Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

ФУРСОВ Андрей Серафимович

Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный консультант:
доктор технических наук,
академик РАН, профессор *Емельянов С.В.*

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор *Елкин В.И.*
доктор физико-математических наук,
профессор *Крищенко А.П.*
доктор физико-математических наук,
профессор *Потапов М.М.*

Ведущая организация:
Институт системного анализа РАН

Защита состоится "7" ноября 2012 г. в 15 часов 30 мин на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____»____________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
профессор, доктор физико-математических наук *Захаров Е.В.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Предлагаемая диссертация посвящена одной из актуальных задач современной теории управления, а именно задаче одновременной стабилизации конечного семейства линейных динамических объектов, т.е. задаче построения единого регулятора, обеспечивающего стабилизацию каждого объекта семейства.

Важность задачи одновременной стабилизации динамических объектов обусловлена тем фактом, что она возникает во многих практических задачах. Например, в случае, когда объект управления может работать в нескольких режимах (каждый из которых описывается своей математической моделью), причем информация о переходе от одного режима к другому может отсутствовать, если такой переход вызван отказом какого-либо элемента объекта. Цель управления — синтез регулятора, обеспечивающего устойчивость системы в любом из возможных режимов.

В настоящей работе рассматривается задача стабилизации динамических объектов с использованием закона управления в виде обратной связи. В случае, когда все переменные состояния доступны для измерения, может быть сформулирована задача построения обратной связи по состоянию, если же измеряется лишь вектор выхода, то ставится задача построения обратной связи по выходу.

В общей постановке задача стабилизации[1] по состоянию динамического конечномерного объекта, заданного системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f(0,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

может быть качественно сформулирована одним из следующих способов:

[1]Для определенности рассматривается стабилизация в нуле пространства состояний, т.е. при $x = 0$.

1) найти статическую обратную связь по состоянию

$$u = g(x),$$

при которой замкнутая система

$$\dot{x} = f(x, g(x))$$

асимптотически устойчива в нуле;

2) найти динамическую обратную связь по состоянию

$$\begin{cases} \dot{z} = q(x, z), \\ u = g(x, z), \end{cases}$$

при которой решение $x = 0$, $z = 0$ замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, g(x, z)), \\ \dot{z} = q(x, z) \end{cases}$$

является асимптотически устойчивым.

Аналогично, задача стабилизации с использованием обратной связи по выходу для объекта

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \quad f(0, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ y = h(x), \qquad h(0) = 0 \end{cases}$$

заключается в том, чтобы построить:

1) статический регулятор по выходу

$$u = g(y),$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, g(h(x)))$$

или

2) динамический регулятор по выходу

$$\begin{cases} \dot{z} = q(y, z), \\ u = g(y, z), \end{cases}$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость решения $x = 0$, $z = 0$ замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, g(h(x), z)), \\ \dot{z} = q(h(x), z). \end{cases}$$

Таким образом, стабилизирующая обратная связь не единственна и может быть реализована в различных классах регуляторов. В зависимости от используемых математических моделей динамических объектов возможны различные варианты формулировок задач стабилизации.

Так, в случае стабилизации по выходу линейного стационарного объекта

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^l, \\ y = Cx, \qquad y \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

линейным же (динамическим) регулятором, требуется указать обратную связь вида

$$\begin{cases} u = -Dz - My, \\ \dot{z} = Hz + Qy, \quad z \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

при которой замкнутая система

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BMC)x - BDz, \\ \dot{z} = QCx + Hz \end{cases}$$

экспоненциально устойчива.

Если объект линейный, стационарный и скалярный, то задачу стабилизации можно переформулировать следующим образом.

Объекту

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \\ y = cx, \qquad y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ставится в соответствие скалярная передаточная функция

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b,$$

являющаяся дробно-рациональной функцией комплексной переменной s, т.е.

$$W(s) = \frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)}, \tag{1}$$

где m и n — степени полиномов $\beta_m(s)$ и $\alpha_n(s)$ соответственно:

$$n > m.$$

Требуется найти такую передаточную функцию регулятора

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

с полиномами $p(s)$ и $q(s)$, при которой устойчивы все следующие дробно-рациональные функции

$$\begin{gathered} \frac{W}{1+WR} = \frac{\beta q}{\alpha q + \beta p}, \quad \frac{R}{1+WR} = \frac{\alpha p}{\alpha q + \beta p}, \\ \frac{WR}{1+WR} = \frac{\beta p}{\alpha q + \beta p}, \quad \frac{1}{1+WR} = \frac{\alpha q}{\alpha q + \beta p} \end{gathered} \tag{2}$$

(напомним, что устойчивость какой-либо дробно-рациональной функции $\dfrac{b(s)}{a(s)}$ означает устойчивость ее знаменателя и $\deg\ a(s) \geqslant \mathrm{deq}\ b(s)$). Устойчивость указанных дробно-рациональных функций влечет так называемую *внутреннюю стабилизацию* динамического объекта, которая обеспечивает

— физическую реализуемость регулятора $R(s)$, т.е. выполнение условия

$$\deg\ q(s) \geqslant \deg\ p(s);$$

— правильность передаточной функции (степень числителя не превосходит степени знаменателя) замкнутой системы;

— грубость замкнутой системы по отношению к малым вариациям параметров регулятора и объекта.

Если же при стабилизации объекта $W(s)$ ограничиться только требованием устойчивости полинома

$$\varphi(s) = \alpha(s)q(s) + \beta(s)p(s),$$

то в результате передаточная функция регулятора или замкнутой этим регулятором системы могут оказаться неправильными (степень числителя больше степени знаменателя), либо замкнутая система может оказаться не грубой, что приведет к ее неустойчивости. Чтобы исключить это, необходимо требовать устойчивость функций (2).

Теперь отметим, что всякий регулятор стабилизирует некоторое семейство объектов. Например, если регулятор с фиксированными параметрами

$$\begin{cases} u = -Dz - My, \\ \dot{z} = Hz + Qy \end{cases}$$

стабилизирует номинальный объект

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + B_0u, \\ y = C_0x, \end{cases}$$

то он также стабилизирует (в силу непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от ее параметров) и любой объект из окрестности (может быть достаточно малой) точки

$$\{A_0, B_0, C_0\}.$$

Такой регулятор можно назвать *универсальным* (для объектов из указанной окрестности). В классической теории управления универсальность регулятора гарантируется непрерывной зависимостью свойств замкнутой системы от параметров задачи при сохранении порядка и относительного порядка объекта. Как правило, подобная универсальность сохраняется при достаточно малом шевелении параметров задачи. Таким образом, универсальный регулятор обеспечивает стабилизацию некоторого "локального" семейства, порождаемого номинальным объектом (вследствие малых изменений его параметров).

