Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Гусев Антон Георгиевич

# Оптимизационные и теоретико-игровые модели рынка электроэнергии

01.01.09 − дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва − 2012

Работа выполнена на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор<br>Васин Александр Алексеевич |
| Официальные оппоненты: | Лотов Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Вычислительный центр РАН имени А.А. Дородницына, главный научный сотрудник<br><br>Самсонов Сергей Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, доцент кафедры оптимального управления |
| Ведущая организация: | Центральный экономико-математический институт РАН |

Защита состоится «25» мая 2012 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-ой учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за 2 дня по тел. (495) 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.ru/ в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан "23" апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Трифонов Н.П.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию оптимизационных и теоретико-игровых моделей для анализа актуальных проблем развития электроэнергетики. В течение последних 20-ти лет во многих странах радикально изменилась форма организации этого сектора: вместо государственных компаний или контролируемых государством монополий были созданы оптовые рынки электроэнергии. В ряде стран (включая Россию) – также рынки мощности. Важной проблемой для этих рынков является ограничение «рыночной власти» крупных производителей, то есть возможности повышать цену, сокращая объем предлагаемого товара. Данная проблема не может быть решена стандартными методами антимонопольного регулирования, такими как дробление рынка на мелкие компании, в силу сопутствующего снижения надежности поставок электроэнергии и увеличения издержек. Задача состоит в выборе правил аукциона (архитектуры рынка), минимизирующего отклонение рыночной цены от цены конкурентного равновесия, оптимальной с точки зрения суммарного выигрыша всех участников рынка. Моделированию аукционов однородного товара, каким является электроэнергия, посвящено большое количество работ (Hellwig M., Vives X., Amir R., Lambson V.E., Ausubel L.M., Cramton P., Васин А.А., Дуракович Н., Шаманаев А.С. и др. авторы). В качестве модели поведения рассматривается равновесие Нэша или его модификация (например, совершенное подыгровое равновесие).

Эмпирические данные[1] и теоретические модели[2,3] показывают, что рынок форвардных контрактов способствует значительному снижению «рыночной власти» производителей. Внекоторых случаях[3] эффект от введения форвардных контрактов, измеряемый индексом Лернера, эквивалентен увеличению числа фирм на спотовом рынке с $n$ до $n^2$. Однако данные результаты получены при ряде ограничительных предположений: 1) не учитывается ограниченность

---

[1]Newbery D. (1998). Competition, Contracts and Entry in the Electricity Spot Market. *Rand Journal of Economics, 29* (4), 726-749.
[2]Allaz B., Vila J.-L. (1993). Cournot competition, futures markets and efficiency. *Journal of Economic Theory, 1* , 1-16.
[3]Bushnell J. (2005). *Oligopoly equilibria in electricity contract markets.* WP-148, University of California Energy Institute.

производственных мощностей; 2) предполагается равенство цен на спотовом и форвардном рынках при любых стратегиях фирм-производителей; 3) спотовый и форвардный рынки организованы как аукцион Курно. В диссертации исследуется модель рынка форвардных контрактов при поочередном отказе от указанных предположений. Решаются вопросы существования, вычисления равновесий Нэша, проводится их сравнение с равновесиями одноэтапного аукциона и конкурентным равновесием.

Существенной особенностью рынка электроэнергии является неопределенность спроса, связанная с колебаниями спроса на электроэнергию в течение времени, на которое подается заявка. В этом контексте большой интерес представляет модель аукциона функций предложения, в которой спрос зависит от случайного фактора[4]. Набор стратегий является равновесием в функциях предложения (РФП), если в каждый момент времени заявка каждого участника максимизирует его прибыль при фиксированных заявках остальных игроков. Доказано[4], что цена, формирующаяся в РФП, всегда ниже цены Курно, что говорит о снижении «рыночной власти». Однако вычисление заявок, соответствующих РФП, является технически сложным и предполагает полную информированность игроков о технико-экономических характеристиках всех участников аукциона. В связи с чем актуален вопрос, можно ли ожидать, что реальное поведение производителей на таком аукционе будет соответствовать РФП. Подобная проблема возникает для многих игровых моделей в экономике и решается на основе исследования адаптивной динамики при повторении рассматриваемой игры. В диссертации этот подход использован для исследования сходимости к РФП в зависимости от параметров модели.

Российский рынок (как и ряд других) устроен таким образом, что каждый оптовый продавец электроэнергии сначала продает мощность на рынке конкурентного отбора мощности (КОМ), где отбираются мощности, способные покрыть ожидаемую максимальную нагрузку, а затем отобранные мощности продают электроэнергию на ежедневно проводимых торгах (РСВ). Анализ

[4]Klemperer P.D., Meyer M.A. (1989). Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty. *Econometrica, 57* (6), 1243-1277.

работы электроэнергетического сектора в долгосрочной перспективе связан с определением оптимальной структуры мощностей и исследованием инвестиционных процессов. В условиях централизованного планирования определение оптимальной структуры мощностей представляет собой оптимизационную задачу. Ранее[5] предложен метод решения этой задачи в случае, когда есть несколько типов мощностей, без учета ограничения мощности каждого типа. В диссертации решение получено с учетом этих ограничений. Кроме того, рассматривается практически важный и не исследовавшийся ранее вопрос, какие правила проведения аукционов на КОМ и РСВ обеспечивают в равновесии отбор оптимальной структуры мощностей.

