

Складчиков Сергей Андреевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

Специальность – 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета ВМК  
МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: Доктор физико - математических наук Савенкова Надежда Петровна  
Научный консультант: Кандидат физико - математических наук Юсупалиев Усен  
Официальные оппоненты: Доктор физико - математических наук Рухадзе Анри Амвросьевич, учреждение российской академии наук институт общей физики имени А.М. Прохорова, главный научный сотрудник.

Доктор физико - математических наук Высикайло Филипп Иванович государственный научный центр российской федерации Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: ИПМ имени М.В. Келдыша РАН

Защита состоится 26 сентября в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП – 1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова <http://www.cmc.msu.ru> в разделе “Наука” – “Работа диссертационных советов” – “ Д 501.001.43 ”.

Автореферат разослан “ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2012г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико-математических наук, профессор  
Е.В. Захаров

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая работа посвящена математическому моделированию образования тороидальных вихрей различной физической природы и численному исследованию динамики развития вихревых структур на сферической поверхности.

### **Актуальность диссертации**

Несмотря на давнюю историю исследования тороидальных вихрей (ТВ) (вихревых колец, плазменных тороидальных вихрей (ПТВ)) процесс их образования изучен недостаточно подробно. До сих пор детально не изучены такие важные характеристики, как распределение трёхмерного поля скоростей, распределение плотности и температуры в вихрях в различные моменты времени при их образовании. Это связано с тем, что определение этих локальных характеристик ТВ в экспериментальном отношении представляет значительные трудности. Так, при диаметре ТВ 10 см для получения поля скоростей необходимо одновременно измерить скорость, плотность и температуру жидкости (плазмы, газа), по крайней мере, в 500-1000 точках, что современными экспериментальными методами практически невозможно реализовать. По этой причине количество экспериментальных работ по определению локальных величин мало. Работы по определению распределения плотности в ТВ вообще отсутствуют. Однако, для решения ряда прикладных задач с использованием ТВ (тушение пожаров на газопроводах, разработка нелетального оружия, разработка методов повышения КПД сгорания топлива ТЭЦ) необходимо знать именно пространственно-временные распределения скоростей, плотности и температуры в таких вихрях.

Анализ наблюдения тропических циклонов (атмосферных вихрей) и опытных данных по исследованию ТВ показывает, что общей закономерностью для указанных вихрей является установление в них радиального распределения вращательной скорости, состоящего из центрального твердотельного ядра вращения и вязкого внешнего слоя. Именно вихри с таким распределением обладают большей устойчивостью: характерное время жизни тропических циклонов составляет несколько суток, ТВ различной природы до своего распада проходят расстояние от 100 до 600 раз больше их начального диаметра, при этом равный по объему объект без вихревого движения среды проходит небольшое расстояние, сравнимое с его начальным диаметром. До сих пор не достаточно подробно исследованы причины устойчивого существования таких вихрей. Устойчивость указанных вихрей можно объяснить наличием в них источников энергии (различной природы) и физических механизмов преобразования энергии этих источников в энергию их вращательного движения. Основным источником энергии тропического циклона служит скрытая теплота испарения воды,

которая освобождается при конденсации водяных паров (фазовом переходе). В плазменном ТВ в воздухе и ТВ в воздухе и воде источником энергии является наружный вязкий слой. В плазменном ТВ, кроме того, имеются дополнительные источники энергии – процесс рекомбинации ионов и электронов, химические реакции атомов и молекул.

Однако, в настоящее время не достаточно подробно изучены закономерности физических механизмов преобразования энергии вышеперечисленных источников в энергию вращательного движения вихрей. По этой причине до сих пор не удается определить зависимость величины КПД преобразования энергии источников в энергию вращательного движения вихрей от характеристик вихрей. А определение такой зависимости для КПД является одной из основных проблем исследования тропических циклонов. Знание закономерностей физических механизмов самоподдержания и усиления вихрей представляет собой один из ключевых моментов в исследовании тропических циклонов, и открывает возможность предсказания погоды. Следовательно, изучение закономерностей физических механизмов самоподдержания и усиления вихрей является актуальным. Отсюда возникает необходимость проведения адекватного математического моделирования процессов образования и динамики тороидальных вихрей, атмосферных вихрей и механизма самоподдержания и усиления вихрей.

### **Цель работы**

Целью настоящей диссертационной работы является:

1. разработка математической модели тороидального вихря, позволяющей исследовать образование и динамику развития вихря во времени с учетом его энергетических характеристик (поступательной и вращательной энергии тороидального вихря, энергии диссипации);
2. проведение математического моделирования физического механизма самоподдержания и усиления вихрей при нагревании их веществ по периметру;
3. проведение математического моделирования образования группы вихрей на поверхности сферического объекта;
4. осуществление программной реализации разработанных математических моделей.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Построена математическая модель тороидального вихря на основе трехмерной системы уравнений Навье - Стокса с учетом особенностей физического эксперимента.
2. Осуществлена программная реализация предложенной математической модели, и проведены численные эксперименты, в результате которых сделан вывод о единообразии основных характеристик тороидальных вихрей различной физической природы: ТВ в воздухе и в воде, плазменного ТВ в воздухе.