Синтез универсального регулятора для заданного семейства объектов — стандартная и амбициозная задача теории обратной связи. Проблема состоит в описании в исходных терминах всего стабилизируемого семейства объектов, в определении проверяемого условия существования универсального регулятора, в нахождении процедуры синтеза такого регулятора, а при возможности, и в описании всего семейства универсальных стабилизаторов.

Как уже отмечалось, существуют различные варианты постановок задач стабилизации семейств динамических объектов. Упомянем некоторые из них.

Так в теории *робастной стабилизации* рассматриваются задачи построения стабилизирующего регулятора для некоторых классов неопределенных объектов. Неопределенность объекта, в данном случае, выступает в роли возмущения номинального объекта. Номинальный объект при этом может рассматриваться как точка в некотором пространстве, а возмущенные объекты представляют собой другие точки, содержащиеся в окрестности номинального объекта. Универсальный регулятор строится в этом случае таким образом, чтобы стабилизировать любой объект из указанной окрестности. При этом неопределенность (параметрическая или частотная) предполагается в некотором смысле "ограниченной". Фактически, речь идет об одновременной стабилизации бесконечного семейства динамических объектов, "незначительно" отличающихся друг от друга.

Задачи *адаптивной стабилизации* возникают в случаях, когда необходимо стабилизировать неопределеный объект, чьи динамические характеристики в процессе функционирования системы управления могут изменяться в сколь угодно широких пределах. В этом случае речь идет об одновременной стабилизации бесконечного семейства объектов, которые могут существенно отличаться друг от друга, но эти отличия удовлетворяют некоторому условию согласования. Так, при построении адаптивного регулятора неопределенность характеризуется набором неизвестных параметров и обратная связь используется не только для стабилизации, но и для того, чтобы оценить эти параметры в процессе функционирования объекта.

Методы *абсолютной стабилизации*, опирающиеся на теорию абсолютной устойчивости, предполагают построение регулятора, стабилизирующего некоторое множество нелинейных объектов, определяемых заданными линейными динамическими звеньями и заданным классом нелинейных статических звеньев.

В современной теории управления сформировались методы, позволяющие синтезировать универсальные стабилизаторы для параметрических семейств объектов, допускающих изменения неизвестного параметра в ограниченных или даже бесконечных пределах. К ним, в первую очередь, относятся: методы глубокой обратной связи или больших коэффициентов усиления; адаптивного управления; активного поиска; универсальные регуляторы Нуссбаума; методы теории систем переменной структуры и др. Общая особенность классов стабилизируемых подобными регуляторами объектов — постоянство их порядка и/или относительного порядка.

Поэтому естественным развитием проблемы синтеза универсального стабилизатора является переход к семействам объектов, вообще говоря, разных порядков и относительных порядков, но отличающихся, может быть, не только этим. Такие объекты называют *разнородными*. Впервые на проблему стабилизации в такой постановке обратили внимание J. Birdwell, D. Castanon и

M. Athans в 1979 г. А в 1982 г. R. Saeks и J. Murray ввели для нее термин *одновременная стабилизация* (*simultaneously stabilizatioin*).

Сегодня под задачей одновременной стабилизации семейства динамических объектов подразумевается поиск универсального регулятора, стабилизирующего, как правило, конечное семейство разнородных объектов.

Таким образом общепризнано, что для линейных скалярных и стационарных объектов, описываемых передаточными функциями вида (1), постановка задачи одновременной стабилизации формулируется следующим образом. Рассматривается k линейных стационарных объектов различных порядков n_i, $i = 1, \ldots, k$, с передаточными функциями

$$W_1(s) = \frac{\beta_1(s)}{\alpha_1(s)}, \ldots, W_k(s) = \frac{\beta_k(s)}{\alpha_k(s)}, \tag{3}$$

где $\beta_i(s) = b_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \cdots + b_{0,i}$, $\alpha_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \cdots + a_{0,i}$, причем все полиномы $\beta_i(s)$, $\alpha_i(s)$ взаимно просты.

Спрашивается, существует ли универсальный линейный стационарный регулятор

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}, \tag{4}$$

внутренне стабилизирующий все объекты (3). Решение задачи стабилизации в указанной постановке носит название *полиномиального подхода.*

Естественно, можно сформулировать задачу одновременной стабилизации и в пространстве состояний (*матричный подход*), рассматривая стабилизацию по выходу, или по состоянию.

При одновременной стабилизации по выходу k линейных стационарных скалярных объектов, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + b_i u, \\ y = c_i x, \end{cases} \qquad A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i},\ x, b_i, c_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ u, y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

и находящихся в общем положении (управляемых и наблюдаемых), требуется построить универсальный линейный регулятор, задаваемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{z} = Rx + ry, \\ u = h_1 z + h_2 y, \end{cases} \qquad R \in \mathbb{R}^{l\times l},\ z, h_1 \in \mathbb{R}^l,\ r, h_2 \in \mathbb{R},$$

который стабилизирует все объекты указанного семейства (5).[2]

Заметим, что в приведенных постановках задачи одновременной стабилизации объекты (3) или (5) являются строго физически реализуемыми, однако это требование можно ослабить и заменить на условие обычной физической реализуемости, что в случае полиномиального подхода предполагает выполнение неравенств $\operatorname{deq}\alpha(s) \geqslant \operatorname{deq}\beta(s)$, а в случае матричного подхода объекты задаются уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + b_i u, \\ y = c_i x + d_i u, \end{cases} \qquad A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i},\ x, b_i, c_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ u, y, d_i \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

При одновременной стабилизации по состоянию k линейных стационарных управляемых объектов одинаковых порядков, задаваемых уравнениями

$$\dot{x} = A_i x + b_i u, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x, b_i \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

требуется построить универсальный линейный стационарный регулятор

$$u = \theta x, \quad \theta \in \mathbb{R}^n$$

стабилизирующий все объекты семейства (7), т.е. обеспечивающий устойчивость всех матриц

$$\bar{A}_i = A_i + b_i\theta, \quad i = 1, \ldots, k.$$

---

[21]Аналогичным образом ставятся задачи одновременной стабилизации для объектов дискретного времени

