МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Райгородская Анастасия Викторовна

РАВНОВЕСНЫЕ СТРАТЕГИИ ПОВЕДЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор Кряжимский Аркадий Викторович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Васин Александр Алексеевич; доктор физико-математических наук, профессор Мазалов Владимир Викторович.
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН.

Защита диссертации состоится «30» мая 2012 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан «25» апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Настоящая диссертация посвящена изучению моделей многократных повторяющихся взаимодействий двух сторон (игроков). Модели такого рода мотивированы исследованиями в области популяционной биологии и социально-экономического поведения и формализованы, как управляемые повторяющиеся биматричные игры. Управляющими факторами выступают поведенческие стратегии игроков. Поведенческая стратегия игрока предписывает ему по окончании каждого раунда игры в зависимости от реализованных на этом раунде действий (чистых стратегий) игроков назначать свою смешанную стратегию (вероятностное правило выбора своей чистой стратегии) для реализации на следующем раунде. В качестве критерия эффективности поведенческой стратегии игрока выступает математическое ожидание его выигрыша, усредненного по всем раундам.

Для управляемых повторяющихся биматричных игр произвольной размерности с бесконечным числом раундов исследован вопрос о существовании равновесной по Нэшу пары поведенческих стратегий игроков. Приведен алгоритм программы, разработанной автором для численного нахождения равновесной пары поведенческих стратегий. Подробно изучены управляемые повторяющиеся биматричные игры размерности 2×2 – игра ε-наилучших ответов и игры ε-рандомизированного выбора «консерваторов» и «инноваторов», в которых каждому игроку в каждом последующем раунде допускается назначать смешанную стратегию, предписывающую с большой, но, вообще говоря, отличной от 1, вероятностью выбор чистой стратегии, соответствующей его типу поведения. Для этих классов управляемых повторяющихся игр дана классификация равновесных по Нэшу пар стратегий поведения и показана целесообразность рандомизации исходных детерминированных типов поведения для обоих игроков.

Актуальность темы

При моделировании и анализе взаимодействий, возникающих в природе, экономике, политике, военном деле важное место занимает теоретико-игровой подход. К примеру, теоретико-игровое понятие равновесия по Нэшу часто используют при изучении нерегулируемого рынка. Многочисленные исследования посвящены проблеме построения равновесных (взаимоприемлемых) решений в моделях многошаговых и стохастических игр. Активно изучаемый ныне подкласс многошаговых игр составляют повторяющиеся биматричные игры, выступающие в качестве моделей рациональных поведений взаимодействующих игроков с учетом их краткосрочных интересов. Общепринятой моделью такого рода является повторяющаяся «Дилемма заключенного» (R.D.Luce и H. Raiffa, R. Axelrod, M. Doebeli, B.N. Grofman, T. Killingback, M. Nowak, J. Pool, A. Rapoport, K. Sigmund, S. Smale, Л.А. Петросян, В.В. Захаров и др.). Модель допускает многочисленные интерпретации с точки зрения биологии, экономики, политологии, социологии, психологии. Повторяющаяся «Дилемма заключенного» организована таким образом, что при каждом однократном взаимодействии рациональный выбор каждого из игроков, делаемый им в изоляции от партнера, ведет к тому, что каждый из них получает меньший выигрыш, чем в случае, когда игроки совместно выбирают обоюдно оптимальное действие – кооперирование. Многократное повторение взаимодействий, с учетом опыта, создает предпосылки для положительного разрешения дилеммы в долгосрочной перспективе – для «обучения» кооперированию. Многие исследования посвящены анализу поведенческих схем, способствующих такому «обучению». В исследованиях этого рода доминирующая роль принадлежит численным экспериментам. К истокам численного экспериментирования относятся широко известные компьютерные турниры Аксельрода 1980-х годов[1], осуществившие столкновение различных поведенческих схем с выявлением «чемпионов».

Теория повторяющихся (эволюционных) игр представляет собой ветвь общей теории игр, восходящей к основополагающей работе Д. фон Неймана и О.Моргенштерна (1944 г.)[2] и концентрирующейся вокруг понятия игрового равновесия. Это центральное теоретико-игровое понятие, введенное в 1950-е годы Дж. Нэшем [3] [4], впоследствии обогатилось многочисленными вариантами. В развитии основ современной теории игр признан пионерский вклад отечественных ученых Ю.Б. Гермейера и Н.Н. Воробьева.

Возникновение к началу 1970-х годов теории повторяющихся взаимодействий связано с именем Р. Ауманна. Это направление исследований было сформировано в США под влиянием диалога специалистов по теории игр

[1]Axelrod R. The evolution of cooperation. New York: Basic Books, 1984.
[2]Нейман Дж., фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
[3]Nash J.F. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48-49.
[4]Nash J.F. *Noncooperative games* // Annals of mathematics. 1951. V.54. P.286-295.

с политиками по вопросам стратегии ядерного вооружения. Один из основных результатов, полученных в рамках этого направления (так называемая «народная теорема»), говорит о том, что при повторяющихся взаимодействиях игроки могут воздерживаться от действий, направленных на извлечение краткосрочной выгоды. «Народная теорема» лежит в основе методов принятия решений для различных моделей повторяющихся взаимодействий.

Теория повторяющихся (эволюционных) игр получила бурное развитие с конца 1980-х годов благодаря новым моделям популяционной биологии (K. Sigmund, J.Hofbauer, В.В. Захаров, Л.А. Петросян и др.) и экономики (D. Friedman, S. Smale, M. Smith и др.). Модели этого рода предполагают, как правило, наличие фиксированных, содержательно обоснованных правил взаимодействия. Соответствующие теоретико-игровые исследования посвящены, в основном, анализу долгосрочной динамики действий участников и их асимптотических свойств. Содержательная цель этих исследований состоит в выявлении, на модельном уровне, долгосрочных качественных феноменов (соотношений видов в биологических сообществах, распределений технологий в сообществах фирм и т. д.), которые могут возникнуть в результате столкновения тех или иных локально рациональных правил повторяющегося взаимодействия. В последние десятилетия в формирование теории повторяющихся (эволюционных) игр существенный вклад внесли работы таких ученых, как D. Friedman, D. Fudenberg, J. Hofbauer, Yu.M.Kaniovski, D.M. Kreps, M. Nowak, K. Sigmund, M. Smith, X. Tieman, G. Van der Laan, J. Weibull, H.P. Young, А.А. Васин, В.В. Захаров, А.Ф. Клейменов, А.В. Кряжимский, Ю.С. Осипов, Л.А. Петросян и другие авторы.