**Цель работы:** исследование оптимизационных и теоретико-игровых моделей для анализа актуальных проблем развития рынков электроэнергии и мощности, изучение вопросов существования равновесий Нэша в таких моделях и их эффективности в смысле цен для конечных потребителей.

**Задачи работы:**

1. Рассмотреть вопросы существования и вычисления равновесий Нэша для модели аукциона, включающего этап форвардных торгов, в зависимости от предположений об архитектуре аукциона. Выяснить влияние форвардного рынка на отклонение равновесия Нэша от конкурентного равновесия.
2. Описать структуру равновесий Нэша для модели аукциона функций предложения в условиях случайного спроса и ограниченных производственных мощностей. Исследовать сходимость к равновесию Нэша адаптивной динамики поведения в зависимости от параметров рынка.
3. Исследовать модель рынка, включающего аукционы мощности и электроэнергии. Решить оптимизационную задачу выбора структуры мощностей, минимизирующих суммарные затраты. Рассмотреть различные варианты организации аукциона мощности и соответствующие им равновесия Нэша с целью выбора модели аукциона, способствующего формированию оптимальной структуры мощностей.

[5] Стофт С. (2006). *Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии.* М.: Мир.

**Методы исследования** базируются на теории игр, математическом аппарате исследования операций, теории оптимизации и микроэкономике.

**Обоснованность научных положений.** Теоретические положения и выводы диссертации сформулированы в виде утверждений и строго доказаны.

**Научная новизна** работы определяется следующим.

Исследованы вопросы существования и вычисления совершенного подыгрового равновесия для игр в нормальной форме, соответствующих следующим модификациям двухэтапного аукциона Курно:

- двухэтапный аукцион Курно с учетом ограничений на объем производства;
- двухэтапный аукцион Курно без арбитражеров;
- двухэтапный аукцион с оплатой по заявкам на форвардном рынке и конкуренцией по Курно на втором этапе.

Для аукциона функций предложения в условиях случайного спроса и ограниченной производственной мощности найдено множество равновесий Нэша в зависимости от максимального значения спроса. Исследована адаптивная динамика поведения в различных предположениях о параметрах рынка. Получены условия сходимости к равновесию, а также условия несходимости.

Для задачи формирования оптимальной структуры мощностей с учетом постоянных и переменных затрат, являющейся частным случаем задачи максимизации общественного благосостояния, разработан алгоритм решения с учетом ограничения мощностей. Разработана модель аукциона, обеспечивающего отбор оптимальной структуры мощностей при равновесных по Нэшу заявках, соответствующих реальным затратам генераторов.

**Практическая значимость.** Полученные результаты могут использоваться для выработки рекомендаций относительно оптимальной формы организации аукциона при решении задач экономического проектирования для рынков мощности и электроэнергии.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, ВЦ РАН, ЦЭМИ РАН, на научной конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, 2011г.), 19-ой конференции Международной федерации обществ исследования операций (Мельбурн, 2011 г.).

**Публикации.** По результатам диссертации опубликовано 7 работ [1-7], в том числе [1-4] – статьи в реферируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации научных результатов кандидатских диссертаций.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В работах [1, 4, 5, 6, 7] Гусеву А.Г. принадлежат формулировки и доказательства всех утверждений. В работах [2,3] Гусеву А.Г. принадлежит исследование теоретико-игровой модели с детерминированной функцией спроса.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 45 наименований. Общий объем работы составляет 96 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована проблематика диссертации и обсуждены основные известные результаты в области теоретико-игрового моделирования аукционов на рынках электроэнергии.

В **первой главе** исследуется модель двухэтапного аукциона с проведением торгов сначала на форвардном, а затем на спотовом рынке. На примере симметричной олигополии с постоянными предельными издержками исследуется влияние различных предположений об архитектуре такого аукциона на отклонение равновесных по Нэшу исходов от конкурентного равновесия и равновесия в соответствующей одноэтапной модели (в отсутствие форвардных контрактов).

В **разделе 1.1** приводятся необходимые сведения относительно одноэтапных аукционов. Рассматривается рынок однородного товара с множеством фирм-производителей $N = \{1, \dots, n\}$. Каждая фирма $i$ характеризуется функцией затрат $C_i(q)$ с неубывающими предельными издержками в зависимости от объёма выпуска $q$. Поведение потребителей характеризуется общеизвестной функцией спроса $D(p)$.

*Функция предложения Вальраса* $S_i(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Argmax}_{q\in[0,Q_i]}\big(pq - C_i(q)\big)$ определяет оптимальный объем производства фирмы $i$ при фиксированной цене. Вектор объемов производства $(\tilde{q}_i, i \in N)$ называется *конкурентным равновесием*, а $\tilde{p}$ – *ценой конкурентного равновесия* (ценой Вальраса), если $\tilde{q}_i \in S_i(\tilde{p})$, $i \in N$ и $\sum_{i\in N} \tilde{q}_i = D(\tilde{p})$. Конкурентное равновесие оптимально с точки зрения суммарного выигрыша всех участников рынка.

