МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

САРГСЯН ВАГЕ ГНЕЛОВИЧ

МНОЖЕСТВА, СВОБОДНЫЕ ОТ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Сапоженко Александр Антонович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Леонтьев Владимир Константинович
	кандидат физико-математических наук, доцент Дайняк Александр Борисович
Ведущая организация:	Институт системного программирования РАН

Защита диссертации состоится 30 ноября 2012 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685. Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ http://cs.msu.ru в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «__» октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Трифонов Н.П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория перечисления, связанная с проблемами существования, построения и подсчета числа элементов заданного множества, обладающих некоторыми свойствами, представляет собой важный раздел дискретной математики. К проблемам теории перечисления относятся, например, задачи о числе n-вершинных неизоморфных графов с определенными свойствами, числе решений задач целочисленного линейного программирования или о числе изомеров химических элементов. В диссертации решаются некоторые перечислительные задачи теории конечных групп. Подмножество A конечной группы называются (k, l)-свободным от сумм ((k, l)-МСС), если уравнение

$$x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_l$$

не имеет решений в A. Основными задачами являются оценка числа (k, l)-МСС в циклических группах, нахождение максимальной мощности (k, l)-МСС в абелевых группах и оценка числа подмножеств, представимых в виде суммы и разности заданного числа подмножеств в циклических группах.

Основым методом, используемым в диссертации для решения этих задач, является так называемый *метод контейнеров*. Ранее метод использовался А.А. Сапоженко[1, 2], Б. Грином и И. Ружей[3, 4], В. Львом, Т. Лучаком и Т. Шоном[5] при решении перечислительных задач, приведенных выше. Суть метода заключается в том, что для оценки мощности семейства строится система контейнеров, такая, что каждый элемент семейства содержится полностью или «почти полностью» в некотором контейнере из построенной системы. Число контейнеров в силу их специального построения проще оценивать, чем число исходных множеств. В случае, когда

---

[1] Сапоженко А.А. *О числе множеств, свободных от сумм, в абелевых группах* // Вестник Московского Университета, сер. 1. Математика, Механика. 2002. № 4. С. 14–17.

[2] Сапоженко А.А. *Решение проблемы Камерона-Эрдёша для групп простого порядка* // Вычислительная математика и математическая физика. 2009. Т. 49. № 8. С. 1–7.

[3] Green B., Ruzsa I. *Counting sum-sets and sum-free sets modulo a prime* // Studia Sci. Math. Hungarica. 2004. 41. P. 285–293.

[4] Green B., Ruzsa I. *Sum-free sets in abelian groups* // Israel J. Math. 2005. 147. P. 157–188.

[5] Lev V.F., Luczak T., Schoen T. *Sum-free sets in abelian groups* // Israel J. Math. 2001. 125. P. 347–367.

мы имеем дело с задачей нахождения числа объектов, обладающих свойством наследственности, для нахождения нижней оценки логарифма этого числа часто бывает достаточно оценить снизу размер максимального по мощности объекта, обладающего свойством наследственности. В диссертации с помощью метода контейнеров получены новые верхние оценки, а в некоторых случаях и асимптотически неулучшаемые результаты. До последнего времени данный метод применялся только к задаче оценки числа $(2, 1)$-МСС. В данной работе метод контейнеров применяется для более широкого класса линейных уравнений. Множество, $(2, 1)$-свободное от сумм, называется просто *множеством, свободным от сумм* (МСС).

Начало исследований в области оценки числа МСС было положено в работе П. Камерона[6]. В ней исследовалась задача нахождения хаусдорфовой размерности семейства всех МСС в множестве натуральных чисел. Независимо друг от друга Н. Калкин, Н. Алон, П. Эрдёш и А. Гранвиль показали, что хаусдорфова размерность семейства всех МСС равна $1/2$. Дальнейшие исследования были инициированы совместной работой[7] П. Эрдёша и П. Камерона, в которой найдена асимптотика числа МСС в отрезке натуральных чисел от $n/3$ до n и высказана гипотеза о том, что число МСС во всем отрезке натуральных чисел $[1, n]$ есть $O(2^{n/2})$. Гипотеза была доказана независимо А.А. Сапоженко[8] и Б. Грином[9].