Настоящая диссертация примыкает к работе А.В. Кряжимского и Ю.С. Осипова[5], где вводится в рассмотрение динамическая игра на классах эволюционных игр, определяемых ограниченно рациональными поведенческими стратегиями игроков, и описываются равновесные по Нэшу пары поведенческих стратегий. Диссертация направлена на разработку инструментария для поддержки моделирования равновесных поведений в процессах многократно повторяющихся взаимодействий недетерминированного характера. Численное моделирование таких процессов связано с существенными сложностями. Одна из них вызвана тем, что устойчивость результата моделирования прояв-

[5]А.В.Кряжимский, Ю.С.Осипов *Об эволюционно-дифференциальных играх* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. 1995. Т. 211. С. 257-287.

ляется после реализации большого числа раундов, обрыв процесса моделирования на том или ином раунде может привести к некорректным оценкам. Другая сложность связана с вероятностным характером поведенческих стратегий игроков: их повторяющиеся взаимодействия формируют многошаговый случайный процесс, для моделирования которого требуется многократное симулирование (при, вообще говоря, неопределенной априорной оценке достаточного числа симуляций). Определение результирующих выигрышей игроков как математических ожиданий их усредненных выигрышей на всех раундах позволяет обойти эти трудности посредством рассмотрения предельного случая бесконечного числа раундов и математического анализа свойств соответствующих предельных выигрышей. Вариант такого рода анализа реализован в настоящей диссертационной работе.

Сказанным выше определяется актуальность темы диссертации.

Цель работы

В проводимом в диссертации исследовании ставятся следующие цели:

- Построить модель бесконечной управляемой повторяющейся биматричной игры произвольной размерности, определяемой классами поведенческих стратегий игроков. В рамках построенной модели изучить вопрос о существовании равновесных по Нэшу пар стратегий поведения.

- Создать алгоритм приближенного нахождения равновесных по Нэшу пар стратегий поведения и реализовать его в программном продукте.

- Для моделей бесконечных управляемых повторяющихся биматричных игр размерности 2×2, определяемых стохастически возмущенными вариантами некоторых типовых стратегий поведения, исследовать вопрос о существовании и структуре равновесных пар стратегий поведения. Сравнить равновесные значения со средними выигрышами в детерминированных повторяющихся играх, определяемых невозмущенными поведенческими стратегиями.

Научная новизна работы

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Построена модель управляемой бесконечной повторяющейся биматричной игры произвольной размерности, формализованная в классах стационарных стохастических стратегий поведения. Установлено существование ожидаемых средних выигрышей игроков как функций стратегий поведения.

2. В рамках построенной модели изучен вопрос о существовании равновесной по Нэшу пары стратегий поведения: существование равновесной пары доказано при условиях строгой рандомизированности, замкнутости и усиленной выпуклости множеств допустимых стратегий поведения игроков. Для общего случая множеств допустимых стратегий поведения игроков введено понятие порожденных этими множествами смешанных стратегий поведения и описаны классы допустимых смешанных поведения, в которых существует равновесие по Нэшу.

3. Создана программа GameCalculator для исследования и симуляций обобщенной модели стохастической повторяющейся игры поведений. Программа реализована в среде MatLab и предназначена для исследовательских экспериментов и использования в учебном процессе.

4. Для общей бесконечной управляемой повторяющейся биматричной игры размерности 2×2, в предположении отсутствия в исходной статической игре равновесий в чистых стратегиях, построены и изучены модели игр поведений в классах стохастических расширений (а) детерминированных стратегий наилучшего ответа, (б) детерминированных стратегий поведения «консерваторов», (в) детерминированных стратегий поведения «инноваторов», (г) комбинаций последних двух типов стратегий поведения. Во всех случаях вычислены равновесные стратегии поведения. Показано, что равновесные выигрыши игроков превосходят их выигрыши в соответствующих детерминированных повторяющихся играх. В плане сравнения с конечношаговыми моделями изучена двухшаговая игра поведений в классах стохастических расширений детерминированных стратегий наилучшего ответа: дана классификация равновесий по Нэшу и проведено сопоставление равновесных значений выигрышей со средними выигрышами в детерминированной двухшаговой игре наилучших ответов.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории игр, теории случайных процессов, функционального анализа, численных методов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Результаты диссертации имеют теоретическое значение. В работе установлены конструктивные условия, гарантирующие существование равновесий по Нэшу для моделей бесконечных управляемых повторяющихся биматричных игр произвольной размерности. На основе исследования расширений некоторых стандартных типов поведений игроков для бесконечных управляемых повторяющихся биматричных игр размерности 2×2 выявлены условия, при которых обеим взаимодействующим сторонам выгодно отклоняться от базовых правил поведения. Теоретические результаты диссертации могут быть использованы при анализе конкретных моделей игр поведений, а также для отладки численных методов моделирования повторяющихся взаимодействий, в частности, для идентификации временного шага, на котором начинает проявляться устойчивость значений ожидаемых средних выигрышей. Практическую ценность представляют результаты диссертации, связанные с численным построением функций выигрышей и равновесий по Нэшу в бесконечной управляемой повторяющейся биматричной игре произвольной размерности. Соответствующий программный продукт, представленный в диссертации, может быть использован для численного исследования конкретных моделей многократных повторяющихся взаимодействий.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Международной конференции по математической теории управления и механике, 1-5 июля 2011 г., Суздаль, название доклада «К выбору равновесного поведения в бесконечной повторяющейся игре размерности 2×2»,
- Конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященной 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, 16-17 апреля 2012 г., Москва, название доклада «Равновесные поведенческие стратегии в бесконечных повторяющихся играх»,