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + bu^t, \\ y^t = cx^t. \end{cases}$$

В какой-то степени задачи одновременной стабилизации семейства объектов близки к задачам теории робастной стабилизации, в рамках которой разрабатываются методы стабилизации объектов с параметрической неопределенностью, при этом параметры, как правило, меняются в некоторой области, заданной известными ограничениями. Важное отличие между задачами робастной стабилизации и одновременной стабилизации семейства объектов состоит в следующем. Во-первых, известные методы робастной стабилизация применяются к бесконечным семействам объектов одного и того же динамического порядка и одинаковой структуры, в то время как методы одновременной стабилизации семейств ориентированы на конечное число стабилизируемых объектов с, вообще говоря, различными динамическими порядками; во-вторых, в отличие от теории робастной стабилизации, объекты которой параметризованы неопределенными параметрами специальным образом и в этом смысле должны лежать "близко" к номинальному, для одновременной стабилизации семейств такое ограничение на класс объектов в явном виде отсутствует. Принципиальное отличие задачи одновременной стабилизации от задач робастной стабилизации можно продемонстрировать с помощью примера, приведенного в монографии V.Blondel (1995 г.) а именно, известно, что если для континуального семейства $P = \{\lambda W(s) \, : \, \lambda \in [0;\, 1]\}$, где $W(s)$ строго правильная передаточная функция порядка n, существует универсальный стабилизатор, то его порядок строго меньше $3n-1$; с другой стороны как доказал B.Ghosh в 1986 г., для конечного семейства $P' = \{\lambda W(s) \, : \, \lambda = 0,\, \frac{1}{2},\, 1\}$ не существует оценки сверху порядка универсального регулятора (в случае его существования) для этого семейства, зависящей только от n.

За истекший период для решения задачи одновременной стабилизации предложены различные методы: это, например, метод факторизации, геометрический метод, методы параметризации в рамках полиномиального подхода, метод сверхстабилизации, методы, основанные на решении линейных матричных неравенств в рамках матричного подхода.

Как известно, для стабилизации одного объекта решение задачи всегда существует, более того, можно описать все стабилизующие регуляторы с помощью параметризации Youla.

Проблема возможности одновременной стабилизации двух динамических объектов, как показал Vidyasagar в 1982 г., сводится к задаче стабилизации одного объекта с помощью устойчивого регулятора (т.е. регулятора с устойчивой передаточной функцией) и допускает полное решение в терминах перемежаемости действительных нулей и полюсов объекта.

Но уже в случае одновременной стабилизации трех объектов общее решение проблемы отсутствует. Более того, известны результаты о так называемой рациональной неразрешимости задачи одновременной стабилизации $k \geqslant 3$ объектов. Blondel в 1994 году установил следующий факт: невозможно построить алгоритм, который позволял бы за конечное число шагов ответить на вопрос об одновременной стабилизации трех и более объектов, используя только коэффициенты их передаточных функций, арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление), логические операции (”и”, ”или”) и системы равенств или неравенств. Поэтому в виду сложности решения проблемы одновременной стабилизации в общем случае, в современных исследованиях по указанной тематике предлагается использовать следующие подходы:

— сужение классов объектов, для которых устанавливаются необходимые и достаточные условия одновременной стабилизации;

— получение общих необходимых условий одновременной стабилизации;

— расширение классов объектов, для которых устанавливаются достаточные условия одновременной стабилизации;

— ограничение класса регуляторов, среди которых устанавливается существование одновременно стабилизирующего регулятора.

Важно отметить, что в общем случае все известные критерии одновременной стабилизации трех и более объектов (Vidyasagar, Viswanadham, Ghosh, Blondel, Gevers, Mortini, Rupp и другие) либо носят неконструктивный характер и, фактически, сводят одну нерешенную задачу к другой, либо применимы к достаточно узким классам стабилизируемых объектов. Другими словами, в настоящее время нет алгоритмов, позволяющих в общем случае однозначно ответить на вопрос о существовании одновременно стабилизирующего регулятора для $k \geqslant 3$ объектов. В то же время многие известные необходимые условия одновременной стабилизации (Ghosh, Wei, Blondel, Gevers, Mortini, Rupp и другие), как правило, носят конструктивный характер, т.е. допускают численную реализацию и применимы к широким классам объектов. Известные в настоящее время достаточные условия (Maeda, Vidyasagar, Alos, Emre, Kwakernaak, Wei, Debowsky, Kurilowicz, Blondel, Campion, Gevers и другие) также, в основном, носят конструктивный характер, но применимы к узким классам объектов.

Отметим, что фактически, проблема одновременной стабилизации включает в себя две задачи: задачу об условиях существования одновременно стабилизирующего регулятора и задачу разработки конструктивного алгоритма его построения.

Цель диссертационной работы. Целью работы является разработка теории универсальных стабилизаторов для конечных семейств линейных скалярных динамических объектов.

В рамках поставленной задачи предполагается рассмотреть две проблемы:

1) проблему разработки новых подходов к решению задачи одновременной стабилизации линейных динамических объектов, позволяющих получать конструктивные условия существования одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства динамических объектов (скалярных, векторных, стационарных и нестационарных);

2) проблему разработки алгоритмов построения универсальных стабилизаторов, допускающих численную реализацию.

При этом ограничения, накладываемые на порядок и параметры стабилизируемых объектов, должны быть минимальными.

Методы исследования. В работе использованы методы математической теории управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения, интервальный анализ, топологические методы, матричный анализ.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Проведен анализ и предложена классификация известных методов одновременной стабилизации конечных семейств линейных динамических объектов.

2. Разработана теория универсальных стабилизаторов для семейств динамических объектов, в рамках которой развиты новые подходы к одновременной стабилизации с помощью регулятора заданного порядка, основанные на исследовании аффинных полиномов и свойств аффинных преобразований пространства параметров регуляторов в пространство коэффициентов характеристических полиномов замкнутых объектов с использованием методов теории робастной устойчивости и теории систем линейных неравенств.

3. Получены новые конструктивные условия существования универсального стабилизатора для семейств динамических объектов различных порядков, обеспечивающего устойчивость замкнутых объектов как с произвольным спектром, так и с заданной степенью устойчивости.

4. Рассмотрена задача о существовании цифрового универсального стабилизатора для семейства динамических объектов различных порядков, для решения которой предложен метод синтеза стабилизатора, основанный на переходе к дискретным моделям замкнутых систем и получены условия од-

новременной стабилизации дискретных объектов с помощью единого дискретного регулятора.