Если случай МСС изучался весьма интенсивно, то работ, изучающих (k, l)-МСС в конечных абелевых группах, практически нет. Для получения асимптотических результатов о числе (k, l)-МСС в группах простого порядка существенно использовались результаты теории сложения множеств (например, теоремы Коши-Давенпорта, Полларда). При доказательстве асимптотики логарифма числа (k, l)-МСС возникает необходимость оценки числа наборов $(x_1, \ldots, x_{k+l}) \in A^{k+l}$, таких, что $x_1+\ldots+x_k = x_{k+1} + \ldots + x_{k+l}$. Для решения этой задачи используется техника, свя-

[6]Cameron P.J. *Cyclic automorphisms of a countable graph and random sum-free sets* // Graphs Combin. 1985. 1. P. 129–135.

[7]Cameron P.J., Erdös P. *On the number of sets of integers with various properties* // Journal of Number Theory(Bnaff,AB,1988). Berlin: de Gruyter, 1990. P.61–79.

[8]Сапоженко А.А. *Гипотеза Камерона-Эрдёша* // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 749–752.

[9]Green B. *The Cameron-Erdös conjecture* // Bull. London Math. Soc. 2004. 36(6). P. 769–778.

занная с преобразованиями Фурье.

Задачи о числе (k, l)-МСС и об их максимальной мощности в последние три десятилетия являются предметом активного изучения как за рубежом, так и в России. Основной вклад в данную область исследований внесли П. Камерон, П. Эрдёш, Н. Алон, В. Лев, А.А. Сапоженко, Б. Грин, Т. Лучак, Т. Шон, И. Ружа и другие.

Цель диссертационной работы

Основными целями диссертации являются получение оценок числа (k, l)-МСС в циклических группах, нахождение максимальной мощности (k, l)-МСС в конечных абелевых группах и получение оценок числа подмножеств, представимых в виде суммы и разности заданного числа подмножеств в циклических группах.

Методы исследования

В работе используются методы теории сложения множеств, комбинаторики и функционального анализа. В частности, применяются метод контейнеров и техника, связанная с преобразованиями Фурье.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена асимптотика логарифма числа (k, l)-МСС в группах простого порядка.

2. Получены нижняя и верхняя оценки числа (k, l)-сумм в группах простого порядка.

3. Найдено точное значение максимальной мощности (k, l)-МСС в циклических группах.

4. Улучшена нижняя оценка максимальной мощности (k, l)-МСС в абелевых группах.

5. Найдено точное значение максимальной мощности (k, l)-МСС в абелевых группах при некоторых ограничениях на их экспоненту.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Метод контейнеров был распространён на случай произвольных линейных уравнений с коэффициентами -1 и 1.

Апробация результатов

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

–на семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» под руководством В.Б. Алексеева, А.А. Сапоженко и С.А. Ложкина (кафедра математической кибернетики ВМиК МГУ) в 2012 г.;

–на семинаре «Дискретный анализ» под руководством А.А. Сапоженко, Т.В. Андреевой и А.Б. Дайняка (кафедра математической кибернетики ВМиК МГУ) в 2009–2012 гг.;

–на ежегодных международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» , «Ломоносов-2012» (Москва, 2011–2012 гг.);

–на XI международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 июня 2012 г.).

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 6 работах [1-6], список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 53 страницах. Список литературы содержит 48 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** излагается постановка решаемых в диссертации задач, формулируются основные цели работы и кратко описывается её содержание.