- Международной конференции «Ломоносов-2011», секция «Вычислительная математика и кибернетика», 12-14 апреля 2011 г., Москва, название доклада «Бесконечная повторяющаяся игра ε-наилучших ответов размерности 2×2»,
- Конференции «Тихоновские Чтения 2010», 26 октября 2010 г., Москва, название доклада «Повторяющаяся игра ε-наилучших ответов размерности 2×2»,
- Научном семинаре отдела управляемых систем Института математики и механики УрО РАН, 22 марта 2012 г., Екатеринбург,
- Семинарах «Игровые задачи управления», «Управляемые процессы в условиях неопределенности» и «Методы оптимизации в функциональных пространствах» кафедры Оптимального управления факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова,
- Научном семинаре «Экономический рост: модели и прогнозирование», 11-17 октября 2010 г., Валуево, название доклада «Стохастическая двухшаговая игра эпсилон-наилучших ответов размерности 2×2».

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях автора [1, 2, 3] и материалах конференций, все статьи опубликованы в изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК. Совместная работа [4] с научным руководителем А.В. Кряжимским принята в печать; в данной работе научному руководителю принадлежат постановка задачи, план исследования и редактирование рукописи.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Объем работы составляет 126 страницы текста, библиография включает 67 наименований.

Краткое содержание работы

Глава 1

В первой главе диссертации рассматривается бесконечная управляемая повторяющаяся биматричная игра размерности $n \times m$ с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ и $B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ соответственно первого и второго игроков[6]. Управляющими факторами выступают поведенческие стратегии игроков – смешанные стратегии, доставляющие игрокам некоторые правила вероятностного выбора их чистых стратегий на каждом следующем раунде игры в зависимости от пары чистых стратегий, реализованной на текущем раунде.

Глава состоит из шести разделов.

В разделе 1.1 строится модель бесконечной управляемой повторяющейся игры с указанными выше матрицами выигрыша и заданной начальной парой (i_0, j_0) чистых стратегий. При заданной паре стратегий поведения игроков для определяемой данной парой реализации игрового процесса вводится понятие ожидаемых средних выигрышей игроков и доказывается корректность этого определения.

Определение. Под *стратегией поведения первого игрока* понимается семейство $p = (p_{ij}^{i'})_{i,i'=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}$ неотрицательных чисел такое, что $p_{ij}^1 + \ldots + p_{ij}^n = 1$ для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Смысл величины $p_{ij}^{i'}$ – вероятность выбора первым игроком на следующем раунде чистой стратегии i' в ответ на выбор игроками пары (i, j) чистых стратегий на текущем раунде. Аналогично определяется стратегия поведения $q = (q_{ij}^{j'})_{i=1,\ldots,n,\ j,j'=1,\ldots,m}$ второго игрока.

Бесконечная повторяющаяся игра, соответствующая стратегиям поведения $p = (p_{ij}^{i'})_{i,i'=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}$ первого и $q = (q_{ij}^{j'})_{i=1,\ldots,n,\ j,j'=1,\ldots,m}$ второго игроков, есть случайный процесс пересчета чистых стратегий игроков, реализуемый в раундах $0, 1, \ldots$. Процесс начинается в раунде 0 из положения (i_0, j_0). Дальнейшее течение процесса определяется следующим правилом: если в раунде k первый и второй игроки реализуют свои стратегии i_k и j_k соответственно, то в раунде $k+1$ они реализуют свои чистые стратегии i_{k+1} и j_{k+1} с вероятностями $p_{i_k j_k}^{i_{k+1}}$ и $q_{i_k j_k}^{j_{k+1}}$ соответственно. В диссертации приведено также

[6] В соответствии со стандартом теории игр a_{ij} и b_{ij} есть значения выигрышей соответственно первого и второго игроков при выборе первым игроком своей чистой стратегии i и вторым игроком своей чистой стратегии j.

формальное определение обозначенного выше случайного (марковского) процесса. В соответствии с данной формализацией, множество всех траекторий $t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots)$ данного случайного процесса имеет структуру вероятностного пространства с некоторой вероятностью P. Для каждой траектории $t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots)$ и каждого $l = 1, 2, \ldots$ введем значения средних выигрышей игроков, реализуемых на первых l раундах повторяющейся игры вдоль данной траектории:

$$a_l(t) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} a_{i_k, j_k}, \quad b_l(t) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} b_{i_k, j_k}. \tag{1}$$

Функции $t \mapsto a_l(t)$ и $t \mapsto b_l(t)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ есть случайные величины на вероятностном пространстве всех траекторий. Математические ожидания случайных величин (1), т.е. значения

$$J_1^l = \int\limits_{X^l} a_l(t) P(dt), \quad J_2^l = \int\limits_{X^l} b_l(t) P(dt), \tag{2}$$

назовем *ожидаемыми средними выигрышами* первого и второго игроков в l раундах бесконечной повторяющейся игры, соответствующей паре (p, q) стратегий поведения.

Теорема 1. *Существуют пределы ожидаемых средних выигрышей (2):*

$$J_1^\infty = \lim_{l \to \infty} J_1^l, \quad J_2^\infty = \lim_{l \to \infty} J_2^l.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на известный результат из теории случайных процессов, утверждающий, что для любого марковского процесса с конченым числом состояний существует предел по Чезаро степеней его переходной матрицы. Заметим, что значения, указанные в теореме 1, зависят от выбранной пары (p, q) стратегий поведения: $J_1^\infty = J_1^\infty(p, q)$, $J_2^\infty = J_2^\infty(p, q)$.

В разделе 1.2 устанавливается существование равновесия в бесконечной управляемой повторяющейся игре со строго рандомизированными, усиленно выпуклыми и замкнутыми множествами допустимых стратегий поведения первого и второго игроков.

Зафиксируем непустое множество S_1 стратегий поведения первого игрока и непустое множество S_2 стратегий поведения второго игрока. Данная пара множеств и определенная на их произведении пара функций $(p, q) \mapsto$

$J_1^\infty(p,q)$, $(p,q) \mapsto J_2^\infty(p,q)$ задают игру, которую называем *игрой поведений* (с множествами S_1, S_2 стратегий поведения).