3. Проведено численное моделирование механизма самоподдержания и усиления вихрей, позволившее сделать вывод о том, что при нагревании вещества тороидального вихря в тонкой кольцевой области, расположенной по периметру, наблюдается увеличение скорости его вращения. Показано, что чем больше температура нагревания, тем больше усиление вращения.

4. Для заданной угловой скорости вращения исследована зависимость КПД преобразования тепловой энергии, выделившейся в кольцевой области, во вращательную энергию от температуры нагревания и времени протекания процесса. Установлено, что при увеличении температуры и времени нагревания величина КПД увеличивается.

5. Построена математическая модель, позволяющая описать образование и перемещение вихрей по сферической поверхности, а также проведена программная реализация данной модели, и сделаны выводы об условиях образования вихрей на конкретной поверхности.

Результаты проведенных расчетов по предложенным математическим моделям согласуются с экспериментальными данными различных исследователей.

### **Научная новизна работы**

В диссертационной работе предлагаются новые математические модели образования и развития вихревых структур на искривленных поверхностях и тороидальных вихревых образований. Математические модели, описывающие гидродинамические процессы в вихревых структурах, основаны на трехмерной системе уравнений Навье – Стокса. Для вихревых процессов на сферической поверхности применяется осредненная по высоте тонкого слоя жидкости трехмерная система уравнений Навье – Стокса, записанная отдельно для верхней и нижней полусфер и сшивающаяся по экватору. Предложенная модель позволяет в каждый момент времени для любой точки поверхности вычислять не только скорость, плотность и температуру вещества, но и толщину слоя жидкости в этой точке. В результате математического моделирования впервые изучены условия образования и устойчивости вихревых объектов на сферической поверхности. Впервые построена математическая модель тороидального вихря, согласующаяся с условиями и механизмом образования, установленными экспериментально. Для тороидального вихря впервые определен КПД преобразования тепловой энергии во вращательную энергию на основе механизма самоподдержания и усиления вихрей. Достаточно подробно изучены трехмерное распределение поля скоростей, а также диссипация энергии вихря.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Работа имеет как теоретическую, так и практическую значимость. Теоретическая значимость заключается в изучении условий образования вихревых структур, динамических характеристик таких структур, а так же механизма самоподдержания тороидальных вихрей за счет тепловыделения.

Практическая значимость состоит в возможности применения разработанного программного комплекса для решения конкретных задач в различных областях человеческой деятельности таких как: нефте – газовая промышленность (тушение фонтанирующих пожаров), энергетика, исследование климата (взаимодействие атмосферных вихрей, возможность предсказания погоды и других природных катаклизмов устойчивой структуры), разработка нелетального оружия, медицина (офтальмология).

## **Апробация работы**

Результаты работы докладывались на научно-исследовательских семинарах кафедры, а также на всероссийских и международных конференциях:

1. “Ломоносовские чтения”, Москва, МГУ, 2011, секция физики.
2. XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко, Абрау-Дюрсо, 2010.
3. “Математика. Компьютер. Образование”: XVIII международная конференции, 2011.
4. 17-ая российская конференция по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии, 2010.
5. “Математика. Компьютер. Образование”: XVII международная конференция, 2010.
6. “Математика. Компьютер. Образование.”: XIX международная конференция, 2012.

## **Личный вклад автора**

Личный вклад автора состоит в разработке представленных в диссертации математических моделей, разработке программного комплекса, позволяющего проводить расчёты на основе выбранного в качестве наиболее подходящего для поставленной задачи численного метода. Им проведен ряд численных экспериментов, результаты которых согласуются с экспериментальными данными объектов исследований и позволяют сделать выводы о природе, структуре и свойствах этих объектов.

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, были впервые получены автором. Постановка и ход научных исследований осуществлялись под руководством д.ф – м.н. Савенковой Надежды Петровны и консультанта по физике к.ф – м.н. Юсупалиева Усена. Основное содержание диссертационной работы и её результатов полностью отражено в

10 научных публикациях автора. В материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

### **Публикации**

Положения диссертации отражены в 10 публикациях автора, 2 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК [1,2].

### **Структура работы**

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, трёх глав, заключения и списка литературы (60 наименований). Объём диссертации - 110 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю в.н.с. д.ф – м.н. Савенковой Надежде Петровне и научному консультанту с.н.с. к.ф – м.н. Юсупалиеву Усену за поддержку и постоянную помощь в работе.

### **Краткое содержание работы**

**Во введении** приводится обзор литературы по исследованию различных вихревых образований (ТВ в воздухе и в воде, плазменный ТВ в воздухе и атмосферных вихрей), из которого следует постановка задачи. Постановка задачи заключается в изучении методами математического моделирования динамики формирования и развития вихревых структур, исследовании условия устойчивости (самоподдержания и усиления) вихрей на примере реальных физических экспериментов по образованию воздушного тороидального вихря и вихревых образований в жидкости на сферической поверхности.

