Московский физико-технический институт
(Государственный университет)

На правах рукописи

Филимонов Владислав Павлович

О покрытиях множеств в евклидовых пространствах

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена на кафедре дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института (государственного университета).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Райгородский Андрей Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Дольников Владимир Леонидович;
	доктор физико-математических наук, доцент Карасёв Роман Николаевич.
Ведущая организация:	Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН.

Защита диссертации состоится 17 мая 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/.

Автореферат разослан ___ апреля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.А.Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

В работе получены результаты, связанные с классической проблемой Борсука о разбиении множеств в $\mathbb{R}^m$ на части меньшего диаметра, с известной задачей Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе евклидова пространства, а также с задачей об оптимальных решётчатых покрытиях евклидовых пространств.

Проблема Борсука была сформулирована почти 80 лет назад[1], и в последние годы она стала одной из ключевых проблем в области комбинаторной геометрии и явилась источником возникновения множества новых идей и задач в рамках данного раздела науки[2,3,4,5]. Она заключается в отыскании минимального числа частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в пространстве. Из данной формулировки ясно, что проблема Борсука связана с известными задачами оптимальных разбиений, упаковок и покрытий множеств в различных пространствах[6]. Данная взаимосвязь проясняется в работах таких ученых, как

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20 (1933), 177 - 190.

[2] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.

[3] A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202 - 248.

[4] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Итоги науки и техники, сер. "Современная математика", 23 (2007), 147 - 164.

[5] А.М. Райгородский, *Об одной оценке в проблеме Борсука*, Успехи матем. наук, 54 (1999), N2, 185 - 186.

[6] Дж. Конвей и Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Москва, "Мир", 1990.

К.А. Рождерс[7], Р. Ранкин[8], Ж. Бургейн и Й. Линденштраусс[9] и многих других. Настоящая диссертация также посвящена исследованию задачи об оптимальных покрытиях множеств в евклидовых пространствах множествами меньшего диаметра, являющейся непосредственным обобщением проблемы Борсука, которое в 50-е годы XX века было предложено Х. Ленцем[10].

Вторая проблема, непосредственно связанная с результатами нашей работы, принадлежит нескольким авторам, из которых наибольшую роль в ее становлении сыграли Э. Нелсон[11], П. Эрдеш[12] и Г. Хадвигер[13]. Проблема заключается в нахождении наименьшего количества цветов, необходимых для такой раскраски метрического пространства, при которой расстояние между произвольными двумя одноцветными точками не может равняться некоторому наперед заданному числу. Данной задаче также более 60 лет, и ее популярность оромна[14,15,16]. При решении данной задачи была разработана техника, относящаяся к так называемым разбиениям Вороного и имеющая непосредственную взаимосвязь со знаменитыми статьями Г. Батлера[17], П. Эрдеша и К.А. Рождерса[18], Д. Лармана и К. Рождерса[19] и многими другими.

Наконец, задача об оптимальных решетчатых покрытиях также имеет более чем 70-летнюю историю и тесно связана с такими разделами алгебры

[7] C.A. Rogers, *Covering a sphere with spheres*, Mathematika, 10 (1963), 157 - 164.

[8] R. Rankin, *On the closest packing of spheres in n dimensions*, Ann. Math., 48 (1947), 1062 - 1081.

[9] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, *On covering a set in* $\mathbb{R}^d$ *by balls of the same diameter*, Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Lecture Notes in Math., 1469, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 138 - 144.

[10] H. Lenz, *Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinern Durchmesser*, Jahresbericht d. DMV Bd. 58, (1956), 87 - 97.

[11] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.

[12] L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.

[13] H. Hadwiger, *Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum*, Portugaliae Math., 4 (1944), 140 - 144.

[14] А. Сойфер, *Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее*, Матем. просвещение, Вып. 8, 2004.

[15] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[16] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

[17] G.J. Butler, *Simultaneous packing and covering in Euclidean space*, Proc. Lon. Math. Soc., Ser. 3, 25 (1972), N4, 721 - 735.

[18] P. Erdős, C.A. Rogers, *Covering space with convex bodies*, Acta Arithmetica, 7 (1962), 281 - 285.

[19] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.

и дискретной математики, как теория диофантовых приближений и неравенств[20] и теория кодирования[21].

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является решение следующих задач.

1. Улучшение известных оценок сверху и снизу величин

$$d_n^m = \sup d_n^m(\Phi),$$

   где супремум берётся по всем множествам Φ диаметра 1 в $\mathbb{R}^m$, а величина $d_n^m(\Phi)$ для произвольного ограниченного множества Φ в $\mathbb{R}^m$ и натурального числа n определяется следующим образом:

$$d_n^m(\Phi) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_n, \forall i \ \operatorname{diam} \Phi_i \leqslant x \right\}.$$

2. Исследование асимптотического поведения последовательностей $d_n^m(\Phi)$ для произвольных ограниченных множеств Φ.

