МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи
УДК 517.956.6; 517.984.5

КАПУСТИН НИКОЛАЙ ЮРЬЕВИЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ ТОЧКАХ

(01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, академик Моисеев Евгений Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико- математических наук, профессор Макин Александр Сергеевич
	доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор Шкаликов Андрей Андреевич
Ведущая организация:	научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (г. Нальчик)

Защита состоится 10 октября 2012 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-ой учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Автореферат разослан "   "   2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

Актуальность темы диссертации. Исторически, первые глубокие исследования в области уравнений смешанного типа появились в двадцатые годы двадцатого века. Ф.Трикоми[1] для эллиптико-гиперболического уравнения рассмотрел краевую задачу, которая сейчас называется задачей Трикоми для уравнения Трикоми. Затем С.Геллерстедт исследовал обобщения задачи Трикоми для более общих уравнений эллиптико-гиперболического типа.

Новым этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа явились работы М.А.Лаврентьева, Ф.И.Франкля, И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе, Л.В.Овсянникова, К.И.Бабенко. В этих работах указывалось на актуальность задач для уравнений эллиптико-гиперболического типа в связи с трансзвуковой газовой динамикой, теорией магнитодинамических течений, теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей. Появились, также, работы по изучению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений. Исследования в области теории уравнений смешанного типа стали проводиться не только по вопросам классической разрешимости краевых задач, но и по вопросам обобщенной разрешимости в различных функциональных классах, а также было начато активное изучение задач с нелокальными граничными условиями.

Уравнения смешанного параболо-гиперболического типа возникают при математическом моделировании различных процессов естествознания, например, при изучении движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой. В канале газодинамическое давление жидкости или газа удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением фильтрации, которое в этом случае совпадает с уравнением диффузии. Математическое исследование напряженности электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, приводит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения диффузии. Многие задачи теплообмена в средах с различным временем релаксации

[1] Tricomi F. Ulteriori richerche sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. // Rend. Circolo Math. Palermo. 1028. T. 58. P. 63-90.

и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к задачам для параболо-гиперболических уравнений. О математических моделях естествознания, приводящих к такого рода проблемам математического характера, написано в работах Я.С.Уфлянда, А.Г.Шашкова, А.М.Нахушева, Х.Азиза и Э.Сеттари.

В конце семидесятых – начале восьмидесятых годов двадцатого века работы Е.И.Моисеева, С.М.Пономарева, Т.Ш.Кальменова положили начало развитию спектральной теории краевых задач для уравнений смешанного типа. В основе спектрального метода решения некоторых задач для уравнений параболо-гиперболического типа лежат задачи со спектральным параметром в граничных условиях. Эти задачи возникают и в ряде математических моделей для уравнения одного параболического или гиперболического типа. М.Пуассон[2] рассматривал вопрос о движении тела, подвешенного к концу нерастяжимой нити. А.Кнезер в 1914 г. изучал колебания струны с распределенной плотностью, в некоторых точках которой сосредоточены массы. А.Н.Крылов и С.П.Тимошенко рассматривали задачу о продольных колебаниях стержня, как одну из актуальных задач естествознания, к которой сводится теория индикатора паровой машины, изучение крутильных колебаний вала с маховиком на конце и крутильных колебаний шкива с подвешенной на конце массой. Классическая задача о колебаниях струны или мембраны, нагруженной сосредоточенными массами, связана с изучением вибраций крыльев самолета. Аналогичные математические модели возникают в задачах о распространении тепла в средах, граничащих с сосредоточенными теплоемкостями и задачах об изучении электромагнитных колебаний в системах с сосредоточенными емкостями и самоиндукциями, которые рассматривались А.А.Самарским, А.А.Виттом и С.П.Шубиным.

Спектральные задачи, возникающие в теории уравнений смешанного типа, как правило, являются несамосопряженными. Большой вклад

---

[2] Poisson M. Sur la maniere d'experimer les fonctions par des series de quantites periodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la resolution de differents problemes. 18eme cahier. V. XI. Paris: l'Ecole Politechnique de Paris, 1820.

в науку был внесен академиком В.А.Ильиным[3], получившим фундаментальные результаты по спектральной теории для несамосопряженных дифференциальных операторов. Им установлены необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов, необходимые и достаточные условия базисности в Lp и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент. В.А.Ильиным получены результаты, касающиеся связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора, проведено изучение вопроса о безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка.

В работе А.А.Шкаликова[4] построена общая теория спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных точках, где доказаны теоремы кратной базисности, разложения и полноты для выделенных классов краевых задач: регулярных, почти регулярных и нормальных. В различных функциональных пространствах доказаны теоремы полноты и базисности в зависимости от гладкости коэффициентов. А.М.Ахтямов в цикле работ, посвященных математическому моделированию и численному исследованию в диагностике закреплений и нагруженности механических систем, получил ряд новых важных результатов в теории обратных задач Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. Им предложены алгоритмы решения задач со сложным вхождением спектрального параметра в граничные условия, представлены соответствующие формулы диагностики механических систем и строительных конструкций.

Общий подход методом разделения переменных к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа предложен в работах академика

[3]Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.

[4]Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190-229.

Е.И.Моисеева[5]. Для ряда областей специального вида он получил представления решений задач Трикоми, Франкля и Геллерстедта, а также обобщенной задачи Трикоми в виде биортогональных рядов. Для обоснования представлений решений Е.И.Моисеевым установлены тонкие результаты об условиях базисности систем синусов и косинусов, у которых имеется ненулевая фаза и считывающий индекс, не являющийся, вообще говоря, целым.