Определение. Пару $(p^0, q^0) \in S_1 \times S_2$ называем *равновесной* (по Нэшу) парой стратегий поведения, если для любых $p \in S_1$ и $q \in S_2$ выполняются неравенства $J_1^\infty(p^0,q^0) \geq J_1^\infty(p,q^0)$ и $J_2^\infty(p^0,q^0) \geq J_2^\infty(p^0,q)$.

Легко видеть, что для любых стратегий поведения $p^{(1)} = (p_{ij}^{(1)i'})_{i,i'=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$, $p^{(2)} = (p_{ij}^{(2)i'})_{i,i'=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$ первого игрока и любых $\lambda_{ij} \in [0,1]$ $(i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$ семейство $p = (p_{ij}^{i'})_{i,i'=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$, где

$$p_{ij}^{i'} = \lambda_{ij} p_{ij}^{(1)i'} + (1-\lambda_{ij}) p_{ij}^{(2)i'} \qquad (i,i' = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m), \tag{3}$$

есть стратегия поведения первого игрока.

Определение. Будем говорить, что множество S_1 *усиленно выпукло*, если для любых его элементов $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ и любых $\lambda_{ij} \in [0,1]$ $(i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$ стратегия поведения p первого игрока, определенная по (3), содержится в S_1.

Содержательно усиленная выпуклость множества S_1 означает, что допустимые выборы первым игроком своих смешанных стратегий в качестве ответов (на следующем раунде) на различные комбинации пар чистых стратегий (на текущем раунде) ограничены выпуклыми множествами и не связаны между собой.

Определение. Стратегию поведения $p = (p_{ij}^{i'})_{i,i'=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$ первого игрока будем называть *строго рандомизированной*, если $p_{ij}^{i'} > 0$ для всех $i,i' = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$.

Определение. Множество S_1 стратегий поведения первого игрока называем *строго рандомизированным*, если все его элементы строго рандомизированы.

Аналогично вводятся определения усиленной выпуклости и строгой рандомизированности множества S_2 стратегий поведения второго игрока.

Теорема 2. *Пусть множества S_1 стратегий поведения первого игрока и S_2 стратегий поведения второго игрока строго рандомизированы, замкнуты*[7] *и усиленно выпуклы. Тогда в игре поведений с множествами S_1 и S_2 допустимых стратегий поведения игроков существует равновесная пара стратегий поведения.*

[7]Замкнутость множеств S_1 и S_2 понимается в смысле евклидовых пространств $(R^{nm})^n$ и $(R^{nm})^m$, в которые эти множества естественным образом вкладываются.

Доказательство теоремы основано на свойствах стационарных распределений в бесконечных повторяющихся играх, определяемых строго рандомизированными стратегиями поведения, и на применении теоремы Какутани о неподвижной точке многозначного отображения.

Разделы 1.3 и 1.4 продолжают рассмотрение случая, когда множества S_1 и S_2 стратегий поведения игроков строго рандомизированы и замкнуты. При этом предполагается, что условие их усиленной выпуклости, достаточное для существования равновесной пары стратегий поведения, вообще говоря, не имеет места. В этой ситуации равновесной пары стратегий поведения может, вообще говоря, не существовать.

Ставится вопрос о расширении множеств S_1 и S_2, при котором в игре поведений обеспечивается существование равновесной пары стратегий поведения. Рассматривается два типа расширений. Первый тип, введенный в разделе 1.3, связан с понятием усиленных выпуклых оболочек множеств S_1 и S_2, аналогичным известному в выпуклом анализе понятию выпуклых оболочек.

Определение. Пару $(\bar{S}_1, \bar{S}_2)$, где $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ – множества стратегий поведения соответственно первого и второго игроков, назовем *корректным расширением* пары (S_1, S_2), если $S_1 \subset \bar{S}_1$, $S_2 \subset \bar{S}_2$ и в игре поведений с множествами $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ стратегий поведения соответственно первого и второго игроков существует равновесная пара стратегий поведения.

Определение. *Усиленно выпуклой оболочкой* множества S_1 (соответственно множества S_2) назовем множество $\overline{\mathrm{co}}(S_1)$ (соответственно $\overline{\mathrm{co}}(S_2)$), определяемое, как пересечение всех усиленно выпуклых множеств стратегий поведения первого игрока, содержащих S_1 (соответственно множества S_2).

На вопрос о построении корректного расширения пары (S_1, S_2) отвечает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть множества S_1 и S_2 замкнуты и строго рандомизированы. Тогда пара $(\overline{\mathrm{co}}(S_1), \overline{\mathrm{co}}(S_2))$ стратегий поведения есть корректное расширение пары (S_1, S_2).*

В разделе 1.4 вводится второй тип расширений допустимых стратегий поведения – смешанные стратегии поведения.

Определение. *Смешанной стратегией поведения* первого игрока (с носителем S_1) назовем всякую борелевскую вероятностную меру на S_1; аналогично, *смешанной стратегией поведения* второго игрока (с носителем S_2)

назовем всякую борелевскую вероятностную меру на S_2.

Множества всех смешанных стратегий поведения первого и второго игроков обозначим, соответственно, $\mathrm{mix}(S_1)$ и $\mathrm{mix}(S_2)$.

Содержательная интерпретация применения первым игроком выбранной им смешанной стратегии поведения $\mu \in \mathrm{mix}(S_1)$ такова. До начала повторяющейся игры первый игрок, руководствуясь вероятностной мерой μ, делает случайное испытание по выбору своей стратегии поведения $p \in S_1$. Затем, руководствуясь стратегией поведения p, первый игрок на каждом раунде повторяющейся игры выбирает свою чистую стратегию. Содержательная интерпретация применения вторым игроком выбранной им смешанной стратегии поведения аналогична.