Первая глава посвящена доказательству асимптотики логарифма числа (k,l)-МСС в группах простого порядка[10]. Группу вычетов по модулю n обозначим через $\mathbb{Z}_n$, а через $SF_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ обозначим семейство всех (k,l)-МСС в $\mathbb{Z}_n$. Основный результат первой главы обобщает на случай произвольных k и l следующие теоремы:

Теорема 1 (В. Лев, Т. Шон) [11] *Пусть p — достаточно большое простое число. Тогда выполняются неравенства*

$$2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}(p-1)(1+O(2^{-\varepsilon_1 p})) \leq |SF_{2,1}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{p/2-\varepsilon_2 p},$$

где ε_1 и ε_2 — положительные константы.

Теорема 2 (Б. Грин, И. Ружа) [12] *Пусть p — простое число. Тогда справедливо неравенство*

$$|SF_{2,1}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{p/3+\kappa(p)},$$

где $\kappa(p)/p \to 0$ при $p \to \infty$, причем $\kappa(p) \ll p(\log\log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}$.

Основным результатом первой главы является следующая

Теорема 3 *Пусть p — достаточно большое простое число, $k \geq 0$ и $l \geq 0$ — целые числа, удовлетворяющие условию $k+l \geq 3$ и $k \neq l \,(\mathrm{mod} p)$. Тогда выполняются неравенства*

$$p2^{\lfloor (p-2)/(k+l) \rfloor}(1+o(1)) \leq |SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+l)+o(p)}.$$

[10] Саргсян В.Г. *Асимптотика логарифма числа множеств, (k,l)-свободных от сумм, в группах простого порядка* // Вестник Московского Университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 2. С. 101–108.

[11] Lev V.F., Schoen T. *Cameron-Erdös modulo a prime* // Finite Fields Appl. 2002. 8(1). P. 108–119.

[12] Green B., Ruzsa I. *Counting sum-sets and sum-free sets modulo a prime* // Studia Sci. Math. Hungarica. 2004. 41. P. 285–293.

Заметим, что при достаточно больших p из теоремы 3 вытекает асимптотика логарифма числа $|SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)|$.

Множество $d\star A = \{d\cdot a \mid a \in A\}$ называется *растяжением* множества A. Заметим также, что если $A \in SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)$, то для любого $d \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ и всякого $B \subseteq A$ растяжение $d \star B \in SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)$.

Доказательство нижней оценки основано на том, что всякое растяжение подмножеств множества из $SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)$ также принадлежит семейству $SF_{k,l}(\mathbb{Z}_p)$, и оценке количества растяжений подмножеств заданного множества:

Теорема 4 (В. Лев, Т. Шон) [13] *Пусть p — простое число, $\mathcal{I}$ — подмножество последовательных элементов группы $\mathbb{Z}_p$ и $|\mathcal{I}| < p/3+1$. Тогда число всех растяжений подмножеств множества $\mathcal{I}$ есть*

$$2^{|\mathcal{I}|}(1-2^{-|\mathcal{I}\setminus(-\mathcal{I})|-1})(p-1)+O(p^2 2^{5|\mathcal{I}|/6}).$$

При доказательстве верхней оценки используется конструкция из работы Грина и Ружи, идея которой состоит в покрытии семейства (k,l)-МСС семейством контейнеров, таким, что каждое (k,l)-МСС почти содержится в некотором контейнере и каждый контейнер порождает не более чем $o(p^{k+l-1})$ мультипликативных наборов, то есть наборов $(x_1,\ldots,x_{k+l})$, таких, что $x_1+\ldots+x_k = x_{k+1}+\ldots+x_{k+l}$. Для оценки числа мультипликативных наборов используются определения и утверждения, приведенные ниже.

Пусть $A_1,\ldots,A_m$ — непустые подмножества группы $\mathbb{Z}_p$. Условимся через $\chi_{A_1}(x),\ldots,\chi_{A_m}(x)$ обозначать характеристические функции соответственно множеств $A_1,\ldots,A_m$. Определим $(\chi_{A_1} * \ldots * \chi_{A_m})(x)$ как количество наборов $(x_1,\ldots,x_m) \in A_1\times\ldots\times A_m$, таких, что $x = x_1+\ldots+x_m$. Положим

$$S_{h,m}(A_1,\ldots,A_m) = \{x\in\mathbb{Z}_p \mid (\chi_{A_1} * \ldots * \chi_{A_m})(x) \geq h\}.$$

С использованием теорем Коши-Давенпорта и Полларда из теории сложения множеств получаем нижную оценку величины $|S_{h,m}(A_1,\ldots,A_m)|$.