В связи с рассматриваемыми в диссертации вопросами отметим работы Ж.Бен Амара, Ю.М.Березанского, Б.Т.Билалова, В.Д.Будаева, В.В.Власова, А.Д.Вентцель, Г.Г.Девдариани, Т.Д.Джураева, В.А.Елеева, С.В.Ефимовой, В.И.Жегалова, А.Н.Зарубина, А.Г.Костюченко, А.Г.Кузьмина, В.М.Курбанова, В.Б.Лидского, Ж.-Л.Лионса, И.С.Ломова, А.С.Макина, Д.Б.Марченкова, С.В.Мелешко, В.П.Михайлова, В.А.Нахушевой, З.А.Нахушевой, Ю.В.Покорного, А.А.Полосина, А.В.Псху, С.П.Пулькина, Л.С.Пулькиной, О.А.Репина, Е.М.Русаковского, К.Б.Сабитова, В.А.Садовничего, М.С.Салахитдинова, М.М.Смирнова, А.П.Солдатова, Я.Т.Султанаева, Е.А.Уткиной, М.М.Хачева, С.Фултона, М.Розо, Ж.Уолтера.

Цели исследования. 1) Изучение вопроса об однозначной обобщенной разрешимости в классе L_2 задачи Трикоми с негладкими граничными условиями для параболо-гиперболических уравнений с волновым оператором в гиперболической части и вырождающимся на линии изменения типа гиперболическим оператором; 2) получение спектральным методом точной априорной оценки в классах L_p и C решения задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с волновым оператором в гиперболической части в случае, допускающем применение метода разделения переменных; 3) изучение полноты, минимальности и базисности в пространстве $L_p, p > 1$ систем корневых функций классических задач со спектральным параметром в граничных условиях, возникающих в теории уравнений смешанного типа, а также формулировка условий, обеспечивающих сходимость соответствующих спектраль-

[5]Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.

ных разложений в классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций на отрезке; 4) решение спектральным методом вопроса о корректности постановки смешанной задачи со смешанной производной в граничном условии для оператора теплопроводности, возникающей при описании процесса теплопередачи параболо-гиперболическим уравнением.

Научная новизна полученных результатов. Доказаны новые теоремы как в теории параболо-гиперболических уравнений, так и в спектральной теории задач с параметром в граничных условиях. В случае, допускающем спектральный подход к решению задачи Трикоми, установлена точная в классах L_p и C априорная оценка решения и, тем самым, доказана максимальная гладкость обобщенного решения. Сформулировано условие корректности постановки смешанной задачи со смешанной производной в граничном условии из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности. Получены новые результаты по вопросам полноты, минимальности и базисности в пространствах L_p, где $p > 1$, C, C^1 систем корневых функций задач со спектральным параметром в граничных условиях, возникающих в теории уравнений смешанного типа.

Методы исследования. Для получения априорных оценок решения задачи Трикоми для параболо-гиперболических уравнений используется метод вспомогательных, сглаживающих функций. В случае спектрального подхода для получения априорных оценок – анализ представляющего решение билинейного ряда с использованием принципа максимума и классических неравенств из функционального анализа. Для изучения вопросов базисности в $L_p, p > 1$ вводится вполне непрерывный оператор как функция выделенной минимальной подсистемы и соответствующего известного ортонормированного базиса с предварительным построением биортогонально сопряженной системы и выводом асимптотических формул для собственных значений и собственных функций. Сходимость спектральных разложений в классах C, C^1 установлена на основе асимптотических формул для функций биортогонально сопряженной системы и последующим учетом граничных условий нелокального характера.

Практическая и теоретическая значимость результатов. Полученные в диссертации результаты и подходы к исследованиям могут быть использованы при дальнейшем развитии теории уравнений смешанного типа, спектральной теории несамосопряженных операторов, а также в других областях математики. Возможно широкое применение этих результатов при математическом моделировании процессов колебаний нагруженных тел, газодинамических процессов, различных физических явлений в теории теплообмена и массообмена в капиллярно-пористых средах.

Апробация работы. По материалам диссертации были сделаны доклады на многих семинарах и конференциях, из которых можно выделить следующие: научно-исследовательский семинар кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством академика В.А.Ильина, академика Е.И.Моисеева и чл.-корр. РАН И.А.Шишмарева, научно-исследовательский семинар кафедры функционального анализа и его применений факультета ВМК МГУ под руководством академика Е.И.Моисеева, научно-исследовательский семинар кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А.А.Шкаликова, 3-rd and 4-th Internatinal Conference on Applied Informatics (1997 and 1999, Eger-Noszvaj, Hungary), XXIII Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (2003, Pamplona, Spain), Международная конференция "Тихонов и современная математика"(2006, Москва), конференция факультета ВМК МГУ "Тихоновские чтения"(2010, Москва), конференция МГУ "Ломоносовские чтения"(2011, Москва), посвященная 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова.

Публикации. Основное содержание и результаты диссертации изложены в 21 работе автора и 3 работах, выполненных совместно с Е.И.Моисеевым. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, разделенных на 14 параграфов, и списка литературы из 209 наименований. Общий объем диссертации 172 страницы.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели исследования, отмечается научная новизна и практическая значимость полученных результатов, излагается основное содержание работы.