Научная новизна полученных результатов

Все результаты диссертации являются новыми.

Практическая значимость полученных результатов

Диссертация носит теоретический характер. Она отвечает на ряд важных вопросов о покрытиях множеств, которые могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области комбинаторной геометрии, теории упаковок и теории кодирования.

[20] Дж. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, Москва, ИЛ, 1961.
[21] Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Москва, “Связь”, 1979.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Выполнены следующие неравенства:

$$d_5^2 \leqslant 0.6020, \quad d_6^2 \leqslant \sqrt{\frac{13}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right), \quad d_8^2 \leqslant 0.4456\,,$$

$$d_9^2 \leqslant \sqrt{\frac{32-2\sqrt{109}}{63}}, \quad d_{10}^2 \leqslant \frac{7}{10\sqrt{3}}, \quad d_{12}^2 \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

(**Теорема 1**)

2. Для каждого натурального n справедливо неравенство

$$d_{f(n)}^2 \leqslant \frac{2}{n\sqrt{3}}\,, \text{ где } f(n) = \begin{cases} 9k^2+9k+1, & n=3k+1; \\ 9k^2+15k+7, & n=3k+2; \\ 9k^2+3k+1, & n=3k. \end{cases}$$

Более того,

$$d_{f(9)-3}^2 = d_{88}^2 \leqslant \frac{2}{9\sqrt{3}}\,.$$

(**Теорема 2**)

3. Для всех натуральных n верно неравенство

$$d_{3n^2-3n+1-3\delta(m)}^2 \leqslant \frac{2}{3n-2}\,,$$

где $m \equiv m(n) = 4n - \left[2\sqrt{3}n - \frac{4}{\sqrt{3}}\right] - 6$, а

$$\delta(m) = \begin{cases} 0, & m \leqslant 0; \\ k^2, & m = 2k-1; \\ k(k+1), & m = 2k. \end{cases}$$

Более того, при $n = 14$

$$d_{3n^2-3n+1-3(\delta(m)+1)}^2 = d_{526}^2 \leqslant \frac{2}{3n-2} = 0.05.$$

(**Теорема 3**)

4. Для любого $0 < x \leqslant 1$ справедливо неравенство $d^2_{g(x)} \geqslant x$, где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1-x}{2x}\right]} \left[\frac{2\pi}{\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2\left(\frac{1}{2}-kx\right)^2}\right)} \right] - \varepsilon(x),$$

$$\text{причем } \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \left[\frac{1}{x}\right] = 2n-1, n \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(**Теорема 4**)

5. Для единичной окружности S_1 в $\mathbb{R}^3$ и произвольного натурального числа n справедливо неравенство

$$d^3_n(S_1) \geqslant \frac{2 \cdot \sqrt{n-1}}{n}.$$

(**Лемма 2**)

6. Для всех достаточно больших натуральных n и произвольного натурального m справедлива оценка

$$d^m_n < \left(2 \cdot \sqrt[m]{(n+1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\sqrt{m+1}}} \cdot \sqrt{\frac{3(m+1)}{\pi m(m+2)} - 2} \right)^{-1}.$$

7. Для произвольной размерности пространства m справедлива двойная асимптотическая оценка

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} < d^m_n < \frac{1+o(1)}{\sqrt[m]{n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi m(m+2)}{12(m+1)}} \cdot \sqrt[m]{\frac{\sqrt{m+1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}}.$$

8. Для произвольных ограниченных множеств Φ_1 и Φ_2 в $\mathbb{R}^m$, замыкания которых $[\Phi_1]$ и $[\Phi_2]$ измеримы по Жордану и имеют меры μ_1 и μ_2 соответственно, причём $\mu_2 \neq 0$, существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^m_n(\Phi_1)}{e^m_n(\Phi_2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{d^m_n(\Phi_1)}{d^m_n(\Phi_2)} = \sqrt[m]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

(**Теорема о площадях**)

9. Для произвольного ограниченного множества $\Phi \subset \mathbb{R}^m$, замыкание которого измеримо по Жордану, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} e_n^m(\Phi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{n} \cdot d_n^m(\Phi).$$

(**Теорема о пределе**)

Личный вклад соискателя

Все результаты диссертации получены соискателем самостоятельно.

Апробация результатов

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной конференции «Фестиваль комбинаторики и информатики» (Венгрия, 2008 г.), на международной конференции «Конечные и бесконечные множества» (Венгрия, 2011 г.), на кафедральном семинаре кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, на кафедральном семинаре кафедры дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий МФТИ, на семинаре профессора А.М. Райгородского в МГУ имени М.В. Ломоносова, на научном семинаре вычислительного центра имени А.А. Дородницына российской академии наук под руководством профессора К.В. Рудакова, а также на научном семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Опубликованность результатов

Результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[5] списка литературы. Всего по теме диссертации опубликовано 5 работ.