5. Предложена численно реализуемая процедура (основанная на методах интревального анализа) построения одновременно стабилизирующего регулятора для семейств линейных стационарных скалярных динамических объектов.

6. Разработан новый метод исследования одновременной стабилизируемости семейств векторных объектов, основанный на топологическом подходе.

7. На основе развитого топологического подхода к задаче одновременной стабилизации получены условия существования универсальных стабилизаторов для конечных семейств линейных векторных стационарных объектов, а также семейств линейных нестационарных объектов.

8. Предложены алгоритмы одновременной стабилизации с использованием разрывных законов управления.

9. Разработан новый метод построения универсальных стабилизаторов для объектов различных порядков в рамках матричного подхода.

Практическая значимость. Предложенные в работе методы одновременной стабилизации динамических объектов имеют не только теоретическую, но и практическую значимость и, в частности, могут быть использованы для решения задач стабилизации в условиях параметрической неопределенности, в условиях смены (возможно неконтролируемой) режимов функционирования объекта. Использование универсальных стабилизаторов позволяет существенно повышать надежность технических систем управления.

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные её части докладывались: на научных семинарах кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова; на научном семинаре "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление" под руководством академиков РАН С.В. Емельянова и С.К. Коровина; на Первой Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2005 (12-16 сентября 2005 г., г. Переславль); на Второй Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2007 (10-14 сентября 2007 г. Обнинск, Россия); на семинарах в университете Лафборо (Великобритания) 2007 г.; на Третьей Международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" САИТ-2009 (Россия); на XI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (ИПУ РАН), 2010; на Научной конференции "Ломоносовские чтения" в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, Москва, 2011 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 24 работах, из них 22 работы – в ведущих математических журналах (Доклады РАН, Дифференциальные уравнения, Автоматика и телемеханика) и рецензируемых сборниках. Список основных публикаций помещен в конце автореферата.

Лично автором получены следующие результаты:

1. Анализ и классификация известных подходов и методов одновременной стабилизации линейных динамических объектов.

2. Методы одновременной стабилизации линейных стационарных объектов различных порядков универсальным регулятором заданной структуры.

3. Методы одновременной стабилизации с заданной степенью устойчивости линейных стационарных объектов.

4. Методы одновременной стабилизации линейных стационарных объектов универсальным цифровым регулятором.

5. Топологические методы одновременной стабилизации линейных динамических объектов.

6. Методы одновременной стабилизации линейных векторных объектов на основе разработанного топологического подхода.

7. Методы одновременной стабилизации линейных нестационарных динамических объектов.

8. Методы одновременной стабилизации регулятором переменной структуры.

9. Метод построения универсальных стабилизаторов по состоянию для линейных объектов различных порядков.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 284 страницы текста, состоит из введения, 5 глав и 2 приложений. Главы разбиты на параграфы, параграфы на пункты. Нумерация утверждений, теорем, лемм, замечаний, примеров и формул — двойная, сквозная по каждой главе. В конце приведена библиография из 93 наименований, вначале в алфавитном порядке перечислены работы на кириллице, затем в алфавитном порядке – работы на латинице.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, приведены основные понятия, общие постановки задач, дан краткий обзор состояния области исследований в настоящее время.

В первой главе излагается современное состояние одной из важных, трудных и актуальных проблем линейной теории автоматического управления — проблемы построения универсального автоматического регулятора, стабилизирующего конечное семейство линейных объектов. Приводится структурированный обзор со сравнительным анализом основных известных методов и подходов к решению указанной проблемы.

В параграфе 1.1 обсуждается постановка задачи одновременной стабилизации для конечных семейств линейных динамических объектов. При этом, указанная задача формулируется в рамках полиномиального и матричного подходов, предполагающих представление линейных объектов либо через передаточные функции, либо с помощью систем дифференциальных уравнений соответственно.

В параграфе 1.2 рассматривается полиномиальный подход к решению задачи поиска универсального стабилизатора для семейств линейных стационарных динамических объектов, который предполагает представление этих объектов через передаточные функции (дробно-рациональные функции). В рамках указаного подхода приводится ряд известных методов решения задачи одновременной стабилизации конечных семейств линейных скалярных стационарных объектов, позволяющих получать различные условия существования универсального стабилизатора, а также разрабатывать конструктивные алгоритмы его построения. Среди указанных методов рассматриваются следующие:

— метод факторизации, основная идея которого состоит в представлении передаточных функций линейных объектов в виде отношения устойчивых дробно-рациональных функций, называемых дробными факторизациями; данный метод позволяет получать условия одновременной стабилизации в форме алгебраических уравнений;

— геометрический метод, предполагающий геометрическую интерпретацию поведения передаточной функции на различных подмножествах расширенной комплексной плоскости; этот метод позволяет формулировать условия одновременной стабилизации в геометрических терминах;

— метод параметризации, суть которого состоит в параметризации множеств регуляторов заданной структуры и в дальнейшем поиске стабилизирующих параметров; основное преимущество данного метода состоит в том, что он может быть применен в случае, когда заранее неизвестно, существует ли для заданного конечного семейства объектов стабилизирующий регулятор.

С использованием перечисленных методов приводятся и обсуждаются различные условия существования (необходимые, достаточные, необходимые и достаточные) универсального стабилизатора для конечных семейств линейных объектов. Указанные условия классифицируются по следующим признакам:

— по степени конструктивности;

— по применимости к различным классам объектов;

— по используемым классам стабилизаторов.

В параграфе 1.3 рассматривается матричный подход к решению задачи поиска универсального стабилизатора для семейств линейных стационарных динамических объектов, который предполагает представление этих объектов с помощью систем дифференциальных уравнений. В рамках указаного подхода приводится ряд известных методов решения задачи одновременной стабилизации по состоянию конечных семейств линейных скалярных стационарных объектов. Среди указанных методов рассматриваются следующие:

— метод квадратичной стабилизации, предполагающий поиск единой функции Ляпунова для конечного семейства линейных динамических систем; для численной реализации указанного метода предлагается использовать алгоритмы решения линейных матричных неравенств;

— метод сверхстабилизации, основанный на поиске универсального стабилизатора, обеспечивающего свойство сверхустойчивости матрицам замкнутых объектов; для численной реализации указанного метода можно использовать алгоритмы решения задач линейного программирования.