В параграфе 1 главы 1 для классического решения задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с волновым оператором в гиперболической части

$$\begin{aligned} &u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = g(x,y), \quad y<0, \\ &u_{x}(x,y) - u_{yy}(x,y) = g(x,y), \quad y>0 \end{aligned} \tag{1}$$

в области D, представляющей собой объединение треугольника D^- с вершинами в точках $A(0,0), C(1/2,-1/2), B(1,0)$, квадрата D^+ с вершинами в точках $A, M(0,1), N(1,1), B$ и интервала AB, где под решением понимается функция $u(x,y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^{1,2}(D^+) \cap C^2(D^-)$, являющаяся решением уравнения (1) в областях D^+, D^- и удовлетворяющая граничным условиям

$$u(x,y)|_{CA} = \psi(y), \quad u(x,y)|_{AM} = f(y), \quad u(x,y)|_{MN} = \phi(x), \tag{2}$$

$g(x,y) \in C(D^+ \cup D^-)$, $\psi(y) \in C[-1/2,0], f(y) \in C[0,1], \phi(x) \in C[0,1], \psi(0) = f(0)$, $f(1) = \phi(0)$, установлена справедливость априорной оценки.

Лемма 1.1. *Пусть функция $u(x,y)$ – классическое решение задачи Трикоми (1)-(2), причем $\psi(0) = 0, g(x,y) \in L_2(D)$. Тогда для этого решения справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{L_2(D)} + \|u(x,0)\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_1\Big(\|g(x,y)\|_{L_2(D)} +$$

$$+\|\psi(y)\|_{L_2(-1/2,0)} + \|f(y)\|_{L_1(0,1)} + \|\phi(x)\|_{L_2(0,1)}\Big), \tag{3}$$

в которой положительная постоянная C_1 не зависит от функции $u(x,y)$.

В параграфе 3 главы 1 показано, что оценка (3) без условия нормировки $\psi(0)=0$, вообще говоря, неверна.

Там же обсуждается вопрос об однозначной обобщенной $L_2(D)-$ разрешимости задачи Трикоми

$$Lu(x,y) = g(x,y), \quad (x,y)\in D, \quad u(x,y)|_{AC} = \psi(y),$$

$$u(x,y)|_{AM} = f(y), \quad u(x,y)|_{MN} = \phi(x), \tag{4}$$

где

$$g(x,y)\in L_2(D), \quad \psi(y)\in L_2(-1/2,0),$$

$$f(y)\in L_1(0,1), \quad \phi(x)\in L_2(0,1), \tag{5}$$

а дифференциальный оператор L соответствует левой части уравнения (1):

$$Lu(x,y) \equiv \begin{cases} u_x(x,y) - u_{yy}(x,y), & y>0, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y), & y<0. \end{cases}$$

Для этого вводится в рассмотрение число U, которое полагается равным пределу функции ψ в точке $y = 0$ слева, если этот предел существует.

Определение 1.2. *Назовем обобщенным $L_2(D)-$ решением задачи Трикоми (4)-(5) со значением из $L_2(0,1)$ на линии изменения типа пару функций $[u(x,y), \tau(x)], u(x,y) \in L_2(D), \tau(x) \in L_2(0,1)$, удовлетворяющих тождеству*

$$\iint\limits_D [g(x,y)v(x,y) - u(x,y)L^*v(x,y)]dxdy = Uv(0,0)-$$

$$-\int\limits_{AM} f(y)v(x,y)dy + 2\int\limits_{AC} \psi(y)dv(x,y) + \int\limits_{MN} \phi(x)v_y(x,y)dx-$$

$$-\int\limits_{AB} \tau(x,0)[v_y^+(x,0) - v_y^-(x,0)]dx$$

для любой функции $v(x,y) \in W_2^{1,2}(D^+) \cap W_2^2(D^-), v^+(x,0) = v^-(x,0), x \in (0,1), v(x,y)|_{CB\cup BN\cup MN} = 0; v^+(x,0), v_y^+(x,0)-$ следы со стороны области D^+, $v^-(x,0), v_y^-(x,0)-$ следы со стороны области D^-,

$$L^*v(x,y) \equiv \begin{cases} -v_x(x,y) - v_{yy}(x,y), & y > 0, \\ \\ v_{xx}(x,y) - v_{yy}(x,y), & y < 0. \end{cases}$$

Сформулирована и доказана

Теорема 1.1. *Пусть $g(x,y)$ – произвольная функция из класса $L_2(D)$, а функции $\psi(y), f(y), \phi(x)$ – любые элементы из пространств $L_2(-1/2,0)$, $L_1(0,1), L_2(0,1)$ соответственно. Тогда суще-*

ствует единственное обобщенное $L_2(D)$ – решение задачи Трикоми (4)-(5) со значением из $L_2(0,1)$ на линии изменения типа.

В работах В.М.Говорова и М.Барновской изучен вопрос об однозначной обобщенной разрешимости в классе L_2 первой смешанной задачи для параболического и гиперболического уравнений с негладкими граничными и начальными условиями. Исследована точность априорных оценок решений в соответствующих классах.

В параграфе 4 главы 1 на основе представления решения задачи Трикоми (1)-(2) в виде билинейного ряда доказана

Теорема 1.2. *Пусть $f(y) \in C^{\alpha}[0,1]$, $\alpha \in (0,1]$, $f(0) = f(1)$, $g(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D^{+} \cup D^{-}$, $\psi(y) = 0, \quad y \in [-1/2, 0]$, $\phi(x) = 0, \quad x \in [0,1]$, ε – любое число из полуинтервала $(0,2]$. Тогда существует классическое решение задачи Трикоми (1)-(2) и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{L_{3-\varepsilon}(D^{+})} + \|u(x,y)\|_{C(\overline{D^{-}})} \leqslant C_7 \|f(y)\|_{L_1(0,1)}, \tag{6}$$

где постоянная C_7 не зависит от функции $u(x,y)$.