Одна из основных моделей рынка однородного товара – *аукцион Курно*. В этой модели стратегией фирмы $i$ является ее объем производства $q_i \in [0, Q_i]$. Производители устанавливают свои объемы одновременно. Обозначим $\vec{q} = (q_i, i \in N)$ – набор стратегий. Рыночная цена $p(\vec{q}) = D^{-1}(\sum_{i\in N} q_i)$ уравнивает спрос и фактическое предложение. Функция выигрыша $\pi_i(\vec{q}) = q_i p(\vec{q}) - C_i(q_i)$ определяет прибыль фирмы $i$. Взаимодействие в модели Курно соответствует игре в нормальной форме $\Gamma_C = \langle N, [0, Q_i], \pi_i(\vec{q}), \vec{q} \in \otimes_{i\in N}[0, Q_i], i \in N\rangle$.

Обозначим $(q_i^*, i \in N)$ равновесные по Нэшу объемы выпуска в игре $\Gamma_C$, а $p^* = D^{-1}(\sum_{i\in N} q_i^*)$ – соответствующую цену (*цена Курно*). Условия первого порядка для равновесия Нэша в модели Курно имеют следующий вид[6]:

$$q_i^* \in \left(p^* - C_i'(q_i^*)\right)\left|D'(p^*)\right|, \text{ если } C_i'(0) < p^* \qquad (1)$$

$$q_i^* = 0, \text{ если } C_i'(0) \geq p^* \qquad (2)$$

(в точках разрыва $C_i'(q) = \left[C_{i-}'(q), C_{i+}'(q)\right]$). *Функция предложения Курно* $S_i^C(p)$ определяется как решение системы (1)-(2). Цена Курно $p^*$ определяется из уравнения $\sum_{i\in N} S_i^C(p^*) = D(p^*)$.

Для оценки отклонения рыночной цены от цены конкурентного равновесия используется «индекс рыночной власти» $\frac{p^*-\tilde{p}}{p^*}$. Пусть спрос задан линейной функцией $D(p) = \max\{0, \overline{D} - dp\}$. Тогда для симметричной (характеристики всех игроков одинаковы) олигополии с постоянными предельными издержками $C_i'(q) \equiv c$ и ограниченными объемами выпуска $q_i \leq Q$ «индекс рыночной

[6]Васин А.А. (2005). *Некооперативные игры в природе и обществе.* Москва: Макс пресс.

власти» определяется из Утверждения 1.1.

**Утверждение 1.1.** *Для симметричной олигополии в модели Курно:*

1) *если* $\overline{D} - cd > (n+1)Q$, *то* $p^* = \frac{\overline{D} - nQ}{d}$, $\frac{p^* - \tilde{p}}{p^*} = 0$;

2) *если* $nQ < \overline{D} - cd \le (n+1)Q$, *то* $p^* = \frac{\overline{D} + cnd}{d(n+1)}$, $\frac{p^* - \tilde{p}}{p^*} = \frac{\frac{(n+1)Q}{\overline{D} - cd} - 1}{e(p^*)}$;

3) *если* $\overline{D} - cd \le nQ$, *то* $p^* = \frac{\overline{D} + cnd}{d(n+1)}$, $\frac{p^* - \tilde{p}}{p^*} = \frac{1/n}{e(p^*)}$,

*где* $e(p^*) = \frac{|D'(p^*)|p^*}{D(p^*)}$ *– эластичность функции спроса в точке* $p^*$.

Вторая основная модель рынка однородного товара – *аукцион Бертрана-Эджворта*, описывающий ценовую конкуренцию (стратегией фирмы $i$ является цена $s_i$). Общеизвестно, что для модели симметричной олигополии по Бертрану-Эджворту, если существует равновесие Нэша, то оно совпадает с конкурентным равновесием, то есть $s_i^* = \tilde{p}, i \in N$. В **утверждении 1.2** доказано, что в данном случае равновесия Нэша не существует при $(n-1)Q < \overline{D} - cd < (n+1)Q$, и найдены равновесия при прочих соотношениях параметров.

В **разделе 1.2** описывается базовая модель *двухэтапного аукциона*. Фирмы участвуют в торгах на форвардном рынке, а затем на спотовом рынке, организованных как аукционы Курно. Стратегией фирмы является пара $q_i = \left(q_i^f, q_i^s(q^f)\right)$, где $q_i^f$– объем предложения на форвардном рынке, а $q_i^s$ – объем предложения на спотовом рынке, зависящий от $q^f = \sum_{i \in N} q_i^f$. Остаточный спрос по итогам форвардных торгов $D(p, q^f) = \max\{0, D(p) - q^f\}$.

Активность арбитражеров при любых стратегиях фирм обеспечивает равенство цен на форвардном и спотовом рынках: $p^s = p^f = p(\vec{q})$, $\forall \vec{q} = (q_i, i \in N)$, где $p(\vec{q})$ определяется из условия $D(p(\vec{q}), q^f) = \sum_{i \in N} q_i^s\,(q^f)$. Каждая фирма стремится максимизировать суммарную прибыль от продаж на форвардном и спотовом рынках. $\pi_i(\vec{q}) = (q_i^f + q_i^s)(p(\vec{q}) - c)$ – функция выигрыша фирмы $i$. В качестве модели поведения используется *совершенное подыгровое равновесие (СПР)*. Набор стратегий $\vec{\hat{q}}$ является СПР, если

1) $\forall q^f$значения $\left(\hat{q}_i^s(q^f), i \in N\right)$ образуют равновесие Нэша относительно

функций выигрыша на спотовом рынке $\pi_i^s(\vec{q}) = q_i^s\left(q^f\right) \cdot (p(\vec{q}) - c)$;

2) набор стратегий $\left(\hat{q}_i^f, i \in N\right)$– равновесие Нэша для игры с функциями выигрыша $\pi_i(\vec{q})$ и фиксированными стратегиями второго этапа.