Во второй главе рассматривается задача одновременной стабилизации конечного семейства линейных скалярных стационарных объектов универсальным регулятором заданной структуры (здесь под структурой понимаем динамический порядок объекта). Для решения задачи разработан подход, предполагающий использование параметрического метода поиска стабилизирующего регулятора и основанный на анализе структуры областей устойчивости в пространствах коэффициентов полиномов, линейно зависящих от параметров (аффинных полиномов). На основе предложенного подхода поиск универсального стабилизатора осуществляется как в классе непрерывных регуляторов, так и в классе дискретных регуляторов.

В параграфе 2.1 рассматривается задача одновременной стабилизации конечного числа линейных скалярных стационарных объектов произвольных порядков, для которых предложены проверяемые численно необходимые условия одновременной стабилизации, а также достаточное условие одновременной стабилизации непрерывным регулятором заданного порядка с указанием алгоритмов построения стабилизирующего регулятора.

Рассматриваются k линейных объектов различных порядков n_i

$$W_1(s) = \frac{\beta_1(s)}{\alpha_1(s)}, \ldots, W_k(s) = \frac{\beta_k(s)}{\alpha_k(s)}, \tag{2.1}$$

где $\beta_i(s) = b_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \cdots + b_{0,i}$, $\alpha_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \cdots + a_{0,i}$ — взаимно простые полиномы.

Ставится задача о существовании регулятора заданной структуры

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p_l s^l + p_{l-1}s^{l-1} + \ldots + p_1 s + p_0}{s^l + q_{l-1}s^{n-1} + \ldots + q_1 s + q_0}, \tag{2.2}$$

одновременно внутренне стабилизирующего объекты (2.1). Как показано в Главе 1, сформулированная задача, фактически, сводится к вопросу о существовании таких полиномов $p(s)$ и $q(s)$ соответствующих степеней, чтобы все полиномы

$$\varphi_i(s) = \alpha_i(s)q(s) + \beta_i(s)p(s), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

были бы устойчивыми.

Для каждого $i = 1, \ldots, k$ отождествим полином

$$\varphi_i(s) = \varphi_{0,i} + \varphi_{1,i}s + \ldots + \varphi_{n_i+l-1,i}s^{n_i+l-1} + s^{n_i+l} \tag{2.3}$$

с вектором $\varphi_i = (\varphi_{0,i}, \ldots, \varphi_{n_i+l-1,i})^\top \in \mathbb{R}^{n_i+l}$. Тогда для каждого объекта семейства (2.1) по коэффициентам соответствующей передаточной функции $W_i(s)$ можно однозначно построить матрицу $\Psi_i \in \mathbb{R}^{(n_i+l)\times(2l+1)}$ и столбец $\psi_i \in \mathbb{R}^{(n_i+l)}$ такие, что выполняются равенства

$$\varphi_i = \Psi_i v + \psi_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{2.4}$$

где $v = (q_0, \ldots, q_{l-1}, p_0, \ldots, p_l)^\top$ — вектор параметров регулятора (2.2).

В силу необходимого условия устойчивости полиномов вектор параметров v универсального стабилизатора (2.2) принадлежит (в случае существования) множеству решений системы линейных неравенств

$$\varphi_i = \Psi_i v + \psi_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.5}$$

Таким образом, совместность системы (2.5) является необходимым условием одновременной стабилизации семейства объектов (2.1). На основе этих выводов, в п. 2.1.3 сформулировано ранговое необходимое условие одновременной стабилизации объектов (2.1) регулятором заданной структуры (2.2).

Полученное необходимое условие дает возможность построить множество V — множество решений системы (2.5), в котором содержатся (в случае существования) параметры стабилизирующего универсального регулятора (2.2). При этом возможны две принципиально различные ситуации:

— множество V ограничено;

— множество V не ограничено.

Для первого случая (V — ограничено) в диссертации (Глава 3) предложен метод непосредственного поиска вектора стабилизирующих параметров универсального регулятора. Указанный метод основан на интервальных вычислениях.

Второй случай (V — не ограничено) более сложен и для его решения предложен подход, предполагающий локализацию области поиска стабилизирующих параметров. Обозначим $\Psi = (\Psi_1^\top, \ldots, \Psi_k^\top)^\top$, $\psi = (\psi_1^\top, \ldots, \psi_k^\top)^\top$. Тогда систему линейных неравенств (2.5) можно переписать в виде

$$\Psi v + \psi > 0. \tag{2.6}$$

Вектор $(v_0, \ldots, v_{n-1})^\top$ назовем *ω-устойчивым*, если устойчив полином $v(s) = v_0 + v_1 s + \ldots + v_{n-1} s^{n-1}$.

Наряду с системой (2.6) рассмотрим ассоциированную с ней однородную систему линейных неравенств

$$\Psi v > 0, \tag{2.7}$$

для которой поставим задачу (FS) поиска такого решения v, для которого все векторы $\Psi_i v$ ($i = 1, \ldots, k$) являются ω-устойчивыми. Из утверждений, доказанных в п. 2.1.2 следует, что если задача (FS) имеет хотя бы одно решение, то она имеет решение в любой окрестности нуля.

В п. 2.1.4 приведено достаточное условие одновременной стабилизации объектов (2.1) регулятором заданной структуры (2.2). Следующая теорема устанавливает достаточное условие одновременной стабилизации объектов (2.1) регулятором l-го порядка (2.2).

Теорема 2.1. *Пусть для объектов* (2.1) *существует вектор параметров* $v = (q_0, \ldots, q_{l-1}, p_0, \ldots, p_l)$ *— решение задачи* (FS). *Тогда объекты* (2.1) *одновременно стабилизируемы некоторым регулятором порядка* l.

Вектор параметров $v = (q_0, \ldots, q_{l-1}, p_0, \ldots, p_l)^\top$, удовлетворяющий теореме 2.1, назовем *ω-стабилизирующим* (соответствующие параметры – *ω-стабилизирующими*).

В п. 2.1.5. вводится понятие ω-стабилизирующего регулятора. Регулятор (2.2) будем называть *ω-стабилизирующим*, если вектор его параметров $v = (q_0, \ldots, q_{l-1}, p_0, \ldots, p_l)^\top$ — ω-стабилизирующий.

Теорема 2.1, фактически, является достаточным условием существования ω-стабилизирующего регулятора для семейства объектов (2.1).

В п. 2.1.6, на основе теоремы 2.1, приводится алгоритм построения универсального стабилизирующего регулятора для объектов (2.1).