Структура и объем диссертации

В диссертации имеется введение, три главы, список литературы. Полный объем 115 страниц, из них 5 страниц занимает список литературы (66 наименований).

Краткое содержание диссертации

Во введении описаны три классические проблемы комбинаторной геометрии, непосредственно связанные с задачей, исследуемой в диссертации — проблема Борсука, задача о хроматическом числе евклидова пространства и задача об оптимальном решетчатом покрытии евклидовых пространств.

Даны определения величин

$$d_n^m(\Phi) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_n, \forall i \ \operatorname{diam}\Phi_i \leqslant x\right\},$$

$$d_n^m = \sup d_n^m(\Phi),$$

где супремум берётся по всем множествам Φ диаметра 1 в $\mathbb{R}^m$, а также

$$e_n^m(\Phi) = \sqrt[m]{n} \cdot d_n^m(\Phi).$$

Величина $d_n^m(\Phi)$ представляет собой точную нижнюю грань положительных чисел x, обладающих тем свойством, что множество Φ может быть полностью покрыто n множествами, диаметры которых не превосходят x.

Последовательности $d_n^m(\Phi)$ и $e_n^m(\Phi)$ называются соответственно *кодом деления* и *нормированным кодом деления* множества Φ.

Также приведены определения *универсального покрывающего множества* и *универсальной покрывающей системы множеств* в $\mathbb{R}^m$ как множества (системы множеств), которым (одним из множеств которой) можно полностью покрыть произвольное множество единичного диаметра в $\mathbb{R}^m$. Приведены примеры наиболее известных универсальных покрывающих множеств в двумерном и трехмерном пространствах. В частности, на двумерной плоскости универсальным покрывающим множеством является правильный шестиугольник с единичным расстоянием между противоположными сторонами.

Универсальные покрывающие множества и системы являются эффективным инструментом получения верхних оценок величин d_n^m, поскольку если возможно построить покрытие произвольного универсального покрывающего множества в $\mathbb{R}^m$ некоторым набором множеств, то очевидным образом аналогичное покрытие найдется и для произвольного множества единичного диаметра в $\mathbb{R}^m$.

Далее во введении приведен полный обзор известных точных и асимптотических оценок сверху и снизу величин d_n^m и $d_n^m(\Phi)$ в пространствах различных размерностей. Важнейшей оценкой снизу является

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} \leqslant d_n^m \, .$$

Для пространств размерностей больше трех данная оценка являлась единственной известной оценкой снизу. Кроме того, было доказано существование асимптотических оценок сверху вида

$$d_n^m \leqslant \frac{\phi(m)}{\sqrt[m]{n}}$$

для некоторых констант $\phi(m)$, однако явные значения величин $\phi(m)$ не были известны.

Улучшению подобных оценок, а также исследованию асимптотических свойств кодов деления посвящена настоящая диссертация.

В первой главе рассматривается случай двумерной плоскости. С использованием техники универсальных покрывающих множеств и систем получены оценки сверху величин $d_5^2 - d_{12}^2$. Для больших значений n (вплоть до $n = 1313$) оценки сверху получены при помощи замощения усеченного правильного шестиугольника паркетом из правильных шестиугольников. Всего оценки сверху улучшены для 112 различных значений n.

Также в первой главе описан *метод расслоения*, позволяющий получать оценки сверху величин $d_n^m(\Phi)$. Суть метода расслоения заключается в выделении в некотором наиболее удобном множестве Φ единичного диаметра набора подмножеств, удовлетворяющих свойству, что расстояние между любыми двумя точками различных подмножеств не меньше некоторой наперед заданной константы x. В этом случае для произвольного покрытия Φ множествами, диаметры которых меньше x, никакое множество покрытия не может иметь общие точки более чем с одним множеством расслоения. Поэтому количество множеств с диаметрами меньшими x, необходимых для покрытия Φ, не меньше, чем сумма аналогичных количеств множеств, необходимых для покрытия каждого из подмножеств расслоения по отдельности.

Для случая двумерной плоскости в качестве исходного множества наиболее удобно использовать круг единичного диаметра, а в качестве множеств расслоения — набор концентрических окружностей с радиусами, образующими арифметическую прогрессию с разностью x. Данный метод позволил улучшить известные оценки снизу величин d_n^2 для 55 различных значений n из диапазона $8 \leqslant n \leqslant 69$.