Обозначим $\hat{p}$ и $\hat{q}$ соответственно цену и суммарный объем предложения в СПР.

Для описанной модели с неограниченными объемами производства ранее получен[3] следующий результат (*равновесие Бушнелла*): $\hat{p} = \frac{\overline{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}$, $\hat{q}^f = \frac{n^2(\overline{D}-cd)}{n^2+1}$. «Индекс рыночной власти» в этом случае $\frac{\hat{p}-\tilde{p}}{\hat{p}} = \frac{1/n^2}{e(\hat{p})}$, то есть эффект от введения этапа форвардных торгов эквивалентен увеличению количества фирм на рынке с $n$ до $n^2$. В **разделах 1.3–1.5** диссертации рассматриваются модификации модели за счет отказа от ограничительных предположений, при которых получен данный результат, и выясняется эффективность форвардного рынка в этих случаях.

В **разделе 1.3** рассматривается двухэтапный аукцион Курно с учетом ограничений на объемы производства $q_i \leq Q$.

**Утверждение 1.3.** *Для двухэтапного аукциона Курно:*

1) *Если* $\overline{D} - cd \geq (n+1)Q$, *то существует множество эквивалентных СПР с активными ограничениями производственных мощностей: для любых* $q_i^f \leq Q, i \in N$, $q_i^s = Q - q_i^f$. *В этом случае* $\hat{p} = \tilde{p} = p^*$. *Проблемы ограничения рыночной власти в этой области не возникает, форвардный рынок ничего не меняет по сравнению с одноэтапным аукционом Курно.*

2) *Если* $\left(n + \frac{1}{n}\right)Q < \overline{D} - cd < (n+1)Q$, *то существует локальное СПР, соответствующее конкурентному исходу, при этом* $p^* > \hat{p} = \tilde{p}$. *Однако это локальное СПР не является истинным равновесием, так как производитель с максимальным объемом предложения на форвардном рынке может увеличить свою прибыль путем переброски всего объема своего предложения на спотовый рынок. Форвардный рынок не решает проблему.*

3) *Если* $nQ \leq \overline{D} - cd \leq \left(n + \frac{1}{n}\right)Q$, *то существует описанное выше неустойчивое локальное СПР. Существует также равновесие Бушнелла:* $\hat{p} = \frac{\overline{D}+n^2cd}{d(n^2+1)}, \frac{\hat{p}-c}{\hat{p}} =$

$\frac{1}{n^2 e(p)}$.

4) *Если* $(n-1)Q < \overline{D} - cd < nQ$, *то существует равновесие Бушнелла с указанными свойствами.*

5) *При* $0 \le \overline{D} - cd \le (n-1)Q$ *также существует равновесие Бушнелла, однако двухэтапный аукцион Курно оказывается неоптимальным способом организации торгов, поскольку аукцион Бертрана-Эджворта дает равновесие, совпадающее с конкурентным.*

В **разделе 1.4** модель рассматривается при отказе от предположения о наличии арбитражеров, так как на практике для ряда рынков доступ на них ограничен, и регулярно возникает отклонение форвардных цен от спотовых. Пусть потребители пассивны: все участвуют в обоих аукционах. В этом случае цена $p^f$ уравнивает спрос и фактическое предложение на форвардном рынке $p^f(q^f) = D^{-1}(q^f)$. На втором аукционе функция остаточного спроса $D(p, q^f) = \max\{0, D(p) - q^f\}$. Фирмы выбирают объёмы производства на спотовом рынке, учитывая объем предложения на предыдущем этапе. Для симметричной олигополии без ограничения на объем производства равновесные объёмы выпуска и цена на спотовом рынке определяются из условия: $nq_i^s = nd(p^s - c) = D(p^s, q^f)$. Откуда следует выражение для прибыли: $\pi^i(q^f) = (p^f(q^f) - c)q_i^f + d\left(\frac{\overline{D} - q^f - dc}{(n+1)d}\right)^2$.

**Утверждение 1.4.** *В данной модели существует единственное СПР. Цены СПР удовлетворяют условию* $\frac{p^s - c}{c} = \frac{1}{n+1}\frac{p^f - c}{c} = \frac{p^* - c}{c(1 + l(n))}$ *(*$p^*$ *– цена Курно для одноэтапной модели), а объемы СПР связаны соотношением* $\frac{q^f}{q^s} = (n+1) - 2(n+1)^{-1}$, $q^f = (\overline{D} - dc)\left(\frac{l(n)}{1 + l(n)}\right)$, *где* $l(n) = n(1 - 2(n+1)^{-2})$.

Величина $l(n) < n$ и $l(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} n$. Таким образом, наличие этапа форвардных торгов способствует некоторому снижению рыночной власти и уменьшает отклонение СПР от конкурентного равновесия по сравнению с одноэтапным аукционом. Однако эффективность от введения этапа форвардных торгов в данном случае ниже, чем в исходной модели с возможностью арбитража.