В параграфе 2.2 рассматривается задача одновременной α-стабилизации (т.е. стабилизации с заданной степенью устойчивости замкнутых объектов) произвольного конечного числа линейных скалярных стационарных объектов произвольных порядков. Приведено утверждение (теорема 2.12), позволяющее свести задачу одновременной α-стабилизации к задаче обычной одновременной стабилизации, исследованной в параграфе 2.1.

В п. 2.2.3 и 2.2.4 на основе методов, разработанных в параграфе 2.1 предложены проверяемые численно необходимые условия одновременной α-стабилизации, а также достаточное условие одновременной α-стабилизации линейных динамических объектов регулятором заданного порядка.

В п. 2.2.5 и 2.2.6 введено понятие *(α, ω)-стабилизирующего регулятора*, который является аналогом ω-стабилизирующего регулятора, описанного в параграфе 2.1. С использованием сформулированного в теореме 2.18 свойства (α, ω)-стабилизирующего регулятора приведен алгоритм поиска такого регулятора для объектов (2.1).

В п. 2.2.7 приведен критерий существования (α, ω)-стабилизирующего регулятора (теорема 2.20), полученный для частного случая — одновременной α-стабилизации линейных объектов 2-го порядка регулятором 1-го порядка.

В параграфе 2.3 рассматривается задача одновременной стабилизации произвольного конечного числа линейных скалярных стационарных объектов произвольных порядков цифровым регулятором заданной структуры. Решение поставленной задачи сводится к задаче одновременной стабилизации конечного набора дискретных объектов универсальным дискретным регулятором заданной структуры, для решения которой используется подход, изложенный в параграфе 2.1. При этом получены проверяемые численно условия одновременной стабилизации дискретных объектов дискретным регулятором с алгоритмом построения такого регулятора.

В параграфе 2.4 приведены некоторые оценки множеств линейных объектов, стабилизируемых заданным универсальным регулятором, а также оценки множества универсальных регуляторов, стабилизирующих заданное конечное семейство линейных объектов; рассмотрены различные постановки задачи одновременной стабилизации и приведен сравнительный анализ множеств стабилизирующих регуляторов; получено утверждение об одновременной стабилизации минимально-фазовых объектов.

Приведенные в главе 2 алгоритмы поиска универсального стабилизирующего регулятора допускают эффективную численную реализацию с использованием прикладного интервального анализа, описанную в главе 3.

В третьей главе приведена общая схема исследования задачи одновременной стабилизации, а также подробно описана процедура построения одновременно стабилизирующего регулятора на основе методов интервального анализа и алгоритма, описанного в п. 2.1.6 главы 2.

В параграфе 3.1 приведены необходимые для дальнейшего изложения понятия и утверждения.

В параграфе 3.2, на основе результатов, полученных в главе 2, приведена подробная общая схема исследования вопроса об одновременной стабилизации конечного семейства линейных стационарных скалярных динамических объектов универсальным непрерывным регулятором заданной структуры; приведен алгоритм поиска такого стабилизатора. При этом указанная схема применима и для поиска α-стабилизирующего универсального регулятора, дискретного универсального стабилизатора, а также для расчета регулятора переменной структуры, о котором речь пойдет в главе 5.

В параграфе 3.3 приведены некоторые положения прикладного интервального анализа, в том числе алгоритм обращения множеств $SIVIA$, на основе которого разработана численная процедура поиска стабилизирующих параметров универсального регулятора заданной структуры с использованием результатов параграфа 3.2.

Параграф 3.4 посвящен обсуждению выбора начальных условий для работы алгоритма численного расчета стабилизирующих параметров, описанного в параграфе 3.3.

В параграфе 3.5 приведен по шагам численный алгоритм поиска универсального стабилизатора заданной структуры для конечного семейства линейных объектов и приведен пример расчета стабилизирующих параметров универсального регулятора для семейства трех объектов 2-го порядка.

В четвертой главе, в рамках матричного подхода, рассматривается задача о существовании универсального стабилизатора для конечного семейства линейных векторных динамических объектов, как стационарных так и нестационарных. При этом ставится задача стабилизации по измеряемому выходу. Для решения задачи разработан топологический метод, основанный на поиске общего стабилизатора в виде линейной комбинации стабилизаторов для отдельных объектов и применении утверждений о свойствах множеств на симплексах.

В параграфах 4.1–4.3 для семейства линейных стационарных объектов приводится достаточное условие существования общего стабилизатора, полученное на основе разработанного топологического метода и указаны конструктивные подходы к построению алгоритма проверки этого условия.

Рассматривается следующая задача стабилизации. Задано семейство из k динамических объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u \\ y = C_i x \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния каждого объекта, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$ — вход и выход объекта соответственно. Таким образом, все объекты из семейства (4.1) имеют одну и ту же размерность (порядок). При этом постоянные матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — свои для каждого объекта.

Под задачей построения стабилизатора для объекта из семейства (4.1) понимаем задачу синтеза динамической системы

$$R : \begin{cases} \dot{z} = Hz + Py \\ u = Qz + Dy, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $z \in \mathbb{R}^l$ — фазовый вектор стабилизатора, $H \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $P \in \in \mathbb{R}^{l\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times l}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times q}$ — постоянные матрицы, задающие стабилизатор, которые выбираются из условия асимптотической устойчивости замкнутого объекта (4.1)–(4.2):

$$(\Sigma_i, R) : \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i + B_i D C_i & B_i Q \\ P C_i & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Пусть для каждого i-го объекта семейства (4.1) построен свой стабилизатор типа (4.2):

$$R_i : \begin{cases} \dot{z} = H_i z + P_i y \\ u = Q_i z + D_i y \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4.4}$$

Как было отмечено выше, для каждого из объектов (4.1) такой стабилизатор существует. Рассмотрим параметрическое семейство LR динамических объектов вида (4.2), являющихся линейными комбинациями стабилизаторов из семейства (4.4), т.е. матрицы объектов этого семейства представляются в виде

$$\begin{aligned} H(\overline{\lambda}) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i H_i, \quad P(\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i, \\ Q(\overline{\lambda}) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i, \quad D(\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_i, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Будем обозначать элементы семейства LR через $R(\overline{\lambda})$, поскольку каждый из них определяется набором $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Общий стабилизатор для семейства (4.1) будем искать как элемент множества LR. Заметим, что наборы

$$\overline{\lambda}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \overline{\lambda}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \overline{\lambda}_q = (0, 0, \ldots, 1) \tag{4.6}$$

определяют стабилизаторы для 1-го, 2-го, …, k-го объекта из семейства (4.1).