**В первой главе** рассматривается процесс образования и динамика развития тороидального вихря, полученного методами математического моделирования. Проводится сравнение результатов численного расчета с экспериментальными данными.

**Параграф 1.1** посвящен обзору физических экспериментов, проводимых с тороидальными вихрями различной природы (газовые тороидальные вихри (ТВ), плазменные тороидальные вихри (ПТВ)) в воздухе при атмосферном давлении.

**В параграфе 1.2** проводится анализ результатов, полученных в результате физических экспериментов с различными ТВ.

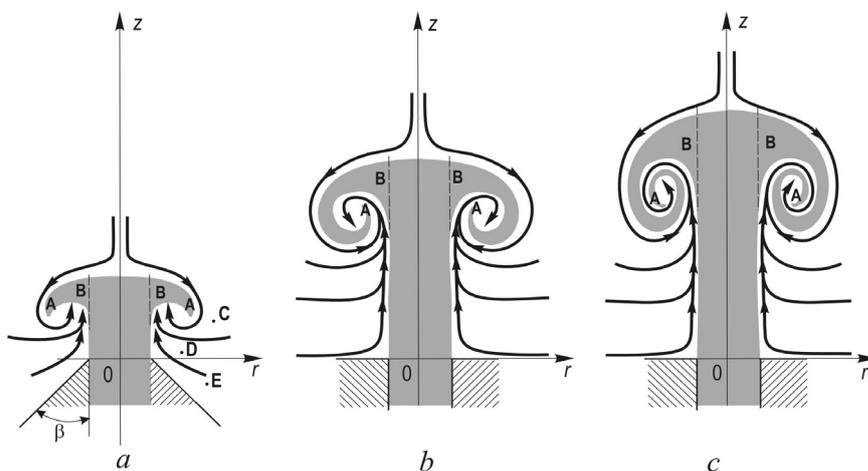


Рис.1 Образование торoidalной спиральной струи в формирующемся вихре.

Процесс формирования плазменного и газового ТВ имеет три характерные стадии: начальную стадию; стадию образования торoidalной спиральной струи в формирующемся вихре (рис.1) и стадию установления определенного распределения азимутальной скорости вращения в вихре после прекращения истечения плазмы/газа.

Законы движения плазменного ТВ и плазменного облака, не захваченного в вихревое движение, начинают различаться, когда в вихре образуется твердотельное ядро вращения. Из этого факта следует один из основных выводов проведенных исследований: ПТВ существует как самостоятельная плазмогидродинамическая структура, обладающая собственными закономерностями движения, после того, как в процессе его образования в нём сформируется твердотельное ядро вращения. Именно такие ТВ являются устойчивыми.

Проведённые физические опыты показали, что ТВ в воздухе образуется при дозвуковом осесимметричном истечении порции плазмы в воздух, а кольцевые вихри в воздухе - при дозвуковом осесимметричном истечении порции газа в воздух. Для образования ТВ характеристики импульсной струи и окружающей среды должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) Истекающая струя должна быть дозвуковой
- 2) Импульсная струя и окружающая среда, куда она истекает должны быть сплошными средами, то есть числа Кнудсена должны удовлетворять условиям:  $l_j / r_0 \ll 1, l_i / r_0 \ll 1$ .

$l_i, l_j$  - длины свободного пробега частиц в струе и окружающей среде соответственно

- 3) Характерные размеры окружающей среды  $X_i$  должны быть намного больше радиуса сопла генератора вихря
- 4) Длина импульсной струи  $L_j$  должна удовлетворять условию:  $2r_0 \leq L \leq 15r_0$
- 5) Длительность истечения импульсной струи должна быть не меньше характерного времени образования торoidalной спирали формирующегося вихря.

Таким образом, рабочая гипотеза математической модели должна опираться на условия (1) - (5).

**В параграфе 1.3** описывается математическая модель тороидального вихревого образования.

Для моделирования процесса формирования ТВ использовались уравнения неразрывности, движения (Навье-Стокса) и состояния (Менделеева-Клапейрона). В цилиндрической системе координат указанные уравнения в осесимметричном случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \rho v_r, \\
 \frac{\partial \rho v_r}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_r^2}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_r v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \rho v_r^2 - \frac{2}{r^2} \eta v_r - \\
 -\frac{2}{r} \eta \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 2\eta v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \eta v_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \eta v_r}{\partial z^2}, & \\
 \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r v_z}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \rho v_z^2}{\partial z} &= -q_z - \frac{1}{r} \rho v_r v_z - \\
 -\frac{1}{r} \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \eta v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \eta v_r}{\partial r \partial z} + \frac{2\partial^2 \eta v_z}{\partial z^2}, & \\
 p &= \frac{\rho}{\mu} RT
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $V_r, V_z$  компоненты скорости газа  $p, \rho, \eta$  и  $\mu$  плотность, давление, динамическая вязкость и молярная масса газа соответственно,  $q_z$  - объемная плотность силы, действующей вдоль оси Oz и создающей импульсную струю,  $R$  - универсальная газовая постоянная. Функция  $q$  введена для моделирования работы поршня генератора ТВ и зависит от принципа работы "поршня" и её вид должен быть таким, чтобы удовлетворялись условия образования вихря (1)-(5).