В **разделе 1.5** рассматривается двухэтапный аукцион в предположении о проведении аукциона Бертрана-Эджворта на форвардном рынке, так как во многих случаях форвардный рынок является децентрализованным (заключаются двусторонние сделки) и для его описания больше подходит модель Бертрана-Эджворта. В **утверждениях 1.5, 1.6** показано, что в такой модели введение этапа форвардных торгов ничего не улучшает по сравнению с одноэтапным аукционом Бертрана-Эджворта как в отсутствии арбитражеров, так и при их наличии.

Во **второй главе** исследуется модель олигополии с функцией спроса, зависящей от случайного фактора. В **разделе 2.1** приводится формальная модель и предшествующие результаты. Рассматривается симметричная олигополия с множеством фирм-производителей $N = \{1, \dots, n\}$. Потребители характеризуются функцией спроса $D(p,t)$, зависящей от цены $p$ и случайного фактора $t$, распределенного на отрезке $[\underline{t}, \overline{t}]$. Функция спроса удовлетворяет условиям $-\infty < D_p < 0$, $D_{pp} \leq 0$, $D_t > 0$, $D_{pt} = 0$. Стратегия фирмы – функция предложения $S_i(p)$, определяющая объем выпуска в зависимости от цены. Игроки назначают стратегии, не имея информации о случайном факторе. Когда становится известной реализация $t$, цена $p(\vec{S}, t)$ определяется из баланса суммарной функции предложения с функцией спроса: $D(p,t) = \sum_{i \in N} S_i(p)$. Если $p(\vec{S}, t)$ не существует или не единственная, то $\pi_i(\vec{S}, t) = 0$, иначе прибыль каждой фирмы $\pi_i(\vec{S}, t) = p(\vec{S}, t) \cdot S_i\left(p(\vec{S}, t)\right) - C\left(S_i\left(p(\vec{S}, t)\right)\right)$.

Набор стратегий $\vec{S}^* = (S_i^* \in S_i, i \in N)$ – *равновесие в функциях предложения (РФП)*, если $\forall t\ S_i^* \in \operatorname{Argmax}_{S_i}\left(\pi_i(S_i, \vec{S}_{-i}^*, t)\right)$. Для симметричной олигополии необходимое условие РФП сформулировано[4] в виде дифференциального уравнения: $S_i^*(p) \equiv S(p)$, $\forall i \in N$, где

$$S'(p) = \frac{1}{n-1}\left[\frac{S(p)}{p - C'(S(p))} + D_p(p)\right]. \qquad (3)$$

Доказано[4], что цена РФП всегда ниже цены Курно, из чего можно предположить, что рассматриваемый аукцион способствует снижению «рыночной власти» отдельных фирм. В последующих разделах второй главы это предположение проверяется с помощью исследования сходимости динамики наилучших ответов к РФП.

В **разделе 2.2** исследуется симметричная дуополия с линейными предельными издержками $C(q) = (c_0 + 0{,}5c_1 q)q$ и линейной функцией спроса $D(p,t) = \overline{D}(t) - dp$. Если $\sup_t \overline{D}(t) = \infty$, то, согласно полученным ранее[4] результатам, существует единственное РФП, причем функция предложения линейна:

$$S^*(p) = 0{,}5(p - c_0)d\left(\sqrt{\frac{4}{dc_1} + 1} - 1\right). \tag{4}$$

Рассмотрим *динамику наилучших ответов* (*ДНО*) для повторяющегося аукциона. Функция предложения $S(p,\tau)$ называется *наилучшим ответом* на заявку $S(p,\tau-1)$, если $\forall t \in [\underline{t}, \overline{t}]$ цена $p(\tau,t)$, определяемая из условия $S(p,\tau) + S(p,\tau-1) = D(p,t)$, максимизирует прибыль игрока:

$$p(\tau,t) \to \max_p\left[\left(D(p,t) - S(p,\tau-1)\right)p - C\left(D(p,t) - S(p,\tau-1)\right)\right].$$

**Утверждение 2.2.** *Заявка* $S_1(p) = \frac{(p-c_0)(d+k)}{1+c_1(d+k)}$ *– это наилучший ответ на заявку* $S_2(p) = k(p - c_0)$ *при любом* $\overline{D}(t) > dc_0$.

Наилучший ответ на шаге $\tau$ $S(p,\tau) = k_\tau(p - c_0)$, где $k_\tau = \frac{d+k_{\tau-1}}{1+c_1(d+k_{\tau-1})}$.

**Утверждение 2.3.** *ДНО для модели с линейными предельными издержками сходится к РФП статической модели* (4). *Более того,* $\left|\frac{k_\tau}{k^*} - 1\right| \le \left|\frac{k_1}{k^*} - 1\right|(1 + c_1 d)^{\tau-1}$.