Установлено, что оценка (6) при $\varepsilon = 0$, вообще говоря, неверна.

Оценка (6) может быть обобщена на случай $p > 1$, т.е. имеет место неравенство

$$\|u(x,y)\|_{L_{3p-\varepsilon}(D^{+})} + \|u(x,y)\|_{C(\overline{D^{-}})} \leqslant C_7 \|f(y)\|_{L_p(0,1)}$$

для любого $\varepsilon \in (0, 3p-1]$.

В параграфе 5 главы 1 рассмотрена в связи с представлением классического решения задачи Трикоми в виде билинейного ряда спектральная задача

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = d\lambda u(1), \tag{8}$$

где d – любое комплексное число, отличное от нуля. Эта задача имеет собственные функции

$$u_n(x) = \sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}x, \tag{9}$$

$-\pi/2 < arg\sqrt{\lambda_n} \leqslant \pi/2$, где собственные числа $\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ являются занумерованными в порядке возрастания их абсолютных величин корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} = d\sqrt{\lambda}.$$

Сформулированы и доказаны две теоремы.

Теорема 1.3. *Если $d \notin \{\operatorname{ctg} z/z\}$, где $\{z\}$ – множество (комплексных) корней уравнения $1 + \dfrac{\sin z\cos z}{z} = 0$, то система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots$ собственных функций задачи (7)-(8) без любой собственной функции является базисом в пространстве $L_p(0,1), \quad p > 1$ (базисом Рисса при $p = 2$). Биортогонально сопряженная система $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе состоит из функций $\Psi_n(x)$, где*

$$\overline{\Psi}_n(x) = \frac{1}{1 + d\sin^2\sqrt{\lambda_n}}\Big(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}x - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sin\sqrt{\lambda_m}}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_m}x\Big),$$

$$n = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots.$$

Если $d = \operatorname{ctg} z/z$, где комплексное число z – любой корень уравнения $1 + \dfrac{\sin z\cos z}{z} = 0$, то вся система (9) собственных функций задачи (7)-(8) образует базис в пространстве $L_p(0,1), \quad p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$). Биортогонально сопряженная система $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе состоит из функций $\Psi_n(x)$, где $\lambda_l = z^2$,

$$\overline{\Psi}_l(x) = \sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{d\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x,$$

$$\overline{\Psi}_n(x) = \frac{1}{1 + d\sin^2\sqrt{\lambda_n}}\Big(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}x - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sin\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x\Big),$$

$$n = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots.$$

Для собственной функции $u_l(x)$ вводится в рассмотрение функция $v_l(x)$, которая является решением задачи

$$v_l''(x) + \lambda v_l(x) = u_l(x), \quad x \in (0,1),$$

$$v_l(0) = 0, \quad -\frac{v_l'(1)}{d} + \lambda_l v_l(1) = u_l(1).$$

Эта функция имеет вид

$$v_l(x) = \alpha\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x,$$

где α – произвольное комплексное число.

Теорема 1.4. *Если $d = \operatorname{ctg} z/z$, где комплексное число z – любой корень уравнения $1+\dfrac{\sin z\cos z}{z} = 0$, то система $\{u_n(x)\}$, состоящая из собственных функций (9) задачи (7)-(8) , $n = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots$, и присоединенной функции $u_l(x) = v_l(x), \lambda_l = z^2$ (вместо собственной функции выбрана соответствующая ей присоединенная) при $\alpha \neq \dfrac{d}{6(d+1)}$ образует базис в пространстве $L_p(0,1), \quad p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$). Биортогонально сопряженная система $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе состоит из функций $\Psi_n(x)$, где*

$$\overline{\Psi}_l(x) = \frac{1}{\alpha - \dfrac{d}{6(d+1)}}\Big(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{d\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x\Big),$$

$$\overline{\Psi}_n(x) = \frac{1}{1 + d\sin^2\sqrt{\lambda_n}}\Big[\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}x - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sin\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x -$$

$$-\frac{d^2\sin\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_l}}{2\Big[\alpha - \dfrac{d}{6(d+1)}\Big]}\Big(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{d\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x\Big)\Big],$$

$$n = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots.$$

В замечании к теореме 1.4 сказано, что система функций $\{u_n(x)\}$ при $\alpha = \dfrac{d}{6(d+1)}$ не полна и не минимальна. Функция

$$\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{d\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x$$

ортогональна ко всем элементам этой системы и справедливо разложение

$$\frac{d}{6(d+1)}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}x - \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}x =$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{1}{1+d\sin^2\sqrt{\lambda_k}}\left[\int\limits_0^1\left(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_k}t - \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}}{\sin\sqrt{\lambda_l}}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_l}t\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{t}{2\sqrt{\lambda_l}}\right)\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_l}tdt\right]\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

В работах З.С.Алиева, Н.Б.Керимова и В.С.Мирзоева рассмотрены вопросы базисности в пространстве $L_p(0,1), p>1$ систем собственных функций некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов второго и четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Изучены осцилляционные свойства решений спектральных задач и получены асимптотические формулы для собственных значений и корневых функций.