Основные результаты главы 1 сформулированы в *параграфе 1.1*. Это теоремы 1–4, которые приведены в пунктах 1–4 из раздела "Основные результаты, выносимые на защиту" настоящего автореферата. Они доказаны в *параграфе 1.2* и прокомментированы в *параграфе 1.3*. Итоговая таблица с оценками приведена в *параграфе 1.4*.

Вторая глава посвящена получению оценок величин d_n^m в пространствах произвольных размерностей. При этом методы, использованные для получения точных оценок, аналогичны методам, использованным в первой главе.

Метод расслоения применяется к единичному шару, а множествами расслоения являются концентрические сферы. В трехмерном пространстве таким образом улучшены оценки снизу величин d_n^3 для значений n вплоть до 275 (*параграф 2.1*).

С ростом размерности пространства m растет количество значений n, для которых метод расслоения позволяет получить улучшения известных ранее оценок. Кроме того, получаемые оценки все более значительно улучшают своих предшественников (*параграф 2.2*).

Помимо точных оценок сверху (*параграф 2.3*) и снизу (*параграфы 2.1 и 2.2*), во второй главе также получены асимптотические оценки сверху величин d_n^m (*параграф 2.4*). Как уже упоминалось выше, в пространствах размерностей больше двух ранее было известно лишь о существовании подобных оценок, а в явном виде оценки были получены в настоящей диссертации впервые.

Наконец, с использованием результатов теории решетчатых покрытий во второй главе показано (*параграф 2.4*), что в действительности $\phi(m) \to 1$ при $m \to \infty$.

Третья глава посвящена исследованию асимптотических свойств кодов деления. Как уже отмечалось выше, ранее была известна двойная оценка

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} \leqslant d_n^m(\Phi) \leqslant \frac{\phi(m)}{\sqrt[m]{n}}\,,$$

эквивалентная тому, что нормированный код деления произвольного ограниченного множества в $\mathbb{R}^m$ ограничен с двух сторон константами:

$$1 \leqslant e_n^m(\Phi) \leqslant \phi(m).$$

Итоговой целью третьей главы является доказательство того, что в действительности для произвольного ограниченного множества, такого, что его замыкание измеримо по Жордану (данному условию удовлетворяют практически все множества, которые могут стать предметом исследования комбинаторной геометрии), существует предел его нормированного кода деления.

Доказательство данного утверждения — *теоремы о пределе* — значительным образом использует *теорему о площадях*, доказанную в *первом параграфе* третьей главы и утверждающую, что для произвольных ограниченных множеств Φ_1 и Φ_2 в $\mathbb{R}^m$, замыкания которых измеримы по Жордану и имеют меры μ_1 и μ_2 соответственно, причём $\mu_2 \neq 0$, существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n^m(\Phi_1)}{e_n^m(\Phi_2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n^m(\Phi_1)}{d_n^m(\Phi_2)} = \sqrt[m]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,.$$

Иными словами, теорема о площадях утверждает, что для произвольных двух близких к жордановым множеств их коды деления асимптотически эквиваленты с коэффициентом пропорциональности, зависящим от отношения их площадей.

В силу теоремы о площадях утверждение теоремы о пределе достаточно доказать для некоторого *фиксированного*, наиболее удобного жорданова множества.

Параграфы 2–4 третьей главы посвящены отысканию интересных свойств кодов деления жордановых множеств. Все результаты данных параграфов являются прямыми следствиями теоремы о пределе, однако методы, использованные при доказательстве данных результатов (комбинаторный и интегрально-геометрический), отличаются от метода, использованного при доказательстве теоремы о пределе и представляют самостоятельный интерес.

В *пятом параграфе* доказана теорема о пределе. В качестве наиболее удобного множества для доказательства использован единичный квадрат. Теорема о пределе означает, что код деления произвольного жорданова множества асимптотически эквивалентен величине $\frac{C}{\sqrt[m]{n}}$, а его нормированный код деления эквивалентен константе.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А.М. Райгородскому за всестороннюю помощь при написании настоящей работы. Автор также сердечно благодарит своих родителей за их понимание и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] В.П. Филимонов, *О покрытии плоских множеств*, Математический Сборник. 2010. Т. 201. N8. С. 127 - 160.

[2] В.П. Филимонов, *Коды деления и теорема о площадях*, Доклады Академии Наук. 2009. Т. 426. N2. С. 173 - 176.

[3] В.П. Филимонов, *Теорема о малых отклонениях для кодов деления*, Доклады Академии Наук. 2010. Т. 431. N5. С. 593 - 597.

[4] В.П. Филимонов, *Теорема о рациональной периодичности для кодов деления*, Доклады Академии Наук. 2010. Т. 434. N2. С. 168 - 172.

[5] В.П. Филимонов, *Теорема о вещественной периодичости для кодов деления*, Доклады Академии Наук. 2011. Т. 436. N4. С. 452 - 457.