Достаточные условия существования общего стабилизатора дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть задано семейство* (4.1) *линейных векторных стационарных динамических объектов Σ_i ($i = 1, \ldots, k$) одинакового порядка и для каждого объекта построен свой стабилизатор $R_i = R(\overline{\lambda}_i)$ вида* (4.4) *(здесь $\overline{\lambda}_i$ — единичные векторы* (4.6)*).*

Пусть, кроме этого, для каждого подмножества индексов $I \subset \{1, \ldots, k\}$ и любых $\mu_i > 0$ ($i \in I$) таких, что

$$\sum_{i \in I} \mu_i = 1,$$

регулятор $R(\sum\limits_{i \in I} \mu_i \overline{\lambda}_i)$ является стабилизирующим хотя бы для одного из объектов подсемейства семейства (4.1)*, определяемого набором индексов I.*

Тогда в LR существует единый стабилизирующий регулятор для семейства объектов (4.1)*.*

Основные условия применимости предложенного подхода к задаче об одновременной стабилизации следующие:

1) стабилизируемость каждого объекта семейства с возможностью построения стабилизирующего регулятора;

2) сохранение свойства устойчивости каждой замкнутой системой при малых возмущениях параметров.

В параграфах 4.4–4.6 для линейных нестационарных объектов вводится понятие робастной стабилизации и рассматривается задача об одновременной робастной стабилизации таких объектов. На основе топологического метода получено достаточное условие одновременной робастной стабилизации конечного семейства линейных нестационарных объектов.

Пусть задано семейство из k линейных скалярных нестационарных объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений

$$\Sigma_i: \quad \begin{cases} \dot{x} = A_i\,(t)\,x + B_i(t)u \\ y = C_i\,(t)\,x, \quad i = 1, \ldots, k, \end{cases} \tag{4.7}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния i-й системы, $u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^1$ — вход и выход системы соответственно. Предполагается, что все системы семейства (4.7) имеют одну и ту же размерность пространства состояний n. $A_i\,(t)\,, B_i\,(t)$ и $C_i\,(t)$ — заданные ограниченные матрицы соответствующих размерностей ($A_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C_i(t) \in \mathbb{R}^{1\times n}$), при этом матрицы таковы, что решения уравнений (4.7) существуют на промежутке времени $[0, +\infty)$ при всех начальных значениях $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех допустимых управлениях (например, $u\,(t) \in C\,[0, +\infty)$). Кроме того, считаем, что точка $x = 0$ является изолированным положением равновесия для каждой из систем семейства (4.7).

Под *задачей робастной стабилизации* i-го объекта из семейства (4.7) будем понимать построение стабилизатора по выходу, т.е. линейной динамической системы вида

$$\begin{cases} \dot{z} = H(t)\, z + P(t)\, y \\ u = Q(t)\, z + D(t)\, y, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $z \in \mathbb{R}^l$ — фазовый вектор стабилизатора, $P(t)\,, H(t)\,, Q(t)$ и $D(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, задающие стабилизатор. Эти матрицы выбираются из условия отрицательности верхнего особого показателя для i-й системы (4.7), замкнутой обратной связью (4.8), т.е. из условия отрицательности особого показателя замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i(t) + B_i(t)\, D(t)\, C_i(t) & B_i(t)\, Q(t) \\ P(t)\, C_i(t) & H(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Верхний особый или генеральный показатель системы (4.9) определяется следующей формулой

$$\Omega_i^0 = \overline{\lim_{t-s\to\infty,\, s\to\infty}} \frac{1}{t-s} \ln ||\chi_i(t,s)||,$$

где $\chi_i(t,s)$ — матрица Коши системы (4.9).

Под *задачей одновременной робастной стабилизации* семейства линейных объектов (4.7) понимается построение единого регулятора вида (4.8), робастно стабилизирующего все объекты (4.7).

Заметим, что отрицательность особого показателя не только обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы (4.9), но и гарантирует сохранение свойства асимптотической устойчивости системы при произвольных достаточно малых вариациях параметров, а это, в свою очередь, является одним из необходимых условий применимости разработанного в параграфах 4.1–4.3 топологического метода для решения задачи об одновременной стабилизации линейных нестационарных объектов.

Вопрос о существовании робастно стабилизирующего регулятора для одного нестационарного объекта решается следующим образом. Говорят, что объект Σ_i *равномерно дифференциально наблюдаем*, если

$$\operatorname{rank} N(t) = n, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$N(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix}, \quad Q_1(t) = C(t), \quad Q_{i+1}(t) = Q_i(t)\,A + \dot{Q}_i(t),$$

$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Аналогично, объект Σ_i *равномерно дифференциально управляем*, если

$$\operatorname{rank} K(t) = n, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$K(t) = \Big[P_1(t), \ldots, P_n(t)\Big], \quad P_1(t) = B(t), \quad P_{i+1}(t) = A(t)\,P_i(t) - \dot{P}_i(t)$$

$(i = 1, \ldots, n-1)$.

Следующая теорема устанавливает достаточное условие робастной стабилизируемости линейного нестационарного объекта.

Теорема 4.2. *Пусть все объекты семейства* (4.7) *равномерно дифференциально наблюдаемы и управляемы. Тогда для каждого из них существует свой динамический стабилизатор порядка n вида* (4.8):

$$R_i: \begin{cases} \dot{z} = H_i(t)\,z + P_i(t)\,y \\ u = Q_i(t)\,z + D_i(t)\,y, \quad i = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{4.10}$$

такой, что каждая замкнутая система (Σ_i, R_i) *имеет заданный особый показатель.*

Пусть для каждого объекта семейства (4.7) построен свой стабилизатор вида (4.10) порядка n. Рассмотрим, как и в случае стационарных объектов, параметрическое семейство динамических систем LR (всевозможные линейные комбинации указанных стабилизаторов):

$$\begin{cases} \dot{z} = H_{\overline{\lambda}}(t)\, z + P_{\overline{\lambda}}(t)\, y \\ u = Q_{\overline{\lambda}}(t)\, z + D_{\overline{\lambda}}(t)\, y, \end{cases} \tag{4.11}$$

где

$$\begin{aligned} &H_{\overline{\lambda}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i H_i(t), \quad P_{\overline{\lambda}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i(t), \\ &Q_{\overline{\lambda}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i(t), \quad D_{\overline{\lambda}}(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_i(t), \\ &\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k,\ \overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Будем искать общий стабилизатор среди систем из семейства (4.11). Обозначим элемент семейства LR через $R\left(\overline{\lambda}\right)$. Следующая теорема устанавливает достаточное условие одновременной робастной стабилизации для семейства динамических объектов (4.7).