В параграфе 2 главы 2 для классического решения задачи Трикоми для параболо-гиперболическое уравнения с нехарактеристической линией изменения типа и вырожденной на линии изменения типа гиперболической частью

$$-yu_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = g(x,y), \quad y<0, \tag{10}$$

$$u_x(x,y) - u_{yy}(x,y) = g(x,y), \quad y > 0$$

в области D, представляющей собой объединение характеристического треугольника D^- уравнения (10) с вершинами в точках $A(0,0)$, $C(1/2,-l), B(1,0), l = (3/4)^{(2/3)}$, квадрата D^+ с вершинами в точках $A, M(0,1), N(1,1), B$ и интервала AB, где под решением понимается функция $u(x,y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^{1,2}(D^+) \cap C^2(D^-)$, являющаяся решением уравнения (10) в областях D^+, D^- и удовлетворяющая граничным условиям

$$u(x,y)|_{CA} = \psi(y), \quad u(x,y)|_{AM} = f(y), \quad u(x,y)|_{MN} = \phi(x), \qquad (11)$$

$g(x,y) \in C(D^+ \cup D^-)$, $\psi(y) \in C[-l,0], f(y) \in C[0,1], \phi(x) \in C[0,1], \psi(0) = f(0)$, $f(1) = \phi(0)$, установлена справедливость априорной оценки

Лемма 2.2. *Пусть функция $u(x,y)$ – классическое решение задачи Трикоми (10)-(11), причем $g(x,y) \in L_2(D)$. Тогда для этого решения справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{L_2(D)} \leqslant C_1\Big(\|g(x,y)\|_{L_2(D)} +$$
$$+\|\psi(y)\|_{G(-l,0)} + \|f(y)\|_{L_1(0,1)} + \|\phi(x)\|_{L_2(0,1)}\Big), \qquad (12)$$

в которой положительная постоянная C_1 не зависит от функции $u(x,y)$.

Предварительно **в параграфе 1** введено в рассмотрение функциональное пространство $G(-l,0)$ измеримых на интервале $(-l,0)$ функций $\psi(y)$, для которых существуют понимаемые в смысле Лебега интегралы

$$\int_{-l}^{0} (-y)\psi^2(y)dy, \quad \int_{-l}^{0} (-y)^{-1/2}|\psi(y)|dy,$$

а норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|\psi(y)\|_{G(-l,0)} = \Big(\int\limits_{-l}^{0}(-y)\psi^2(y)dy\Big)^{1/2} + \int\limits_{-l}^{0}(-y)^{-1/2}|\psi(y)|dy.$$

Там же сформулированы и доказаны два утверждения, описывающих свойства этого пространства.

Априорная оценка (12) справедлива без условия нормировки для решения в точке (0,0), в отличие от оценки (3). Для доказательства априорных оценок (3) и (12) решений задач (1)-(2) и (10)-(11) предложен метод вспомогательных функций, основанный на решении задачи Коши для уравнения первого порядка с разрывным коэффициентом, дающий возможность получать некоторую информацию о гладкости решения на линии изменения типа. Учет геометрии области при применении метода сглаживающих функций был проведен, например, в работах В.П.Диденко, Ю.В.Девингталя и К.Моравец.

В параграфе 4 главы 2 обсуждается вопрос об однозначной обобщенной $L_2(D)-$ разрешимости задачи Трикоми. Для этого вводится в рассмотрение дифференциальный оператор L, который соответствует левой части уравнения (10):

$$Lu(x,y) \equiv \begin{cases} u_x(x,y) - u_{yy}(x,y), & y > 0, \\ \\ -yu_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y), & y < 0. \end{cases}$$

Определение 2.2. *Назовем обобщенным* $L_2(D)-$ *решением задачи Трикоми*

$$Lu(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad u(x,y)|_{AC} = \psi(y),$$
$$u(x,y)|_{AM} = f(y), \quad u(x,y)|_{MN} = \phi(x), \tag{13}$$

где

$$g(x,y) \in L_2(D), \quad \sqrt{(-y)}\psi(y) \in L_2(-l,0),$$
$$(-y)^{(-1/2)}\psi(y) \in L_1(-l,0), \tag{14}$$
$$f(y) \in L_1(0,1), \quad \phi(x) \in L_2(0,1),$$

функцию $u(x,y) \in L_2(D)$*, удовлетворяющую тождеству*

$$\iint\limits_D [g(x,y)v(x,y) - u(x,y)L^*v(x,y)]dxdy =$$
$$= -\int\limits_{AM} f(y)v(x,y)dy + \int\limits_{MN} \phi(x)v_y(x,y)dx+ \tag{15}$$
$$+\int\limits_{AC} \psi(y)(\sqrt{(-y)}dv(x,y) + d(\sqrt{(-y)}v(x,y))$$

для любой функции $v(x,y) \in W_2^{1,2}(D^+) \cap W_2^2(D^-) \cap W_2^1(D)$*, подчиненной граничным условиям* $v(x,y)|_{CB\cup BN\cup MN} = 0$*. Сопряженный оператор* L^* *к оператору* L *определяется по формуле:*

$$L^*v(x,y) \equiv \begin{cases} -v_x(x,y) - v_{yy}(x,y), \quad y > 0, \\ \\ -yv_{xx}(x,y) - v_{yy}(x,y), \quad y < 0. \end{cases}$$

Сформулирована и доказана

Теорема 2.2. *Пусть* $g(x,y)$ *– произвольная функция из класса* $L_2(D)$ *, а функции* $\psi(y), f(y), \phi(x)$ *– любые элементы из пространств* $G(-l,0),\ L_1(0,1), L_2(0,1)$ *соответственно. Тогда существует единственное обобщенное* $L_2(D)$ *– решение задачи Трикоми (13)-(15).*

В параграфах 1 и 2 главы 3 изучается спектральная задача с квадратом спектрального параметра в граничном условии

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{16}$$

$$X(1) = 0, \quad X'(0) = -d\lambda^2 X(0), \tag{17}$$

решением которой является система собственных функций

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}(1-x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

отвечающих собственным значениям λ_n из характеристического уравнения

$$ctg\sqrt{\lambda} = d(\sqrt{\lambda})^3. \tag{18}$$

Эта задача возникает при решении на прямоугольнике смешанной задачи для уравнения теплопроводности с граничным условием также записанным с помощью оператора теплопроводности, только время и пространственная переменная в котором поменялись местами.