Объемную плотность  $q$  силы  $f_z$  зададим следующей функцией:

$$q_z = q_0 \cdot f(t) \cdot g(r) \cdot h(z),$$

где

$$f(t) = (1 - \cos(2\pi t / \Delta t)) / 2,$$

$$g(r) = (1 + \cos(\pi r / r_0)) / 2,$$

$$h(z) = (1 - \cos(2\pi(z - z_1) / (z_2 - z_1))) / 2.$$

$$q_0 = 10 \text{ г} / \text{см}^2 \text{ с}^2, \quad z_1 = 0.5 \text{ см}, \quad z_2 = 0.75 \text{ см}, \quad \Delta t = 0,05 \text{ с}.$$

$q_0$  - амплитуда величины  $q_z$  (в кг/ (м<sup>2</sup> с<sup>2</sup>)),  $(z_2 - z_1)\pi r_{nozz}^2$  - объём, в котором действует  $q_0$ ).

Для проведения численного расчета необходимо выбрать значения характеристик импульсной струи ( $r_{nozz}, L_j, T_j, \mu_j, \eta_j, P_j$ ) "поршня" генератора вихря ( $q_0, \Delta t, z_1, z_2$ ) и окружающей среды ( $T_0, p_0, \mu_0, \eta_0$ ). Значения этих характеристик выбираются, исходя из требований экспериментально

установленных условий образования ТВ (1)-(5). Начальные и граничные условия соответствуют условиям проведения физического эксперимента.

**В параграфе 1.4** проводится анализ численных методов решения уравнений Навье – Стокса и выбор наиболее подходящего из них на примере уравнения Бюргера.

**В параграфе 1.5** проводится анализ численных результатов и сравнение их с экспериментальными данными. На рис.2 и рис.3 представлены результаты численного моделирования воздушного ТВ. На рис.2 представлено поле скоростей относительно неподвижной системы координат. На рис.3 представлено поле скоростей в системе координат связанной с вихрем, а также линии тока в этой системе координат.

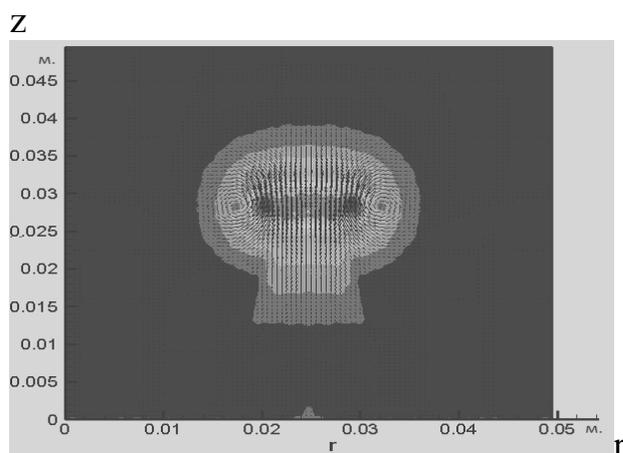


Рис.2. Результирующее поле скоростей для полной расчетной области при  $t=0.3$ с на плоскость  $(r,z)$ .

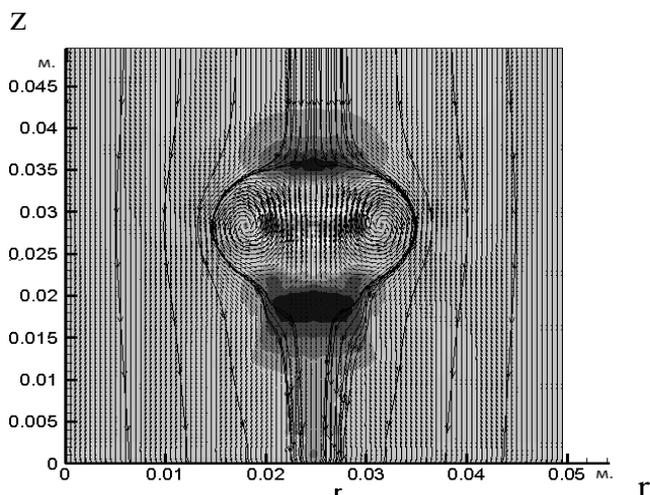


Рис.3. Линии тока в ТВ относительно системы координат связанной с вихрем при  $t=0.3$ с на плоскость  $(r,z)$ .

Как видно из рис. 3, линии тока обтекают устойчивую форму по периметру. Картина линий тока в системе координат связанной с вихрем (рис. 3) практически совпадает с аналогичной картиной, построенной по экспериментальным данным (рис. 4).

