vol. 26, no. 4. — Pp. 917–922.

[14] *E. P. Ryan.* Optimal Feedback Control of Bilinear Systems // *Journal of Optimization Theory and Applications.* — 1984. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 333–362.

[15] *Min-Shin Chen, Shia-Twu Tsao.* Exponential Stabilization of a Class of Unstable Bilinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2000. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 989–992.

[16] *J. P. Gauthier, I. Kupka.* A Separation Principle for Bilinear Systems with Dissipative Drift // *IEEE Tr. on AC.* — 1992. — Vol. 12, no. 37. — Pp. 1970–1974.

[17] *D. Williamson.* Observability of bilinear systems with application to biological control // *Automatica.* — 1977. — Vol. 13. — Pp. 243–250.

[18] *G. Bornard, N. Couenne, F. Celle.* Regularly persistent observers for bilinear systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences, New Trends in Nonlinear Control Theory. — 1988. — Pp. 130–140.

[19] *Y. Funahashi.* Stable estimator for bilinear systems // *Int. J. Control.* — 1979. — Vol. 29. — Pp. 181–188.

[20] *B. Tibken, E.P. Hofer, A. Sigmundethod.* The ellipsoid method for systematic bilinear observer design // Proc. Trinnal IFAC World Congress. — Chicago, USA: 1996.

[21] *S. Hara, K. Futura.* Minimal order state observers for bilinear systems // *International Journal of Control.* — 1976. — Vol. 24. — Pp. 705–718.

[22] *A. Hac.* Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems // *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* — 1992. — Vol. 114. — Pp. 556–562.

[23] *M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, M. Darouach.* On Disturbance Decoupled Observers for a Class of Bilinear Systems // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* — 1998. — Vol. 120, no. 3. — Pp. 371–377.

[24] *С. К. Коровин, В. В. Фомичев.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[25] *А.Ф. Филиппов.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Москва: Наука, 1985.

[26] *Pascal Morin, Cloud Samson.* Practical stabilization of driftless systems on Lie Groups: The transverse function approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2003. — Vol. 48, no. 9. — Pp. 1496–1508.