Ожидаемые выигрыши первого и второго игроков в бесконечной повторяющейся игре при смешанных стратегиях поведения $\mu \in \mathrm{mix}(S_1)$ и $\nu \in \mathrm{mix}(S_2)$ определим, соответственно, как

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1^{\infty}(\mu,\nu) &= \int\limits_{S_1\times S_2} J_1^{\infty}(p,q)(\mu\times\nu)(d(p,q)),\\
\bar{J}_2^{\infty}(\mu,\nu) &= \int\limits_{S_1\times S_2} J_2^{\infty}(p,q)(\mu\times\nu)(d(p,q)).
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть множества S_1 и S_2 замкнуты и строго рандомизированы. Тогда существует равновесная пара смешанных стратегий поведения.*

В разделе 1.5 предполагаем, что множества S_1, S_2 стратегий поведения соответственно первого и второго игроков есть произвольные борелевские подмножества пространств $(R^{nm})^n$, $(R^{nm})^m$ соответственно, т.е. они не обязательно являются замкнутыми и строго рандомизироваными.

При сделанных предположениях функции $(p,q) \mapsto J_1^{\infty}(p,q)$ и $(p,q) \mapsto J_2^{\infty}(p,q)$ ожидаемых выигрышей игроков, вообще говоря, разрывны (соответствующий пример приведен в главе 3, см. ниже комментарий к таблице 1), поэтому в классах $\mathrm{mix}(S_1)$ и $\mathrm{mix}(S_2)$ максимумы, соответственно, функций $\mu \mapsto \bar{J}_1^{\infty}(\mu,\nu)$ и $\nu \mapsto \bar{J}_2^{\infty}(\mu,\nu)$, могут, вообще говоря, не достигаться. Это ставит под сомнение корректность определения равновесия по Нэшу в классах $\mathrm{mix}(S_1)$ и $\mathrm{mix}(S_2)$. Иначе говоря, корректное определение ожидаемых выигрышей игроков, соответствующих смешанным стратегиям поведения, требует сужений классов $\mathrm{mix}(S_1)$, $\mathrm{mix}(S_2)$. Соответствующие суженные классы смешанных стратегий поведения назовем допустимыми.

Определение. *Допустимой смешанной стратегией поведения* первого игрока будем называть всякую вероятностную меру $\mu \in \mathrm{mix}(S_1)$ такую, что для каждого борелевского множества $E \subset S_1$ выполняется

$$\mu(E) = \int_E g(p)dp + \sum_{k=1}^{l_1} a_k \chi^{(1)}(E|p^{(k)}); \tag{4}$$

здесь $p^{(1)}, \ldots, p^{(l_1)}$ – попарно различные элементы из S_1, $a_1, \ldots, a_{l_1}$ – неотрицательные числа, g – неотрицательная интегрируемая по Борелю функция на S_1,

$$\mu(S_1) = \int_{S_1} g(p)dp + \sum_{k=1}^{l_1} a_k = 1$$

и $\chi^{(1)}(E|p^{(k)})$ равно 1 при $p^{(k)} \in E$ и равно 0 в противном случае.

Аналогично вводится определение допустимой смешанной стратегии поведения второго игрока:

$$\nu(E) = \int_E h(p)dp + \sum_{k=1}^{l_2} b_k \chi^{(2)}(E|q^{(k)}). \tag{5}$$

Определение. *Ожидаемый выигрыш* первого игрока, соответствующий допустимым смешанным стратегиям поведения μ (4) первого игрока и ν (5) второго игрока определим, как математическое ожидание функции $J_1^{\infty}(\cdot)$ на борелевском вероятностном пространстве с мерой μ:

$$\begin{aligned} J_1^{\infty}(\mu,\nu) \;\; = \;\; & \int_{S_1}\int_{S_2} g(p)h(q)J_1^{\infty}(p,q)dpdq + \\ & + \int_{S_2} h(q)\sum_{k=1}^{l_1} a_k J_1^{\infty}(p^{(k)},q)dq + \int_{S_1} g(p)\sum_{s=1}^{l_2} b_s J_1^{\infty}(p,q^{(s)})dp + \\ & + \sum_{k=1}^{l_1}\sum_{s=1}^{l_2} a_k b_s J_1^{\infty}(p^{(k)},q^{(s)}); \end{aligned}$$

Аналогично определим *ожидаемый выигрыш* $J_2^{\infty}(\mu,\nu)$ второго игрока.

Зададим непустое множество M допустимых смешанных стратегий поведения μ первого игрока вида (4) со следующими свойствами:

(i) M *выпукло* в том смысле, что если $\mu_1 = (g_1, a^{(11)}, \ldots, a^{(1l_1)}) \in M$, $\mu_2 = (g_2, a^{(21)}, \ldots, a^{(2l_1)}) \in M$, то $\mu = (\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2, \lambda a^{(11)} + (1-\lambda)a^{(21)}, \ldots, \lambda a^{(1l_1)} + (1-\lambda)a^{(2l_1)}) \in M$;

(ii) множество M *ограничено* в том смысле, что при некотором $K \geq 0$ для всех $\mu \in M$ вида (4) L^2-норма функции g не превосходит K,

(iii) множество M *замкнуто в* $L^2_w \times R^{l_1}$, где L^2_w – банахово пространство всех суммируемых с квадратом евклидовой нормы скалярных функций на S_1, снабженное слабой нормой; точнее, если $\mu^k = (g_k, a^{(k1)}, \ldots, a^{(kl_1)}) \in M$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $g_k \to g$ слабо в L^2_w, $(a^{(k1)}, \ldots, a^{(kl_1)}) \to (a^{(1)}, \ldots, a^{(l_1)})$ в R^{l_1}, то $\mu = (g, a^{(1)}, \ldots, a^{(l_1)}) \in M$.

Также зададим непустое множество N допустимых смешанных стратегий поведения ν второго игрока вида (5), обладающее аналогичными свойствами выпуклости, ограниченности и замкнутости.

Теорема 5. *В классах M и N смешанных стратегий поведения существует равновесие по Нэшу.*

Раздел 1.6 посвящен описанию алгоритма разработанной в среде MatLab программы GameCalulator. Программа разработана для исследования обобщенной модели стохастической повторяющейся игры поведений и представляет собой алгоритм численного построения функций выигрышей и приближенного нахождения равновесия по Нэшу.