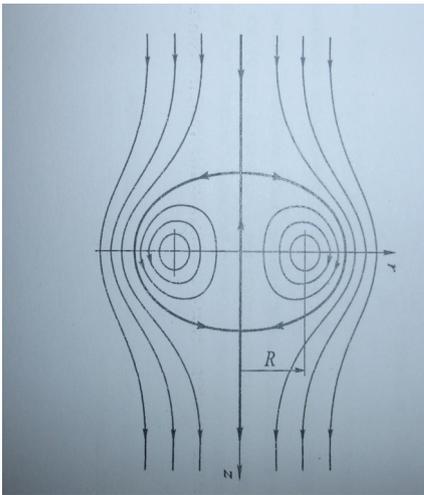


Рис.4. Линии тока в ТВ относительно системы координат, связанной с вихрем, получены Д.Г. Ахметовым в результате физических экспериментов.

Для вихрей различной природы (плазменные ТВ в воздухе, ТВ в воздухе и в воде) существует набор безразмерных параметров, который остается постоянным. Численные значения этих параметров приведены в таблице.

Таблица. Сравнение безразмерных экспериментальных интегральных характеристик ПТВ и ТВ в воздухе с результатами численного расчета.

Тип Эксперимента	$\frac{V_{TV0}}{u_j}$	$\frac{P_{TV0}}{P_j}$	$\frac{P_{in}}{P_j}$	$\frac{P_0}{P_j}$
Физический Эксперимент: плазменный тороидальный вихрь в воздухе и воздушный тороидальный вихрь в воздухе	0.25-0.37	0.45-0.63	0.23-0.29	0.1-0.32
Численный эксперимент	0.3	0.49	0.26	0.25

В таблице приведены следующие безразмерные интегральные характеристики ТВ:

$\frac{V_{TV0}}{u_j}$  - отношение начальной скорости вихря к скорости импульсной струи на срезе сопла;

$\frac{P_{TV0}}{P_j}$  - отношение начального импульса вихря к импульсу струи;

$\frac{P_{in}}{P_j}$  - отношение импульса индуцированного течения среды к импульсу струи;

$\frac{P_0}{P_j}$  - отношение импульса хвостовой части струи к импульсу струи.

Результаты приведенные в таблице показывают, что значения безразмерных интегральных характеристик, полученных расчетным путем, соответствуют экспериментально определенным значениям. Вышесказанное позволяет сделать вывод о единообразии основных характеристик тороидальных вихрей различной физической природы.

**В главе 2** проводится исследование усиления и самоподдержания тороидального вихря за счет тепловыделения.

**В параграфе 2.1** изложена постановка задачи о механизме самоподдержания и усиления вихрей. Физическая суть этого механизма состоит в следующем: 1) тепловыделение в вихрях (тропических циклонах, тороидальных вихрях в воздухе и воде, в плазменном ТВ в воздухе) приводит к уменьшению плотности среды, что в свою очередь способствует возникновению силы плавучести, направленной к оси вращения, 2) под действием силы плавучести легкий газ движется к центру оси вращения, 3) на движущийся к центру оси вращения газ действует сила Кориолиса, направленная по касательной в сторону вращения, в результате чего, увеличивается скорость вращательного движения газа.

В силу сложности реализации физического эксперимента, математическое моделирование является в данном случае основным инструментом исследования.

**В параграфе 2.2** приводится математическая модель, описывающая механизм самоподдержания и усиления, а также численный метод решения полученной системы дифференциальных уравнений.

Математическая модель представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений, записанных во вращающейся системе координат относительно центра ядра тора:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r V_r \rho}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi \rho}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + (\rho \mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \mu \Delta \rho \mathbf{V} - \frac{v_0^2 \rho}{r} \theta \mathbf{e}_r - 2\rho [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{V}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + (\rho \mathbf{V} \nabla) \theta = \chi \Delta(\rho \theta) + \rho f(r),$$

$$\Omega = \frac{V_\varphi}{r}, \quad \theta = \frac{(T - T_0)}{T_0}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_\varphi \\ V_r \end{bmatrix},$$

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

где  $V_r, V_\varphi$  компоненты скорости по координатам  $r$  и  $\varphi$ ,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $\mu$  – термодинамическая вязкость,  $\rho$  – плотность,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Эта система учитывает тепловыделение, силы плавучести и Кориолиса. Начальными условиями данной задачи были выбраны результаты, полученные в предыдущей главе для момента времени  $t = 0,1$  с.

Задача решается разностным методом второго порядка точности по пространству и времени, выбранным на основании результатов предыдущей главы.

**В параграфе 2.3** представлены результаты численных экспериментов. Приводятся количественные характеристики увеличения скорости вращения ТВ в зависимости от температуры нагревания и времени протекания процесса, а также КПД перехода тепловой энергии во вращательную энергию. На рис. 5 представлены расчетные зависимости относительного приращения  $\varphi$ -ой компоненты скорости в фиксированной точке от температуры нагревания для различных моментов времени, для заданного значения угловой скорости вращения ( $\approx 31 \text{ c}^{-1}$ ).