[13] Lev V. F., Schoen T. *Cameron-Erdös modulo a prime* // Finite Fields Appl. 2002. 8(1). P. 108–119.

Лемма 1 *Пусть p — простое число, $A_1, \ldots, A_m$ — непустые подмножества группы $\mathbb{Z}_p$, и $h > 0$, такое, что $(hp)^{1/2} \le \min(|A_1|, \ldots, |A_m|)$. Тогда справедлива оценка*

$$|S_{h,m}(A_1, \ldots, A_m)| \ge \min(p, |A_1| + \ldots + |A_m| - m + 2) - 2(hp)^{1/2}.$$

Пусть L — натуральное число. Для каждого $y \in \mathbb{Z}_p$ определим разбиение $R_{y,L}$ группы $\mathbb{Z}_p$ на интервалы вида

$$J_i^y = [iL + 1 + y, (i+1)L + y], \quad 0 \le i \le \lfloor p/L \rfloor - 1.$$

Все интервалы J_i^y из $R_{y,L}$ имеют длину L, а множество $J_y = \mathbb{Z}_p \setminus \bigcup_i J_i^y$ имеет мощность $p - L\lfloor p/L \rfloor < L$. Множество $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ называется *L-гранулированным*, если для некоторого $d \in \mathbb{Z}_p$ и некоторого разбиения $R_{y,L}$ растяжение $d \star A$ является объединением нескольких интервалов J_i^y разбиения $R_{y,L}$ (отличных от J_y). Через $G_L(\mathbb{Z}_p)$ обозначим множество всех L-гранулированных подмножеств группы $\mathbb{Z}_p$.

Лемма 2 *Справедлива оценка*

$$|G_L(\mathbb{Z}_p)| \le p2^{p/L}.$$

Следующее утверждение является основным инструментом получения оценки числа мультипликативных наборов. В доказательстве используется техника, связанная с преобразованиями Фурье. Для любых целых i и j обозначим $iA - jA = \{x_1 + \ldots + x_i - x_{i+1} - \ldots - x_{i+j} \mid x_1, \ldots, x_{i+j} \in A\}$.

Лемма 3 *Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$, $|A| = \alpha p$, и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — положительные действительные числа, L — натуральное число, k и l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \ge 2$, а p — простое число, такое, что*

$$p > \left(\sqrt{8(k+l)}L\right)^{4^{2(k+l)}\alpha^{2(k+l-1)}\varepsilon_1^{-2(k+l)}\varepsilon_2^{-2(k+l-1)}\varepsilon_3^{-1}}.$$

Тогда существует подмножество $A' \subseteq \mathbb{Z}_p$ со следующими свойствами:

(i) *A' является L-гранулированным;*

(ii) $|A \setminus A'| \le \varepsilon_1 p$;

(iii) *множество* $kA - lA$ *содержит все элементы* $x \in \mathbb{Z}_p$, *такие, что* $(\underbrace{\chi_{A'} * \ldots * \chi_{A'}}_{k} * \underbrace{\chi_{-A'} * \ldots * \chi_{-A'}}_{l})(x) \geq (\varepsilon_2 p)^{k+l-1}$, *за исключением не более* $\varepsilon_3 p$ *элементов.*

Вторая глава посвящена оценке числа подмножеств, представимых в виде суммы и разности заданного числа подмножеств в группах простого порядка[14, 15].