Уравнение (18) имеет счетное число положительных корней и, в случае $d > 0$, один отрицательный корень, а в случае $d < 0$ два комплексных корня, сопряженных друг другу. Обозначим через λ_1 и λ_2 – любые два корня этого уравнения, а остальные положительные корни расположим в порядке возрастания. **В параграфе 1** построена биортогонально сопряженная система к исходной системе без двух собственных функций.

Лемма 3.1. *Биортогонально сопряженная система* $\{Y_m(x)\}, m = 3, 4, 5, \dots$ *к системе* $\{X_m(x)\}, m = 3, 4, 5, \dots$ *будет состоять из функций вида*

$$Y_m(x) = \frac{2}{1 + 3d\lambda_m \sin^2\sqrt{\lambda_m}}\Big[X_m(x) -$$

$$-\frac{(\lambda_m - \lambda_2)X_m(0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)X_1(0)}X_1(x) - \frac{(\lambda_m - \lambda_1)X_m(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)X_2(0)}X_2(x)\Big].$$

В формулах для функций биортогонально сопряженной системы следует сопряженные комплексные собственные значения и их соответствующие собственные функции поменять местами.

В параграфе 2 речь идет о равномерной сходимости спектральных разложений по системе собственных функций задачи (16)-(17).

Доказаны следующие утверждения

Теорема 3.1. *Пусть* $f(x) \in C[0,1]$. *Тогда функция* $f(x)$ *разложима в равномерно сходящийся ряд Фурье на отрезке* $[0,1]$ *по системе* $\{X_k(x)\}, k = 3, 4, 5, \ldots$ *в том и только в том случае, когда функция*

$$F(x) = f(x) + \frac{(1-x)}{d(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\sqrt{\lambda_1}\sin\sqrt{\lambda_2}} \times$$

$$\times \int_0^1 [\sin\sqrt{\lambda_2}\sin\sqrt{\lambda_1}(1-t) - \sin\sqrt{\lambda_1}\sin\sqrt{\lambda_2}(1-t)] f(t) dt$$

разложима в равномерно сходящийся на отрезке $[0,1]$ *ряд Фурье по системе* $\{\sqrt{2}\sin\pi(k-2)x\}, k = 3, 4, 5, \ldots$.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, *где* C^α – *класс Гельдера положительного порядка, и удовлетворяет условиям:* $f(1) = 0$ *и*

$$f(0) + \frac{1}{d(\lambda_1 - \lambda_2)\sin\sqrt{\lambda_1}\sin\sqrt{\lambda_2}} \times$$

$$\times \int_0^1 [\sin\sqrt{\lambda_2}\sin\sqrt{\lambda_1}(1-t) - \sin\sqrt{\lambda_1}\sin\sqrt{\lambda_2}(1-t)] f(t) dt = 0.$$

Тогда функция $f(x)$ *разложима в равномерно сходящийся ряд Фурье на отрезке* $[0,1]$ *по системе* $\{X_k(x)\}, k = 3, 4, 5, \ldots$.

Теорема 3.2. *Пусть* $f(x) \in C^\alpha[0,1], \alpha > 0, f(1) = 0$. *Тогда функция* $f(x)$ *разложима в равномерно сходящийся ряд*

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{1+3d\lambda_k\sin^2\sqrt{\lambda_k}}\Big[d\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_k}(\lambda_k-\lambda_1)f(0)+$$

$$+\int_0^1\Big(\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_k}(1-t)-\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}}{\sin\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_1}(1-t)\Big)f(t)dt\Big]\times$$

$$\times\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_k}(1-x) \tag{19}$$

на отрезке $[0,1]$ *по системе* $\{X_k(x)\}, k=2,3,4,\ldots$.

Теорема 3.4. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежит классу Гельдера* $C^{1+\alpha}[0,1]$, $\alpha>0$ *и удовлетворяет граничному условию* $f(1)=0$. *Тогда эта функция разложима в равномерно сходящийся на отрезке* $[0,1]$ *ряд (19) по системе* $\{X_k(x)\}, k=2,3,4,\ldots$, *причем этот ряд можно почленно дифференцировать, и ряд, составленный из производных, будет сходиться равномерно на отрезке* $[0,1]$ *к производной* $f'(x)$.