$$\frac{V_{\varphi}(T) - V_{\varphi}(0)}{V_{\varphi}(0)}$$

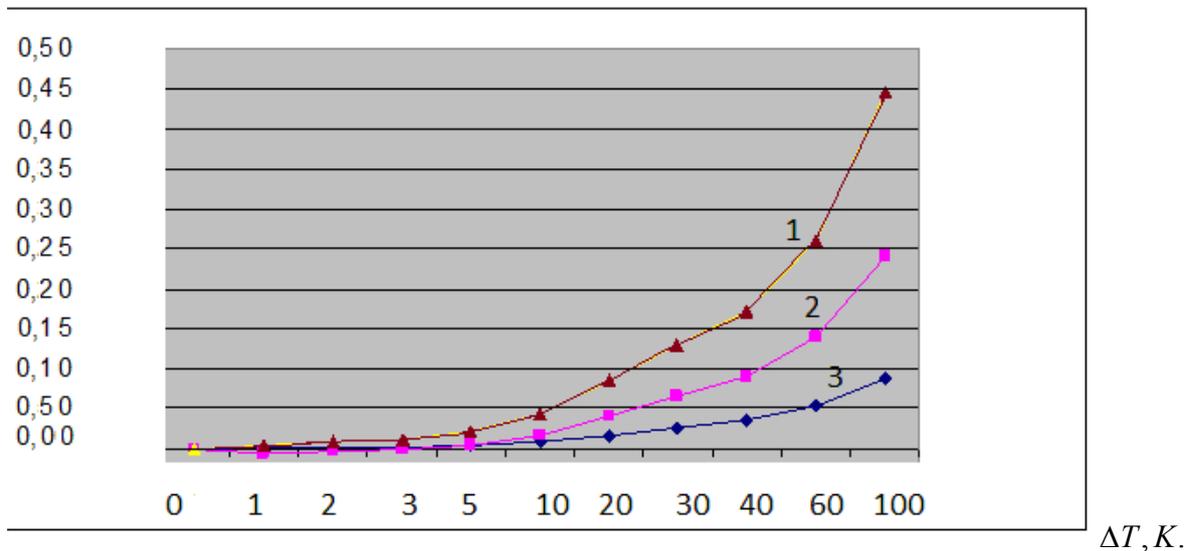


Рис.5. Зависимости относительного приращения  $\varphi$ -ой компоненты скорости в фиксированной точке от температуры нагрева: график 3 соответствует моменту времени  $t=0.05c.$ , 2 -  $t=0.01c.$ , 1 -  $t=0.15c.$

Из рис. 5 видно, что при нагревании газа в кольцевой области ядра ТВ наблюдается увеличение скорости его вращательного движения. Чем больше температура газа при тепловыделении и длительность энерговыделения, тем больше увеличивается скорость вращения ТВ. Оценка величины КПД преобразования тепловой энергии во вращательную энергию вихря показывает, что она увеличивается с увеличением температуры и времени нагревания.

**В главе 3** проводится исследование образования и взаимодействия вихрей на поверхности сферического объекта.

**В параграфе 3.1** описывается физический эксперимент по созданию вихрей на поверхности сферического объекта.

Исследователи из Центра радиоволн и молекулярной оптики в Бордо обнаружили, что вихри, определенным образом, созданные в мыльных пузырях, ведут себя аналогично атмосферным вихрям, таким как циклоны и антициклоны. Постановка эксперимента французских ученых очень проста. Половина мыльного пузыря, находящегося при комнатной температуре  $17^{\circ}C$ , с радиусом в разных вариантах эксперимента от 8 до 10 см, нагревалась с помощью специального колечка, охватывающего экватор пузыря. Тепло конвективным образом распространялось от экватора к полюсам, создавая градиент температур  $\Delta T$ . Облучая изучаемый объект белом светом, исследователи наблюдали картину, из которой видно, что при наибольшей разности температур ( $\Delta T = 45^{\circ}C$ ) между экватором и полюсом происходило зарождение вихрей, подобных атмосферным вихрям (циклон, антициклон). Однако в этом эксперименте исследователям не удалось детально изучить количество вихрей зарождающихся при различных температурах, поле

скоростей, распределение температуры, траектории их движения. Все это можно сделать при помощи математического моделирования.

**В параграфе 3.2** представлена математическая постановка этой задачи. Рассматривается движение жидкости по поверхности сферического объекта, как растекание жидкости по орографически неоднородной поверхности, т.е. считается, что жидкость огибает оболочку как препятствие. Математическое моделирование проводится отдельно для верхней и для нижней частей сферы, сшивающихся по экватору. В основе математической постановки находится осредненная по высоте тонкого слоя трехмерная система уравнений Навье - Стокса. Для удобства реализации алгоритма решения для верхней части пузыря ось  $Z$  направлена вверх, а для нижней его части ось  $Z'$  направлена вниз.