Пусть G — абелева группа, $k \geq 0$ и $l \geq 0$, $k + l \geq 2$. Подмножество $B \subseteq G$ называется (k,l)-*суммой*, если существует подмножество $A \subseteq G$, такое, что

$$B = kA - lA = \{x_1 + \ldots + x_k - x_{k+1} - \ldots - x_{k+l} \mid x_1, \ldots, x_{k+l} \in A\}.$$

Через $SS_{k,l}(G)$ обозначим семейство всех (k,l)-сумм в G. Основный результат второй главы обобщает на случай произвольных k и l следующую теорему.

Теорема 5 (Б. Грин, И. Ружа) [16] *Пусть* p — *простое число. Тогда справедливы неравенства*

$$p^2 2^{p/3} \ll |SS_{2,0}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{p/3+\kappa(p)}$$

где $\kappa(p)/p \to 0$ *при* $p \to \infty$, *причем* $\kappa(p) \ll p(\log\log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}$.

Основным результатом второй главы является следующая

Теорема 6 *Пусть* p — *достаточно большое простое число,* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$ — *целые числа, удовлетворяющие условию* $k + l \geq 2$. *Тогда выполняются неравенства*

$$C_{k,l} 2^{p/(2(k+l)-1)} \leq |SS_{k,l}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+l+1)+o(p)},$$

где $C_{k,l}$ — *положительная константа.*

[14] Sargsyan V. *Counting (k,l)-sumsets in groups of a prime order* // Acta Universitatis Sapientiae, Informatica. 2012. 4(1). P.33–47.

[15] Саргсян В.Г. *О числе k-сумм в группах простого порядка* // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 3. С. 25–38.

[16] Green B., Ruzsa I. *Counting sum-sets and sum-free sets modulo a prime* // Studia Sci. Math. Hungarica. 2004. 41. P. 285–293.

Заметим, что при достаточно больших p и $k+l=2$ из теоремы 6 вытекает асимптотика логарифма числа $|SS_{k,l}(\mathbb{Z}_p)|$.

Доказательство нижней оценки проводится путем построения большого числа (k,l)-сумм. Положим $L = \lfloor p/2(2(k+l)-1)\rfloor - 1$. Построенные множества имеют следующий вид:

$$B(A) = k(A \cup \{-2L, 2L\}) - l(A \cup \{-2L, 2L\}),$$

где $A \subseteq [-L, L]$.

Нетрудно убедиться, что различные $A \subseteq [-L, L]$ порождают различные множества $B(A)$.

Доказывается лемма, которая утверждает, что число (k,l)-сумм, содержащих заданную арифметическую прогрессию длины $(k+l)(L-1)+1$, не меньше $c_{k,l}2^{2L}$, где $c_{k,l}$ — некоторая положительная константа.

Положим $N_{k,l} = \lceil \log(8(k+l)^2)/\log(4/3)\rceil$ и

$$\mathcal{X} = [0, N_{k,l}] \cup \bigcup_{i=1}^{k+l-1} [\lfloor (i+1)L/(k+l)\rfloor - N_{k,l}, \lceil (i+1)L/(k+l)\rceil].$$

Множество $A \subseteq [-L, L]$ определим следующим образом:

$$A = A(C) = C \cup \mathcal{X} \cup -\mathcal{X},$$

где элементы множества C выбраны из $[-L, L] \setminus \{-\mathcal{X} \cup \mathcal{X}\}$ случайно с вероятностью $1/2$, независимо друг от друга.

Вероятностным методом доказывается, что существует по крайней мере $2^{2L-2|\mathcal{X}|+1}$ подмножеств $A \subseteq [-L, L]$, таких, что $kA - lA$ содержит арифметическую прогрессию $[k - lL, kL - l]$.

При доказательстве верхней оценки используется конструкция, идея которой состоит в покрытии семейства (k,l)-сумм семейством контейнеров. Доказательство верхней оценки основано на лемме 3.

В третьей главе исследуется максимальная мощность (k,l)-МСС в конечных абелевых группах.