В **разделе 2.3** описывается множество РФП для симметричной дуополии с постоянными предельными издержками $C(q) = cq, c \ge 0$ и ограничением производственной мощности $q \le Q$. Равновесная заявка удовлетворяет уравнению $S'(p) = \frac{S(p)}{(p-c)} - d$ до тех пор, пока не достигнет $Q$ или максимума по $p$, после чего остается постоянной. Общее решение данного уравнения $S(p,A) = (p-c)(A - d\ln(p-c))$. Эта функция достигает максимального значения $q(A) = de^{A/d-1}$ при $p = p(A) \stackrel{\text{def}}{=} c + e^{A/d-1}$ в точке пересечения ее графика с функцией предложения Курно $d(p-c)$. Обратная функция имеет вид $A(q) = d(\ln(q/d) + 1)$. Для $A(Q)$ равновесная заявка имеет вид

$S^*(p) = \begin{cases} S(p, A(Q)), \text{ при } c \le p < c + Q/d \\ Q, \text{ при } p \ge c + Q/d \end{cases}$. Значениям $q(A) < Q$ соответствуют заявки $\overline{S}(p, A) = \begin{cases} S(p, A), c \le p < p(A) \\ q(A), p \ge p(A) \end{cases}$ (*заявки вида 1*). Значениям $q(A) > Q$ соответствуют заявки $\overline{\overline{S}}(p, A) = \min\{\overline{S}(p, A), Q\}$ (*заявки вида 2*).

Обозначим $D^* \overset{\text{def}}{=} \sup_t \overline{D}(t) - dc$ - максимальное значение спроса при $p = c$.

**Утверждение 2.4.** *В модели с постоянными предельными издержками:*

1) *Если $D^* \ge 3Q$, то единственное РФП соответствует значению $A(Q)$, равновесная заявка имеет вид $S^*(p)$.*

2) *Если $Q < D^* < 3Q$, то для любого $A \in \left(A(D^*/3), A(Q)\right)$ заявка $\overline{S}(p, A)$ определяет РФП вида 1, и для любого $A \in \left(A(Q), \overline{A}(D^*)\right)$, где $\overline{A}(D^*)$ определяется из уравнения $S\left(\tilde{p}(A, \overline{D})\right)\tilde{p}(A, \overline{D}) = \frac{(D^*-Q)^2}{4d}$, заявка $\overline{\overline{S}}(p, A)$ определяет РФП вида 2.*

3) *Если $D^* \le Q$, то при любых заявках ограничение производственной мощности неактивно. В этом случае $\forall A > A(D^*/3)$ заявка $\overline{S}(p, A)$ определяет РФП вида 1. При $A \to \infty$ РФП стремится к равновесию Вальраса.*

В **разделе 2.4** исследуется соответствующая динамическая модель. В **Утверждении 2.5** доказано, что при $D^* \le Q$ ДНО сходится к РФП, соответствующему равновесию по Вальрасу. Однако при $D^* > Q$ нельзя гарантировать сходимость, если $\overline{D}(t)$ принимает произвольные значения (в диссертации приведен соответствующий пример). Поэтому для дальнейшего исследования рассматривалась динамика при фиксированных значениях $\overline{D}$, то есть $D(p) = \max\{0, \overline{D} - dp\}$. Далее без ограничения общности $c = 0$.

**Утверждение 2.6.** *В зависимости от $\overline{D}$ ДНО имеет следующий характер:*

1) *Если $\overline{D} \ge 3Q$, то на любом шаге $\tau$ наилучший ответ $S(p, \tau) = \min\{Q, dp\}$. ДНО сходится к РФП, соответствующему равновесию по Курно (которое в данном случае совпадает с равновесием по Вальрасу).*

2) *Если $Q < \overline{D} < 3Q$, то на шаге $\tau = 1, \dots, T(\overline{D})$ наилучший ответ $S(p, \tau) = min\{Q, d\tau p\}$, затем функции наилучшего ответа повторяются. ДНО имеет*

*циклический характер, длина цикла* $T(\overline{D}) = \begin{cases} 2, \text{ если } 7Q/3 < \overline{D} < 3Q \\ 3, \text{ если } 2Q < \overline{D} \le 7Q/3 \\ \left\lfloor \left(\overline{D}/(\overline{D}-Q)\right)^2 \right\rfloor, \text{если } Q < \overline{D} \le 2Q \end{cases}$.

3) *Если* $\overline{D} \le Q$, *то на шаге* $\tau$ *наилучший ответ* $S(p,\tau) = \min\{Q, d\tau p\}$. *При* $\tau \to \infty$ *ДНО сходится к РФП, соответствующему равновесию по Вальрасу.*

**Утверждения 2.7 и 2.8 раздела 2.5** обобщают результаты раздела 2.4 на случай олигополии с $n > 2$ фирмами.

В **Главе 3** исследуется модель рынка, включающего аукционы мощности и электроэнергии. Каждый оптовый продавец сначала продает мощность на рынке конкурентного отбора мощности (КОМ), где отбираются мощности, способные покрыть ожидаемую максимальную нагрузку, а затем отобранные мощности продают электроэнергию на рынке на сутки вперед (РСВ).

В **разделе 3.1** приводится формальное описание[7] модели. Имеется конечное множество типов мощности $I$. Каждый тип $i \in I$ характеризуется переменными издержками $c_i^v$ и постоянными издержками $c_i^f$ на 1 МВт·ч. Средние издержки мощности зависят от коэффициента загрузки $\tau \in [0,1]$ (доли периода, когда используется данная мощность): $c_i(\tau) = c_i^v \cdot \tau + c_i^f$.

Спрос в течение периода является неэластичным по цене и характеризуется максимальным значением $\overline{M}$ и кривой продолжительности нагрузки (КПН) $M(\tau)$. На практике КПН рассчитывается, исходя из нагрузки в прошлые периоды. Обратная функция $\tau(M)$ определяет долю времени, когда требуемая мощность выше уровня $M$. В условиях централизованного планирования определение оптимальной структуры мощности является оптимизационной задачей, которая состоит в том, чтобы определить объемы мощности каждого типа и порядок их подключения, способные удовлетворить спрос с минимальными полными затратами.