Ниже выписаны соответствующие системы уравнений одновременно для обоих случаев.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} \delta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \delta}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \bar{u} \delta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 \delta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v} \delta}{\partial y} &= \mp \frac{g}{2} \frac{\partial \delta^2}{\partial x} \mp g \delta \left( \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) + \\
+ 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{yx}}{\partial y} + \frac{\gamma}{R^2 \rho} \frac{\partial \delta^2}{\partial x} + \frac{\gamma}{R^2 \rho} \delta, \\
\frac{\partial \bar{v} \delta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v} \delta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2 \delta}{\partial y} &= \mp \frac{g}{2} \frac{\partial \delta^2}{\partial y} \mp g \delta \left( \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) + \\
+ 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{yy}}{\partial y} + \frac{\gamma}{R^2 \rho} \frac{\partial \delta^2}{\partial y} + \frac{\gamma}{R^2 \rho} \delta, \\
\frac{\partial \bar{h} \delta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} \bar{h} \delta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \bar{h} \delta}{\partial y} &= F_{Dh} + \frac{Q_h}{\rho}. \\
F_{Dh} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \delta \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \delta \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\
h &= C_p T, \\
\gamma &= \left( r - \frac{R_u T}{M} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right) \right) \cdot \frac{M^{1/3} \cdot \rho^{2/3}}{6N^{1/3}} \\
S_{k,i} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

$\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  осредненные скорости на сфере по длине, ширине и высоте;

$\rho$  - плотность среды;

$g$  - ускорение свободного падения

$\bar{\delta}$  - толщина оболочки;

$R$  - радиус сферы;  
 $\mu$  - термодинамическая вязкость;  
 $\chi$  - коэффициент теплопроводности;  
 $r$  – теплота парообразования, Дж/кг;  
 $\rho$  – плотность жидкости, кг/ м<sup>3</sup>;  $\rho_v$  – плотность пара, кг/ м<sup>3</sup>;  
 $R_u$  – универсальная газовая постоянная, Дж/(кмоль \* К);  
 $T$  – температура, К;  
 $U$  – внутренняя энергия жидкости, Дж/кг;  
 $M$  – молекулярная масса, кг/кмоль;  
 $N$  – число Авогадро, кмоль<sup>-1</sup> ;  
 $h$  – энтальпия.

**В параграфе 3.3** проводится анализ численных результатов, полученных при решении системы (3).

Задача решалась разностным методом. Результаты численных расчетов представлены как ортографические проекции на плоскость OXY, на которых стрелочками обозначены направления результирующей скорости в каждой расчетной ячейке введенной разностной сетки для различных значений разности температур между экватором и полюсом  $\Delta T$  и различных моментов времени.

На рис. 6 – 11 в качестве примера приводятся поля скоростей для начальной разницы температур между экватором и полюсом в 45°С и 55°С.

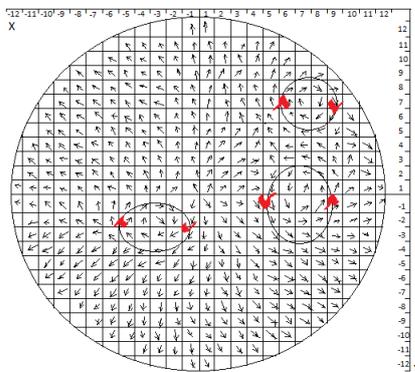


Рис.6. Поле скоростей,  $t=3c.$ ,  $\Delta T = 45^\circ C$  (верхняя часть сферы).

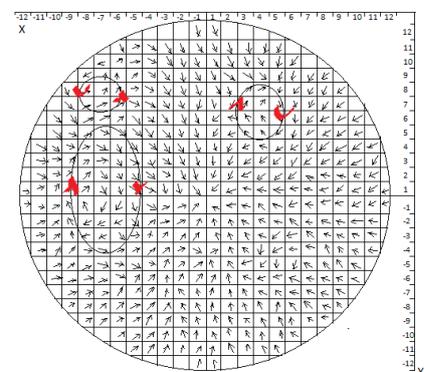


Рис.7. Поле скоростей,  $t=3c.$ ,  $\Delta T = 45^\circ C$  (нижняя часть сферы).

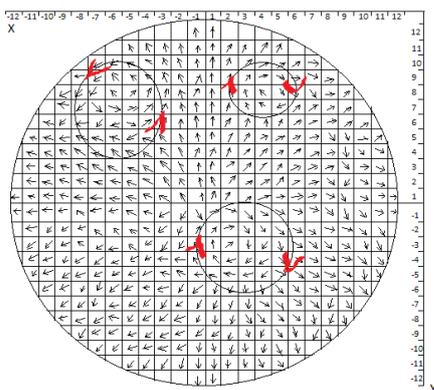


Рис.8. Поле скоростей,  $t=5\text{с.}$ ,  $\Delta T = 45^\circ\text{C}$  (верхняя часть сферы.)

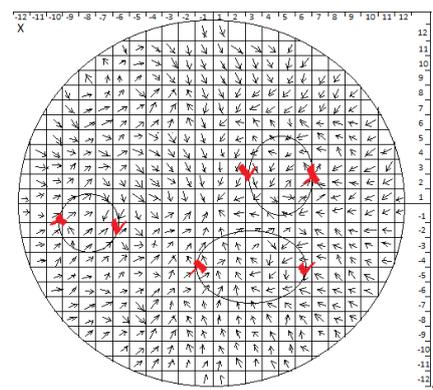


Рис.9. Поле скоростей,  $t=5\text{с.}$ ,  $\Delta T = 45^\circ\text{C}$  (нижняя часть сферы.)