Через $\lambda_{k,l}(G)$ обозначим максимальную мощность (k,l)-МСС в абелевой группе G. Положим $\delta_{k,l}(n) =$НОД$(n, k-l)$, и $\mu_{k,l}(n)$ — наименьшее целое число из интервала $[1, \delta_{k,l}(n)]$, для которого существует число

$h \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, такое, что выполняются неравенства

$$1 + l \left\lfloor \frac{n-1-\mu_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor \leq (k-l)h \leq n-1-k \left\lfloor \frac{n-1-\mu_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor .$$

Заметим, что определение $\mu_{k,l}(n)$ корректно, потому что при $\mu_{k,l}(n) = \delta_{k,l}(n)$ существование числа h вытекает из неравенства

$$\left(n-1-k \left\lfloor \frac{n-1-\delta_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor\right) - \left(1 + l \left\lfloor \frac{n-1-\delta_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor\right) + 1 \geq \delta_{k,l}(n)$$

и того, что подгруппы группы $\mathbb{Z}_n$, порожденные соответственно элементами $k-l$ и $\delta_{k,l}(n)$, совпадают.

В параграфе 3.2 найдено точное значение максимальной мощности (k,l)-МСС в циклических группах.

Теорема 7 *Для любого n выполняется равенство*

$$\lambda_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\}.$$

Через $\beta_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ обозначим максимальную мощность арифметической прогрессии, (k,l)-свободной от сумм в $\mathbb{Z}_n$, содержащейся в некотором смежном классе нетривиальной подгруппы группы $\mathbb{Z}_n$.

Параграф 3.2 содержит вспомогательное утверждение: теорему Дж.Е. Олсона[17] о сложении множеств в абелевых группах. Данная теорема, дающая нижнюю оценку сложения двух множеств, необходима для оценки $\beta_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$. С использованием теоремы Олсона доказывается следующее утверждение.

Лемма 4 *Для любого n справедливо*

(i) *если $k-l$ делится на n, то $\beta_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = 0$;*

(ii) *если $1 <$НОД$(n, k-l) < n$, то*

$$\frac{n}{r_1} \leqslant \beta_{k,l}(\mathbb{Z}_n) \leqslant \max\left(\frac{n}{r_1}, \left\lfloor \frac{2n}{r_2(k+l+2)} \right\rfloor\right),$$

где r_1 — наименьший делитель n, такой, что $k-l$ не делится на r_1, а r_2 — наименьший делитель n, такой, что $k-l$ делится на r_2;

[17]Olson J.E. *On the sum of two sets in a group* // Journal of Number Theory. 1984. 18(18). P. 110–120.

(iii) *если НОД*$(n, k-l) = 1$, *то*

$$\beta_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \frac{n}{p},$$

где p *— наименьший простой делитель* n.

Через $\gamma_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ обозначим максимальную мощность арифметической прогрессии, (k,l)-свободной от сумм в $\mathbb{Z}_n$, не содержащейся ни в одном из смежных классов никакой нетривиальной подгруппы группы $\mathbb{Z}_n$. При доказательстве теоремы 7 возникла задача оценки $\gamma_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$. Доказывается следующее утверждение.

Лемма 5 *Для любого* n *справедливо*

$$\gamma_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \le k+l+\mu_{k,l}(n); \\ \left\lfloor \frac{n-1-\mu_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor + 1, & \text{если } n \ge k+l+\mu_{k,l}(n)+1. \end{cases}$$

Через $\alpha_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$ обозначим максимальную мощность арифметической прогрессии, (k,l)-свободной от сумм в циклической группе $\mathbb{Z}_n$.

В силу лемм 4 и 5 получаем точное значение величины $\alpha_{k,l}(\mathbb{Z}_n)$.

Теорема 8 *Для любого* n *выполняется равенство*

$$\alpha_{k,l}(\mathbb{Z}_n) = \max\left(\frac{n}{r}, \left\lfloor \frac{n-1-\mu_{k,l}(n)}{k+l} \right\rfloor + 1\right),$$

где r *— наименьший делитель* n, *такой, что* $k-l$ *не делится на* r.