Перед началом работы программы подаются следующие входные данные:

- Матрицы выигрышей $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m}$ и $B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m}$ соответственно первого и второго игроков.

- Множество S_1 стратегий поведения первого игрока и множество S_2 стратегий поведения второго игрока задаются границами интервалов, в которых могут изменяться значения стратегий поведения $p = (p_{ij}^{i'})_{i,i'=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}$ и $q = (q_{ij}^{j'})_{i=1,\ldots,n,\ j,j'=1,\ldots,m}$ первого и второго игроков. Для выполнения условия усиленной выпуклости, для каждой пары (i, j), $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ задаются независимые интервалы, которые никак не связаны между собой.

- Число $T > 0$, которое задает количество узлов сетки разбиений интервалов.

- Значение $\delta > 0$, задающее точность вычислений.

Результатом работы программы является пара стратегий поведения $p^*_{(t)}$ и $q^*_{(t)}$ первого и второго игроков и соответствующие им ожидаемые средние выигрыши.

Теорема 6. *При $T \to \infty$ и $\delta \to 0$ численная пара $(p^*_{(t)}, q^*_{(t)})$ оптимальных стратегий поведения сходится к паре стратегий поведения $(p^0,\ q^0)$, где $(p^0,\ q^0)$ – одна из равновесных (по Нэшу) пар стратегий поведения в бесконечной повторяющейся игре с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ и $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ и множествами S_1 стратегий поведения первого игрока и S_2 стратегий поведения второго игрока.*

Глава 2

Главы 2 и 3 посвящены рассмотрению повторяющихся биматричных игр размерности 2×2 с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ соответственно первого и второго игроков. Предполагается, что в биматричной игре с данными матрицами выигрышей не существует точек равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Тогда существует единственная точка равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях; при этом, не нарушая общности, можно считать, что

$$b_{12} > b_{11}, \quad b_{21} > b_{22}, \quad a_{11} > a_{21}, \quad a_{22} > a_{12}. \tag{6}$$

Далее предполагаем, что неравенства (6) имеют место. Эти неравенства для каждого игрока определяют его чистую стратегию наилучшего ответа на всякую чистую стратегию партнера. В данной модели смешанная стратегия игрока отождествляется с числом из отрезка $[0, 1]$, задающим вероятность выбора этим игроком своей чистой стратегии 1, вероятность выбора им чистой стратегии 2 при этом определяется автоматически.

В главе 2 рассматривается повторяющаяся биматричная игра размерности 2×2, в которой выбор стратегии каждым игроком в каждом последующем раунде диктуется желанием данного игрока наилучшим для себя образом ответить на последнее действие партнера. Отправной моделью служит, таким образом, детерминированная повторяющаяся игра наилучших ответов, в которой данное правило принятия решений применяется без каких-либо отклонений, описание этой повторяющейся игры приведено в разделе 2.1.

В разделе 2.2 классы поведенческих стратегий игроков расширяются: каждому игроку разрешается принимать решение о выборе своей чистой стратегии на следующем раунде, основываясь на результате случайного эксперимента. Для каждого игрока в качестве поведенческой стратегии выступает та или иная функция ε-наилучшего ответа.

Определение. *Функцией ε-наилучшего ответа первого игрока* назовем любую пару (α_1, α_2) смешанных стратегий первого игрока такую, что

$$1 \geq \alpha_1 \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \varepsilon.$$

Данное определение подразумевает, что первый игрок, в ответ на реализацию вторым игроком, на текущем раунде, чистой стратегии j, выбирает – для реализации на следующем раунде – смешанную стратегию α_j, при этом, ввиду (6), он придает большую вероятность своей чистой стратегии наилучшего ответа на реализованную чистую стратегию j второго игрока. Аналогичное определение принимается в отношении второго игрока.

Определение. *Функцией ε-наилучшего ответа второго игрока* назовем любую пару (β_1, β_2) смешанных стратегий второго игрока такую, что

$$0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon, \quad 1 \geq \beta_2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Определение. Каждую пару

$$S = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)), \tag{7}$$

где (α_1, α_2) – функция ε-наилучшего ответа первого игрока и (β_1, β_2) – функция ε-наилучшего ответа второго игрока, будем называть *парой функций ε-наилучших ответов* игроков.

Для произвольной пары S (7) функций ε-наилучших ответов игроков рассмотрим случайный процесс,представляющий *бесконечную повторяющуюся игру ε-наилучших ответов*, соответствующую S. Процесс состоит из раундов $0, 1, 2, \ldots$, в каждом из которых игроки разыгрывают описанную в начале данной главы биматричную игру. Процесс развивается по следующей схеме. В раунде 0 реализуется начальная пара (i_0, j_0) чистых стратегий игроков. Если в раунде k реализуется пара (i_k, j_k) чистых стратегий игроков, то первый игрок для выбора своей чистой стратегии i_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию α_{j_k}; аналогично, второй игрок для выбора своей чистой стратегии j_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию β_{i_k}. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. При $\varepsilon = 0$ повторяющаяся игра ε-наилучших ответов переходит в (детерминированную) повторяющуюся игру наилучших ответов.

Следуя рассмотренному в главе 1 общему случаю, математические ожидания средних выигрышей (1), задаваемые выражениями

$$a_l[S] = \int\limits_{X^l} a_l(t)P(dt), \quad b_l[S] = \int\limits_{X^l} b_l(t)P(dt), \tag{8}$$

назовем *ожидаемыми средними выигрышами*, соответственно, первого и второго игроков в l раундах повторяющейся игры ε-наилучшего ответа, соответствующей паре S функций ε-наилучших ответов игроков.