В параграфе 3 главы 3 рассматривается спектральная задача

$$u''(x)+\lambda u(x)=0,\quad x\in(0,1), \tag{20}$$

$$u'(0)+a\lambda u(0)=0,\quad u'(1)-b\lambda u(1)=0 \tag{21}$$

со спектральным параметром в обоих граничных условиях; a и b – заданные положительные числа. Система собственных функций задачи

(20)-(21) состоит из постоянной $u_1(x) = -\sqrt{2}/a$, соответствующей первому собственному значению $\lambda_1 = 0$, и функций вида

$$u_k(x) = \sqrt{2}\Big(\sin\sqrt{\lambda_k}x - \frac{\cos\sqrt{\lambda_k}x}{a\sqrt{\lambda_k}}\Big), \quad k = 2, 3, 4, \ldots, \tag{22}$$

соответствующих положительным собственным значениям λ_k, которые являются занумерованными в порядке возрастания корнями уравнения

$$ctg\sqrt{\lambda} = \frac{ab\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(a+b)}.$$

К этой спектральной задаче можно свести методом разделения переменных задачу для параболо-гиперболического уравнения с волновым оператором и оператором теплопроводности в случае наличия двух линий изменения типа.

Установлены два утверждения

Теорема 3.5. *В случае несовпадения параметров a и b выберем любые два номера m и n, а в случае равенства a и b выберем любые два номера m и n разной четности. Обозначим $r_1(x) = u_m(x), r_2(x) = u_n(x)$, а из оставшихся элементов нашей системы собственных функций (22) составим новую систему $\{u_k(x)\}$ в порядке возрастания собственных чисел λ_k без номеров n и m. Тогда эта подсистема будет образовывать базис в пространстве $L_p(0,1), p > 1$ (при p=2 базис Рисса), а биортогонально сопряженная система $\{w_k(x)\}$ к новой системе $\{u_k(x)\}$ будет вычисляться по формуле*

$$w_k(x) = \frac{1}{\|u_k\|^2_{L_2(0,1)} + au_k^2(0) + bu_k^2(1)} \times$$

$$\times\Big[u_k(x) - \frac{u_k(0)r_2(1) - u_k(1)r_2(0)}{r_1(0)r_2(1) - r_1(1)r_2(0)}r_1(x) + \frac{u_k(0)r_1(1) - u_k(1)r_1(0)}{r_1(0)r_2(1) - r_1(1)r_2(0)}r_2(x)\Big].$$

Теорема 3.6. *Пусть $a = b$, m и n – любые два номера одинаковой четности. Удалим из нашей системы собственных функций (22) две* *функции с номерами m и n, а из оставшихся элементов составим новую систему $\{u_k(x)\}$ в порядке возрастания собственных чисел λ_k без номеров n и m. Тогда построенная подсистема $\{u_k(x)\}$ исходной системы собственных функций задачи (20)-(21) будет не полна и не минимальна в $L_2(0,1)$.*

В параграфе 2 главы 4 изучается смешанная задача следующего вида. Пусть требуется найти непрерывную на замыкании $\overline{D}$ области $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{23}$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{24}$$

и граничным условиям

$$u(1,t) = 0, \quad au_x(0,t) + u_{xt}(0,t) = bu_t(0,t), \tag{25}$$

$$0 < t < T, \quad a, b = const > 0.$$

Эта задача возникает в теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности с соответствующим равенством потоков на границе раздела, которое приводит к условию со смешанной производной. В связи с изучением задачи (23)-(25) спектральным методом **в параграфе 1** рассмотрена задача

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{26}$$

$$Y'(1) = 0, \quad (a - \lambda)Y(0) = bY'(0), \tag{27}$$

в которой коэффициенты a и b – положительные постоянные. Собственные функции этой задачи имеют вид

$$Y_n(x) = \sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}(1-x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

с положительными собственными числами λ_n из характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \frac{(a-\lambda)}{b\sqrt{\lambda}}.$$

Нулевой индекс присваивается любой наперед выбранной собственной функции, а все остальные нумеруются в порядке возрастания собственных чисел. Функции биортогонально сопряженной системы $\{\Psi_n(x)\}$ к системе $\{Y_n(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ определяются по формуле

$$\Psi_n(x) = \sqrt{2}\Big(\cos\sqrt{\lambda_n}(1-x) - \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_0}(1-x)}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\Big)\times$$
$$\times\Big(1 + \frac{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b} + \frac{a\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b\lambda_n}\Big)^{-1}.$$

Сформулированы и доказаны следующие утверждения

Теорема 4.1. *Пусть $g(x) \in C[0,1]$. В этом случае ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \Psi_n(t)g(t)dtY_n(x) \tag{28}$$

сходится равномерно на отрезке $[0,1]$ к функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда сходится равномерно ряд Фурье для функции $g(x) + \frac{b}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda_0}(1-s)g(s)ds$ по ортонормированному базису $\{\sqrt{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} + \pi(n-1)\Big)(1-x)\}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Следствие. *Пусть $g(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{\alpha}[0,1]$ с любым положительным показателем α и выполнено условие $g(0) + \frac{b}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 \cos\sqrt{\lambda_0}(1-s)g(s)ds = 0$. Тогда функция $g(x)$ разложима в ряд (28), равномерно сходящийся на отрезке $[0,1]$.*

Теорема 4.2. *Пусть функция $g(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^\alpha[0,1]$ с любым положительным показателем α. Тогда ее можно разложить в равномерно сходящийся на отрезке $[0,1]$ ряд*

$$g(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dfrac{g(0)\cos\sqrt{\lambda_n}}{b} + \int\limits_0^1 \cos\sqrt{\lambda_n}(1-t)g(t)dt}{1 + \dfrac{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b} + \dfrac{a\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b\lambda_n}} \cos\sqrt{\lambda_n}(1-x).$$

Спектральная задача (26)-(27) необходима при исследовании равномерной сходимости в классе непрерывно дифференцируемых функций спектральных разложений, отвечающих спектральной задаче, возникающей при решении методом разделения переменных задачи (23)-(25),