Сначала задача рассматривается для случая без ограничения мощностей. Мощности упорядочиваются по возрастанию суммарных издержек $(c_i^v + c_i^f)$.

---

[7] Описание модели приводится, следуя работе Стофт С. (2006). *Экономика энергосистем. Введение в проектирование рынков электроэнергии.* М.: Мир.

Строится нижняя огибающая графика средних издержек: $\min_{i\in I} c_i(\tau), \tau \in [0,1]$. Отбираются мощности $i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_k$, входящие в нижнюю огибающую. Определяются точки $\tau^*_{i_k} = 0$, $\tau^*_{i_{k-1}} < \dots < \tau^*_{i_1}$, $\tau^*_{i_0} = 1$ переключения в нижней огибающей с одной прямой на другую, и $M_{i_l} = M(\tau^*_{i_l})$, $l = 0,1,\dots,k$ – соответствующие значения КПН. Утверждение 3.1 обобщает метод расчета, указанный ранее[7] для двух типов мощностей, на произвольное число типов.

**Утверждение 3.1.** *Оптимальная структура мощностей включает в себя типы $i_1, i_2, \dots, i_k$, определяемые в соответствии с указанным правилом. Оптимальные объемы мощности $V^*_{i_l} = M_{i_l} - M_{i_{l-1}}$, $l = 1,\dots,k$. При возрастании спроса в диапазоне от $M_{i_{l-1}}$ до $M_{i_l}$ он удовлетворяется за счет подключения мощностей типа $i_l$.*

Далее задача исследуется в более общем случае. Пусть $A$ – набор доступных единиц мощности, каждая мощность $a \in A$ генерирует по 1 кВт и характеризуется постоянными $c^f_a$ и переменными $c^v_a$ издержками (у каждого $a \in A$ может быть, вообще говоря, свой тип мощности). КПН $M(\tau)$ является кусочно-постоянной функцией со значениями, отвечающими целому числу единиц, $M(0) = \overline{M} < |A|, M(1) \geq 1$.

Издержки на покрытие нагрузки $s \leq \overline{M}$ множеством $A_s = \{a_1, \dots, a_s\}$ минимальны, если мощности в наборе $(a_1, \dots, a_s)$ упорядочены по возрастанию переменных издержек. Обозначим эту величину $C(A_s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{s}\left(c^f_{a_l} + c^v_{a_l}\cdot\tau(l)\right)$. Итак, задачей является поиск набора, удовлетворяющего условию:

$$A^*_{\overline{M}} = \operatorname{argmin}_{A_{\overline{M}}\subset A} \mathrm{C}(A_{\overline{M}}). \quad (5)$$

В диссертации предложен следующий алгоритм решения. На первом шаге отбирается мощность $\overline{a}_1 = \operatorname{argmin}_{a\in A}(c^f_a + c^v_a)$. Рассмотрим шаг $l$, когда определены мощности $\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_{l-1}\}$=$A_{l-1}$. Если у задачи $\overline{a}_l = \arg\min_{a\in A}(c^f_a + c^v_a \cdot \tau(l))$ существует решение $\overline{a}_l \notin A_{l-1}$, то положим $A_l = A_{l-1} \cup \{\overline{a}_l\}$. Иначе для всякого $i = 1,\dots,l$ найдем $a_{i,l}$, реализующие $min_{a\in A\setminus A_{l-1}}\left(c^f_a + c^v_a\cdot\tau(i)\right)$, из них выберем $\overline{a}_l = argmin_{a_{i,l}\in A\setminus A_{l-1}} C(A_{l-1} \cup$

$\{a_{i,l}\}\big)$ и положим $A_l = A_{l-1} \cup \{\overline{a}_l\}$.

**Утверждение 3.2.** *Упорядоченный по возрастанию $c_a^v$ набор $A_{\overline{M}}$, определяемый в соответствии с описанным алгоритмом, является решением задачи (5).*

С 2011 г. правила функционирования российского рынка мощности стали близки к аукциону единой цены. В **разделе 3.2** рассматривается двухэтапная игра, соответствующая проведению аукциона единой цены на КОМ, а затем на РСВ. На примере с тремя типами мощностей показано, что в конкурентном равновесии отбирается оптимальная структура мощностей. Однако существенным недостатком такого механизма является то, что оптимальная заявка фирмы на КОМ зависит не только от её постоянных издержек, но и от ожидаемой прибыли на РСВ, которая, в свою очередь, зависит от параметров других агентов. В реальности фирмы не могут получить и обработать необходимую информацию. В случае, если на КОМ проводится аукцион с оплатой по заявкам, ситуация аналогична.