Раздел 2.3 посвящен вычислению предела ожидаемых средних выигрышей (8) при $l \to \infty$. Основную часть анализа составляет вывод следующего представления:

$$a_k[S] = \begin{cases} (\bar{\beta}^T\bar{\alpha})^{\frac{k}{2}}A(\bar{\beta}\bar{\alpha}^T)^{\frac{k}{2}}, & \textit{если } k \textit{ четно} \\ (\bar{\beta}^T\bar{\alpha})^{\frac{k-1}{2}}\bar{\beta}^T A^T\bar{\alpha}^T(\bar{\beta}\bar{\alpha}^T)^{\frac{k-1}{2}}, & \textit{если } k \textit{ нечетно} \end{cases},$$

где

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}[S] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}[S] = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1-\beta_1 & 1-\beta_2 \end{pmatrix}.$$

При помощи данного представления получен явный вид пределов ожидаемых средних выигрышей (8) при $l \to \infty$.

Теорема 7. *Предел ожидаемого среднего выигрыша $a_l[S]$ (8) первого игрока в l раундах бесконечной повторяющейся игры ε-наилучших ответов, соответствующей паре S (7), при $l \to \infty$ существует и равен*

$$a^{(\infty)}[S] = \omega_* a_{11}\omega_{**} + (1-\omega_*)a_{21}\omega_{**} + \omega_* a_{12}(1-\omega_{**}) + (1-\omega_*)a_{22}(1-\omega_{**}),$$

где

$$\omega_* = \omega_*[S] = \frac{\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2}{1-(\beta_1-\beta_2)(\alpha_1-\alpha_2)}, \quad \omega_{**} = \omega_{**}[S] = \frac{\alpha_2(\beta_1-\beta_2)+\beta_2}{1+(\beta_2-\beta_1)(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

В отношении второго игрока справедлив аналогичный результат.

Раздел 2.4 посвящен поиску равновесных функций ε-наилучшего ответа.

Определение. Пару $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$ функций ε-наилучших ответов игроков назовем *равновесной* (по Нэшу) в бесконечной повторяющейся игре ε-наилучших ответов, если для любого ε-наилучшего ответа (α_1, α_2) первого игрока верно $a^{(\infty)}[S_1^*] \leq a^{(\infty)}[S^*]$, где $S_1^* = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, и для любого ε-наилучшего ответа (β_1, β_2) второго игрока верно $b^{(\infty)}[S_2^*] \leq b^{(\infty)}[S^*]$, где $S_2^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))$.

Полученный результат состоит в следующем. При достаточно малом ε в бесконечной повторяющейся игре ε-наилучших ответов каждый игрок имеет оптимальную функцию ε-наилучшего ответа, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш вне зависимости от выбора партнером своей функции ε-наилучшего ответа. Структура оптимальной функции ε-наилучшего ответа игрока зависит от соотношений между элементами матрицы выигрышей этого игрока и не зависит от матрицы выигрышей его партнера. Оптимальная функция (α_1^*, α_2^*) ε-наилучшего ответа первого игрока имеет вид $(1-\varepsilon, 0)$ либо $(1, \varepsilon)$, т.е. одна из ее компонент остается чистой стратегией наилучшего ответа, другая же максимально рандомизируется. Аналогичные наблюдения справедливы в отношении оптимальной функции (β_1^*, β_2^*) ε-наилучшего ответа второго игрока. Пара оптимальных функций ε-наилучшего ответа является равновесной. Из данного результата следует, что для каждого из игроков малая рандомизация ответного выбора является целесообразной: переход обоих игроков от исходных детерминированных стратегий наилучшего ответа к оптимальным (частично рандомизированным) стратегиям ε-наилучшего ответа ведет к увеличению значения среднего ожидаемого выигрыша для каждого из них.

Раздел 2.5 посвящен рассмотрению двухшаговой повторяющейся игры ε-наилучших ответов, как частного случая повторяющейся игры с конечным числом раундов. Для нее также даются ответы на вопросы о существовании и структуре равновесной пары стратегий поведения игроков.

Глава 3

В третьей главе изучаются повторяющиеся биматричные игры размерности 2×2 с матрицами выигрышей, введенными в главе 2, которые отвечают рандомизированным комбинациям двух стандартных типов поведения, условно названных «консерватизм» и «инноваторство». *Игрок-консерватор* не меняет номера своей чистой стратегии на следующем раунде. *Игрок-инноватор* в раунде $k+1$ применяет чистую стратегию, отличную от чистой стратегии, примененной им в раунде k.

Под *бесконечной повторяющейся игрой с двумя типами поведения* понимается процесс повторения исходной биматричной игры в бесконечной последовательности раундов $0, 1, 2, \ldots$ при условии, что каждый игрок является либо консерватором, либо инноватором: в раунде 0 реализуется априорно заданная пара (i_0, j_0) чистых стратегий, и в каждом раунде $k+1$ каждый игрок применяет свою чистую стратегию в соответствии со своим типом поведения в зависимости от его чистой стратегии, реализованной в раунде k.

Далее вводится в рассмотрение процесс, аналогичный бесконечной повторяющейся игре с двумя типами поведения, в котором, однако, игроки в каждом последующем раунде отдают лишь вероятностные предпочтения своим чистым стратегиям, соответствующим их типам поведения. В этом процессе для каждого игрока в качестве инструмента генерирования решений выступает та или иная функция ε-релаксированного выбора. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Определение. *Функцией ε-релаксированного выбора первого игрока* назовем любую пару $(\alpha, 1-\alpha)$ смешанных стратегий первого игрока такую, что

(а) $1 \geq \alpha \geq 1-\varepsilon$, если первый игрок – консерватор;

(б) $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$, если первый игрок – инноватор.

Данное определение подразумевает, что первый игрок в раунде $k+1$ выбирает свою смешанную стратегию α при реализации в раунде k своей чистой стратегии 1 и выбирает смешанную стратегию $1-\alpha$ при реализации в раунде k своей смешанной стратегии 2. Из определения следует, что, будучи консерватором, первый игрок в раунде $k+1$ задает большую вероятность своей чистой стратегии, реализованной в раунде k, и, будучи инноватором, задает большую вероятность своей чистой стратегии, отличной от реализованной им в раунде k. При $\alpha = 1$ называем первого игрока *чистым консерватором*, при $1 > \alpha \geq 1-\varepsilon$ – *ε-консерватизмом*, при $\alpha = 0$ – *чистым инноватором*, при $0 < \alpha \leq \varepsilon$ – *ε-инноватором*. Аналогичные определения даются в отношении второго игрока.