В параграфе 3.3 улучшена нижняя оценка максимальной мощности (k,l)-МСС в абелевых группах.

Теорема 9 *Пусть* G *— абелева группа порядка* n, *а* k *и* l *— различные положительные целые числа. Тогда имеет место неравенство*

$$\lambda_{k,l}(G) \ge \max_{d|\nu}\left\{\left(\left\lfloor \frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l} \right\rfloor + 1\right)\frac{n}{d}\right\},$$

где ν *— экспонента группы* G.

Доказательство утверждения основано на теореме 7 и оценке максимальной мощности (k,l)-МСС в абелевых группах:

Теорема 10 (Б. Байнок) [18] *Пусть d — делитель экспоненты ν абелевой группы G. Тогда справедливо неравенство*

$$\lambda_{k,l}(G) \geq \lambda_{k,l}(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}.$$

Кроме того, в параграфе 3.3 найдено точное значение максимальной мощности (k,l)-МСС в абелевых группах при некоторых ограничениях на их экспоненту.

Теорема 11 *Пусть G — абелева группа порядка n, а k и l — различные положительные целые числа. Тогда, если экспонента ν группы G имеет делитель d, такой, что $d \notin \{1, \ldots, \mu_{k,l}(d)\} \pmod{k+l}$, то справедливо равенство*

$$\lambda_{k,l}(G) = \max_{d|\nu}\left\{\left(\left\lfloor\frac{d-1-\mu_{k,l}(d)}{k+l}\right\rfloor + 1\right)\frac{n}{d}\right\}.$$

Доказательство основано на теореме 8 и оценке максимальной мощности (k,l)-МСС в абелевых группах:

Теорема 12 (Я.О. Хамидун, А. Плань) [19] *Пусть G — абелева группа порядка n, а k и l — различные положительные целые числа. Тогда справедливы неравенства*

$$\max_{d|\nu}\left\{\alpha_{k,l}(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}\right\} \leqslant \lambda_{k,l}(G) \leqslant \max\left(\frac{n-\varepsilon(n)}{k+l}, \max_{d|\nu}\left\{\alpha_{k,l}(\mathbb{Z}_d)\frac{n}{d}\right\}\right),$$

где ν — экспонента группы G, а $\varepsilon(n) = 1$, если n — нечетное, и $\varepsilon(n) = 0$, иначе.

Благодарности

Автор пользуется случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Александру Антоновичу Сапоженко за постановку задачи, постоянное внимание к работе, ценные замечания и полезное обсуждение.

[18] Bajnok B. *On the maximum size of a (k,l)-sum-free subset of an abelian group* // Journal of Number Theory. 2009. 5(6). P. 953-971.

[19] Hamidoune Y.O., Plagne A. *A new critical pair theorem applied to sum-free sets in Abelian groups* // Commentarii Mathematici Helvetici. 2004. 79. P. 183–207.

Публикации автора по теме диссертации

1. Саргсян В.Г. *Асимптотика логарифма числа множеств, (k,l)-свободных от сумм, в группах простого порядка* // Вестник Московского Университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 2. С. 101–108.

2. Саргсян В.Г. *О числе множеств, k-свободных от нуля, в группах простого порядка* // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ. 2012. Вып. 9. С. 154–172.

3. Саргсян В.Г. *О числе множеств, свободных от нуля, в группах простого порядка* // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». Секция «Комбинаторный анализ». 18–23 июня, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 266–269.

4. Саргсян В.Г. *О числе k-сумм в группах простого порядка* // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 3. С. 25–38.

5. Sargsyan V. *Counting (k,l)-sumsets in groups of a prime order* // Acta Universitatis Sapientiae, Informatica. 2012. 4(1). P. 33–47.

6. Саргсян В.Г. *Количество (k,l)-сумм в группах простого порядка* // Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2012». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». 9–13 апреля, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: МАКСПресс, 2012. С. 105.