В связи с этим, в **разделе 3.3** описываются правила аукциона, которые обеспечивают отбор оптимального состава мощностей на основе частной информации фирм о своих издержках. Предполагается, что каждая фирма $a \in A$ может предложить одну единицу мощности с характеристиками $\left(c_a^f, c_a^v\right)$, которые являются частной информацией. Стратегия фирмы – заявка вида $\left(p_a^f, p_a^v\right)$. Аукционер обрабатывает заявки в соответствии с описанным в разделе 3.2 алгоритмом и отбирает оптимальные мощности $A_{\overline{M}} = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_{\overline{M}}\}$. Каждая фирма $a_l \in A_{\overline{M}}$ несет издержки $c_{a_l}^f + \tau(l) c_{a_l}^v$ и получает оплату в размере

$$\left(p_{a_l}^f + \tau(l) p_{a_l}^v\right) + \max_{s=1,\dots,\overline{M}}\left(p_{a_s}^f + \tau(s) p_{a_s}^v - p_{a_l}^f - \tau(s) p_{a_l}^v\right).$$

**Утверждение 3.3.** *В условиях совершенной конкуренции стратегия каждого производителя в равновесии Нэша на таком аукционе – подать заявку $\left(c_a^f, c_a^v\right)$. Отобранный набор мощностей $\left(a_1, \dots, a_{\overline{M}}\right)$ является решением задачи (5).*

В завершении раздела 3.3 определяются условия отсутствия рыночной власти у отдельной фирмы в случае, когда имеющиеся мощности делятся на определенные типы $i \in I$, $\overline{V}_i$ – число доступных единиц мощности типа $i \in I$.

Пусть $A_{\overline{M}} = (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_{\overline{M}})$ – оптимальный состав мощностей, $I^* = \{1, \dots, K\}$ – входящие в него типы, упорядоченные по возрастанию переменных издержек $c_i^v$. Пусть $l_{i,min}$ и $l_{i,max}$ – минимальный и максимальный номер мощности в наборе $A_{\overline{M}}$, принадлежащей типу $i$. Тогда $V_i^* = l_{i,max} - l_{i,min} + 1$ – количество единиц мощности типа $i$ в наборе $A_{\overline{M}}$, $\sum_{i \in I^*} V_i^* = \overline{M}$. Будем называть тип $i \in I^*$ *дефицитным*, если $V_i^* = \overline{V}_i$.

**Утверждение 3.4.** *Пусть для каждого дефицитного типа выполнены следующие условия:*

$$\tau(l_{i,max}) = \tau(l_{i,max} + 1),$$
$$\tau(l_{i,min}) = \tau(l_{i,min} - 1).$$

*Тогда набор заявок* $(c_a^f, c_a^v)$, $a \in A$, *образует ситуацию равновесия в игре, соответствующей данному аукциону.*

Описанная в утверждении 3.4 ситуация типична, если КПН кусочно-постоянна с небольшим числом ступеней. Вэтом случае предложенные правила аукциона позволяют сформировать оптимальную структуру.

**Основные результаты работы, выносимые на защиту.**

1. Для различных вариантов организации двухэтапного рынка по продаже электроэнергии построены теоретико-игровые модели и найдены отклонения цены равновесия Нэша от цены конкурентного равновесия. Выяснена роль форвардного рынка в снижении этого отклонения по сравнению с одноэтапным рынком.
2. Для модели аукциона функций предложения в условиях случайного спроса и ограниченной производственной мощности найдено множество равновесий Нэша в зависимости от максимального значения спроса. Исследована адаптивная динамика поведения в различных предположениях о параметрах рынка. Получены условия сходимости к равновесию, а также условия несходимости.
3. Разработаны алгоритмы выбора оптимальной структуры энергетических мощностей с учетом постоянных и переменных затрат. Построена модель рынка электроэнергии и мощности на основе аукциона единой цены. Показано, что

равновесие этой модели соответствует оптимальной структуре мощностей лишь при наличии полной информации о параметрах рынка у всех участников. Предложены правила аукциона, для которого указанное соответствие имеет место при информированности каждого участника лишь о своих параметрах.

**Публикации в изданиях из списка ВАК**


1) Васин А.А., Гусев А.Г. (2008). Математическое моделирование рынка форвардных контрактов. Вестник Московского университета, Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 3, 24-29.

2) Васин А.А., Гусев А.Г., Шарикова А.А. (2009). Теоретико-игровой анализ одноэтапных и двухэтапных аукционов однородного товара. Математическая теория игр и ее приложения, 1 (4), 3-30.

3) Васин А.А., Гусев А.Г., Шарикова А.А. (2010). Теоретико-игровой анализ одноэтапных и двухэтапных аукционов однородного товара. Управление большими системами: сборник трудов. 31-1, стр. 210-238. Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН;

4) Васин А.А., Гусев А.Г. (2011). О соотношении равновесия в функциях предложения и ожидаемого поведения на аукционе единой цены. Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета им. Н.Г. Чернышевского, 3, 46-52.


**Прочие публикации**


5) Гусев А.Г. (2008). Математическое моделирование форвардных контрактов на рынке электроэнергии. Сборник тезисов лучших дипломных работ 2008 года (стр. 46-47). Москва: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ.

6) Васин А.А., Гусев А.Г. (2011). Модели организации рынка мощности и электроэнергии. Ломоносовские чтения: Научная конференция, посвященная 300-летию со дня рождения М.В.Ломоносова: Тезисы докладов (стр. 17-18). Москва: МАКС Пресс.

7) Vasin A.A., Gusev A.G (2011). Mechanisms of Market Power Reduction at Electricity Markets. 19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies, (p. 54). Melbourne, Australia.

Подписано в печать: 22.04.2012
Объем 1,0 усл. п. л.
Тираж: 100 экз. Заказ № 121
Отпечатано в типографии «Реглет»
119526, г. Москва, Страстной бульвар, д. 6, стр. 1
(495) 978-43-34; www.reglet.ru