Определение. Каждую пару

$$S = ((\alpha, 1-\alpha), (\beta, 1-\beta)), \tag{9}$$

где $(\alpha, 1-\alpha)$ – функция ε-релаксированного выбора первого игрока и $(\beta, 1-\beta)$ – функция ε-релаксированного выбора второго игрока, называем *парой функций ε-релаксированного выбора* игроков.

Для произвольной пары S (9) функций ε-релаксированного выбора игроков рассмотрим случайный процесс, который назовем *ε-релаксированной бесконечной повторяющейся игрой*, соответствующей S. Процесс состоит из раундов $0, 1, 2, \ldots$, в каждом из которых игроки разыгрывают биматричную игру. Процесс развивается по следующей схеме. В раунде 0 реализуется начальная пара (i_0, j_0) чистых стратегий игроков. Если в раунде k реализуется пара (i_k, j_k) чистых стратегий игроков, то первый игрок для выбора своей чистой стратегии i_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию α, если $i_k = 1$, и стратегию $(1-\alpha)$, если $i_k = 2$. Аналогично, второй игрок для выбора своей чистой стратегии j_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию β, если $j_k = 1$ и стратегию $(1-\beta)$, если $j_k = 2$. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель поведения взаимодействующих игроков, которая, в случае $\varepsilon > 0$, допускает большую гибкость в выборе действий по сравнению с детерминированной игрой: в каждом последующем раунде каждый игрок выбирает свою будущую чистую стратегию из условия вероятностного предпочтения своей чистой стратегии, соответствующей его типу поведения.

Аналогично предыдущим главам, выигрышами игроков выступают математические ожидания их средних выигрышей, получаемых на протяжении всех раундов.

Теорема 8. *Для ε-релаксированной бесконечной повторяющейся игры, соответствующей паре S функций ε-релаксированного выбора игроков (9), существует предел*

$$a^{(\infty)}[S] = \lim_{l \to \infty} a_l[S], \tag{10}$$

значения которого приведены в таблице 1.

Предел $a^{(\infty)}[S]$ (10) будем называть *ожидаемым выигрышем* первого игрока в ε-релаксированной бесконечной повторяющейся игре, соответствующей паре S (9).

Таблица 1.

Условия	Поведение первого игрока	Поведение второго игрока	$a^{(\infty)}[S]$
$\alpha, \beta \in (0,1)$	ε-консерватор либо ε-инноватор	ε-консерватор либо ε-инноватор	$\frac{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}{4}$
$\alpha = 1,\ \beta \in (0,1)$	чистый консерватор	ε-консерватор либо ε-инноватор	$\frac{a_{11}+a_{12}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,1),(1,2)\})$, $\frac{a_{21}+a_{22}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(2,1),(2,2)\})$.
$\alpha = 0,\ \beta \in (0,1)$	чистый инноватор	ε-консерватор либо ε-инноватор	$\frac{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}{4}$
$\alpha \in (0,1),\ \beta = 1$	ε-консерватор либо ε-инноватор	чистый консерватор	$\frac{a_{11}+a_{21}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,1),(2,1)\})$, $\frac{a_{12}+a_{22}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,2),(2,2)\})$.
$\alpha \in (0,1),\ \beta = 0$	ε-консерватор либо ε-инноватор	чистый инноватор	$\frac{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}{4}$
$\alpha = 1,\ \beta = 1$	чистый консерватор	чистый консерватор	a_{i_0,j_0}
$\alpha = 0,\ \beta = 1$	чистый инноватор	чистый консерватор	$\frac{a_{11}+a_{21}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,1),(2,1)\})$, $\frac{a_{12}+a_{22}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,2),(2,2)\})$
$\alpha = 1,\ \beta = 0$	чистый консерватор	чистый инноватор	$\frac{a_{11}+a_{12}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,1),(1,2)\})$, $\frac{a_{21}+a_{22}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(2,1),(2,2)\})$
$\alpha = 0,\ \beta = 0$	чистый инноватор	чистый инноватор	$\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,1),(2,2)\})$, $\frac{a_{12}+a_{21}}{2}$ $((i_0,j_0) \in \{(1,2),(2,1)\})$

Отметим, что, как видно из таблицы 1, при стремлении первого игрока от ε-консерватизма к чистому консерватизму, т. е. при стремлении α к 1 снизу (без вариаций вторым игроков значения β), его ожидаемый средний выигрыш $a[S]$, вообще говоря, не стремится к значению, соответствующему случаю $\alpha = 1$, т. е. чистому консерватизму. Такого же рода разрывы имеют место при стремлении α к 0 сверху.

Утверждение, аналогичное теореме 8, справедливо в отношении второго игрока.

На основании таблицы 1 и аналогичной ей таблицы, составленной для второго игрока, дана классификация равновесных по Нэшу пар функций ε-релаксированного выбора при всевозможных сочетаниях оговоренных выше типов игроков. Равновесные пары, как и в случае бесконечной повторяющейся игры ε-наилучших ответов, являются частично рандомизированными; в содержательном аспекте это означает, что рандомизация базовых типов поведения оказывается целесообразной для обоих игроков.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору Аркадию Викторовичу Кряжимскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и многолетнюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Райгородская А.В. *К выбору равновесного поведения в бесконечной повторяющейся игре размерности* 2×2*: случай игроков-консерваторов и игроков-инноваторов* // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 1. С. 15-22.

[2] А.В. Райгородская. *Равновесные поведения игроков в бесконечной повторяющейся игре* ε*-наилучших ответов размерности* 2×2 // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 201–216.

[3] А.В. Райгородская. *Стохастическая двухшаговая игра* ε*-наилучших ответов размерности* 2×2 // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 4. С. 84-105.

[4] А.В. Кряжимский, А.В. Райгородская. *О равновесных стратегиях поведения в бесконечных повторяющихся играх* // Проблемы динамического управления. М.: МАКС Пресс. 2012. Вып. 6. С. 133-159.