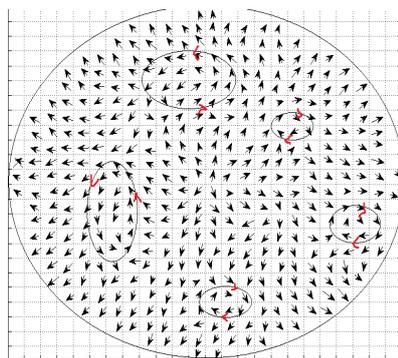


Рис.10. Поле скоростей  $t=3\text{с.}$ ,  $\Delta T = 55^\circ\text{C}$  (нижняя часть сферы.)

Из приведенных рисунков видно, что для данного радиуса сферической поверхности исследуемого объекта наблюдается образование вихрей на этой поверхности при нагревании объекта по экватору. Количество вихревых образований на сферической поверхности зависит от исходной температуры нагревания, что свидетельствует о существовании критической разницы температур между экватором и полюсом, при которой на поверхности сферического объекта образуются устойчивые вихревые структуры. При этом движение вихрей на верхней и нижней полусфере взаимосвязаны, а направление их вращения различны.

**В заключении** приведены основные результаты работы:

1. Построена математическая модель тороидального вихря на основе трехмерной системы уравнений Навье - Стокса, учитывающая условия образования ТВ. Результаты численных экспериментов, проведенных по этой модели, согласуются с экспериментальными данными ТВ различной природы.

2. Проведено численное моделирование механизма самоподдержания и усиления вихрей при тепловыделении (нагревании газа) в ТВ. Показано, что при повышении температуры и увеличении длительности нагрева газа увеличивается скорость его вращательного движения и растет величина КПД преобразования тепловой энергии во вращательную энергию вихря.

3. Проведено математическое моделирование образования группы вихрей на сферической поверхности фиксированного радиуса на основе трехмерной системы уравнений Навье - Стокса, осредненной по высоте тонкого слоя. Численный эксперимент показал, что образование вихревых структур, а также их количество зависит от величины разности температур между экватором и полюсом. Результаты расчета согласуются с экспериментальными данными.

**Основные положения диссертации изложены в работах:**

1. У. Юсупалиев, Н.П. Савенкова, Ю.В. Трощев, С.А. Шутеев, С.А. Складчиков, Е.Э. Винке, Н.Г. Гусейн-заде. Вихревые кольца и плазменные тороидальные вихри в однородных неограниченных средах. II. Исследование процесса образования вихря. // Краткие сообщения по физике ФИАН, 2011, №9, с. 46-58.
2. Р.Н. Кузьмин, Н.П. Савенкова, С.А. Складчиков. Численное исследование динамики вихревых образований на поверхности мыльного пузыря. // Прикладная физика, 2012, №1, с.26-30.
3. Юсупалиев У., Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Трощев Ю.В., Шутеев С.А., Складчиков С.А., Винке Е.Э. Численное моделирование процесса образования тороидальных вихрей. // Конференция. "Ломоносовские чтения", секция "Физики", изд. Физического факультета МГУ, М., 2011, с. 209-216.
4. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Складчиков С.А. Математическое моделирование гидродинамических процессов на поверхности мыльного пузыря. // Сб. тезисов XVIII Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", изд. ИПМ РАН, М., 2010, с. 46.
5. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Складчиков С.А. Математическая модель вихря ионизированного светящегося образования. // Сб. тезисов XVII международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика", 2010, т. 1, с. 145.
6. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Складчиков С.А. Математическое моделирование растекания жидкости по поверхности мыльного пузыря. // Сб. тезисов XVIII международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика", 2011, т. 1, с. 206.
7. Н.П. Савенкова, В.Л. Бычков, Р.Н. Кузьмин, С.А. Складчиков. Математическое моделирование сферического долгоживущего образования. // Сб. тезисов 17-й российской конференции по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии, НИЦ ФТП «Эрзион», М., 2010, с. 29.
8. Р.Н. Кузьмин, Н.П. Савенкова, В.Л. Бычков, С.А. Складчиков, Ю.В. Трощев. Математическое моделирование тороидальных, вихревых, и сферических долгоживущих образований. // Материалы 17-й российской

конференции по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии, НИЦ ФТП «Эрзион», М., 2011, с. 153-165.

9. Кузьмин Р.Н., Юсупалиев У., Шутеев С.А., Савенкова Н.П., Трошиев Ю.В., Складчиков С.А. Математическое моделирование процесса образования тороидального вихря. // Сб. тезисов XIX международной конференции “Математика. Компьютер. Образование”, М.-Ижевск: “Регулярная и хаотическая динамика”, 2012, с. 188.

10. У. Юсупалиев, Н.П. Савенкова, С.А. Складчиков, С.А. Шутеев, В.Г. Еленский. Численное моделирование самоподдержания и усиления вихрей. // Препринт №2(III), изд. физический факультет МГУ, М., 2012, С. 12.