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$X(1) = 0, \quad (a-\lambda)X'(0) + \lambda b X(0) = 0,$$

которая имеет только собственные функции

$$X_n(x) = \sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}(1-x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

с положительными собственными числами из того же характеристического уравнения $tg\sqrt{\lambda} = (a-\lambda)/(b\sqrt{\lambda})$, что и спектральная задача, рассмотренная в первом параграфе. Нулевой индекс присваивается любой наперед выбранной собственной функции, а все остальные нумеруются в порядке возрастания собственных чисел. Функции биортогонально сопряженной системы $\{\phi_k(x)\}$ к системе $\{X_k(x)\}, k = 1, 2, 3, \ldots$ определяются по формуле

$$\phi_k(x) = \sqrt{2}\left(\sin\sqrt{\lambda_k}(1-x) - \frac{\sqrt{\lambda_0}\cos\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_0}(1-x)}{\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_0}}\right) /$$

$$/ \left(1 + \frac{\cos^2\sqrt{\lambda_k}}{b} + \frac{a\cos^2\sqrt{\lambda_k}}{b\lambda_k}\right).$$

Если функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера на [0,1] и $f(1) = 0$, то она разложима в равномерно сходящийся на [0,1] ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \phi_k(t) f(t) dt X_k(x)$$

по системе $\{X_k(x)\}, k = 1, 2, 3, \ldots$. Поэтому решение задачи (23)-(25) можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} X_k(x), \quad A_k = \int_0^1 f(z)\phi_k(z)dz. \tag{29}$$

Наличие формулы (29) доказывает существование решения задачи (23)-(25); теорема единственности при такой постановке задачи не имеет места. Потребовав дополнительно непрерывность производной решения задачи (23)-(25) по пространственной переменной в точке (0,0), мы можем гарантировать единственность решения с помощью принципа максимума. Отметим, что одной из первых работ, где применялся принцип максимума для уравнений смешанного типа, была работа С.Агмона, Л.Ниренберга и М.Проттера.

Теорема 4.4. *Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, принадлежащую классу Гельдера $C^\alpha[0,1]$ с любым положительным показателем α и $f(1) = 0$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (23)-(25) с непрерывной производной $u_x(x,t)$ в точке (0,0), которое представимо в виде ряда*

$$u(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\dfrac{f'(0)\cos\sqrt{\lambda_n}}{b\sqrt{\lambda_n}} + \dfrac{f(0)\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} + \int\limits_0^1 \sin\sqrt{\lambda_n}(1-s)f(s)ds}{1 + \dfrac{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b} + \dfrac{a\cos^2\sqrt{\lambda_n}}{b\lambda_n}} \times$$

$$\times \sin\sqrt{\lambda_n}(1-x)e^{-\lambda_n t}.$$

Автор выражает глубокую благодарность академикам Владимиру Александровичу Ильину и Евгению Ивановичу Моисееву за постоянное внимание к его научной деятельности и поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Капустин Н.Ю. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения. // Доклады АН СССР. 1984. Т. 274. №. 6. С. 1294-1298.

2. Капустин Н.Ю. О существовании и единственности L2 - решения задачи Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения. // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291. №. 2. С. 288-292.

3. Капустин Н.Ю. О разрешимости в классе L2 задачи Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. № 1. С. 60-66.

4. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С.72-78.

5. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. II. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1379-1386.

6. Капустин Н.Ю. О L2 разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 50-59.

7. Капустин Н.Ю. О новом подходе к изучению краевых задач с обобщенными L2 решениями. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 975-982.

8. Капустин Н.Ю. О однозначной разрешимости в классе L2 задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с младшими членами. // Доклады АН СССР. 1990. Т. 313. № 4. С. 790-795.

9. Капустин Н.Ю. Об одном свойстве обобщенных аналитических функций. // Доклады РАН. 1992. Т. 322. № 3. С. 465-468.

10. Капустин Н.Ю. Единственность решения задачи Франкля и некоторые вопросы теории обобщенных аналитических функций. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 5. С. 876-884.

11. Капустин Н.Ю. Априорные оценки решения двух задач для обобщенного параболо-гиперболического уравнения. // Доклады РАН. 1995. Т. 341. № 5. С. 585-587.

12. Капустин Н.Ю. Об однозначной разрешимости в классе L2 задачи Трикоми с нелокальным условием на линии изменения типа. // Доклады РАН. 1995. Т. 341. № 6. С. 740-743.

13. Капустин Н.Ю. О спектральных задачах, возникающих в теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности. // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 6. С. 736-739.

14. Капустин Н.Ю. К теории обобщенного параболо-гиперболического уравнения теплопроводности. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 375-383.

15. Капустин Н.Ю. Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1024-1027.

16. Капустин Н.Ю. О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1413-1415.

17. Капустин Н.Ю. О точной в Lp оценке решения задачи распространения тепла в стержне с сосредоточенными теплоемкостями на концах. // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 3. С. 310-311.

18. Капустин Н.Ю. Априорная оценка решения одной смешанной задачи для уравнения теплопроводности. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 10. С. 1375-1379.

19. Капустин Н.Ю. Об одной спектральной задаче в теории оператора теплопроводности. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1509-1511.

20. Капустин Н.Ю. О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504-1507.

21. Капустин Н.Ю. О равномерной сходимости в классе C1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394-1399.

22. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О базисности в пространстве Lp систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357-1360.

23. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Доклады РАН. 2002. Т.385. № 1. С. 20-24.

24. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 656-662.