Теорема 4.3. *Пусть задано семейство* (4.7) *линейных скалярных нестационарных объектов* Σ_i $(i = 1, \ldots, k)$ *одинакового порядка* n*, все объекты равномерно дифференциально управляемы и наблюдаемы. Пусть для каждого объекта построен свой робастно стабилизирующий регулятор* $R_i = R(\bar{\lambda}_i)$ *вида* (4.10) *(здесь* $\bar{\lambda}_i$ *— единичные векторы с единицей на* i*-м месте).*

Пусть, кроме этого, для каждого подмножества индексов $I \subset \{1, \ldots, k\}$ *и любых* $\mu_i > 0$ $(i \in I)$ *таких, что*

$$\sum_{i \in I} \mu_i = 1,$$

регулятор $R(\sum\limits_{i \in I} \mu_i \bar{\lambda}_i)$ *является робастно стабилизирующим хотя бы для одного из объектов подсемейства семейства* $\{\Sigma_i\}$*, определяемого набором индексов* I*.*

Тогда в LR *существует единый стабилизирующий регулятор для семейства объектов* (4.7).

Разработанный топологический подход также применим для решения проблемы одновременной стабилизации линейных нестационарных векторных объектов.

В пятой главе в рамках матричного подхода, рассматривается задача одновременной стабилизации по состоянию линейных скалярных по входу стационарных динамических объектов.

В параграфах 5.1–5.2 вводится понятие семейств объектов, одновременно приводимых линейным невырожденным преобразованием фазовых переменных к канонической форме управляемости. Для таких семейств исследуются вопросы как о построении единого линейного регулятора в форме обратной связи по состоянию, обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость замкнутых объектов, так и о построении единого нелинейного разрывного регулятора, гарантирующего асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутых систем в некоторой заранее заданной окрестности нуля при амплитудных ограничениях на управление.

В параграфе 5.3 рассматривается задача о построении для заданного конечного семейства линейных стационарных объектов универсального стабилизатора переменной структуры, приводящего к возникновению в замкнутых объектах скользящих режимов и обеспечивающего глобальную стабилизацию объектов семейства. При этом, для одновременной стабилизации линейных объектов одинаковых порядков разработан метод построения регулятора переменной структуры, основанный на поиске единой гиперповерхности скольжения в фазовом пространстве объектов.

Рассматриваются k динамических объектов одинаковых порядков вида

$$\dot{x} = A_j x + b^j u, \quad j = 1, \dots, k, \tag{5.1}$$

где $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b^j \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, таких, что пары (A_j, b^j) управляемы. Спрашивается, существует ли единый регулятор в форме разрывной обратной связи по состоянию

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), \text{ если } \sigma(x) > 0, \\ u^-(x), \text{ если } \sigma(x) < 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

($\sigma(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $u^+(x)$, $u^-(x)$ — подлежащие выбору непрерывные функции), который

1) создает в замкнутых системах

$$\dot{x} = A_j x + b^j u(x), \quad j = 1, \dots k \tag{5.3}$$

скользящие режимы на поверхности $\sigma(x) = 0$;

2) обеспечивает асимптотическую устойчивость скользящих режимов систем (5.3) на поверхности $\sigma(x) = 0$.

Прежде, чем сформулировать основное условие существования универсального стабилизатора, введем ряд обозначений.

Определим полиномы $\beta^j(s; c)$:

$$\beta^j(s; c) = c \cdot \mathrm{adj}(sE - A_j) b^j = (c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} \varphi_1^j(s) \\ \vdots \\ \varphi_n^j(s) \end{pmatrix},$$

здесь $\varphi_i^j(s)$ — полиномы степени не выше $n-1$, т.е.

$$\beta^j(s; c) = c_1\varphi_1^j(s) + \ldots + c_n\varphi_n^j(s) = \beta_0^j(c) + \beta_1^j(c)s + \ldots + \beta_{n-1}^j(c)s^{n-1}, \tag{5.4}$$

где $\beta_i^j(c)$ — линейные функционалы, зависящие от вектора c.

Введем в рассмотрение линейные операторы $\Psi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ставящие в соответствие вектору c вектор коэффициентов $\beta^j = (\beta_0^j, \beta_1^j, \dots, \beta_{n-1}^j)$ полинома $\beta^j(s; c)$. Матрица указанного оператора будет зависеть от коэффициентов матриц A_j и векторов b^j:

$$\begin{pmatrix} \beta_0^j \\ \vdots \\ \beta_{n-1}^j \end{pmatrix} = \Psi_j(A_j, b^j) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Рассмотрим теперь матрицу Ψ вида

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_k \end{pmatrix},$$

являющуюся матрицей оператора $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{nk}$, преобразующего вектор c в вектор, компоненты которого — коэффициенты полиномов $\beta_j(s; c)$, $j = 1, \dots, k$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \beta_0^1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1}^1 \\ \vdots \\ \beta_0^k \\ \vdots \\ \beta_{n-1}^k \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$\Psi \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > 0. \tag{5.5}$$

Решение $c^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0)$ системы (5.5) назовем *устойчивым*, если будут устойчивыми все полиномы $\beta^j(s; c^0)$, $j = 1, \dots, k$.

Обозначим строки cA_j через μ_j, т.е.

$$cA_j = \mu^j = (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Разработанный в главе 5 подход позволяет сформулировать следующее конструктивное достаточное условие одновременной стабилизации конечного семейства объектов (5.1) регулятором переменной структуры.

Теорема 5.1. *Пусть вектор* $c = (c_1, \dots, c_{n-1}, 1)$ *является устойчивым решением системы* (5.5). *Тогда регулятор*

$$u = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i |x_i| \operatorname{sgn} \sigma - k_n \sigma - \gamma \operatorname{sgn} \sigma,$$

где $\sigma = cx$, *а коэффициенты* k_i, γ *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned}
&\gamma > 0,\\
&k_i > \max_{j=1,\dots,k} \left\{ |\mu_i^j - \mu_n^j c_i| \frac{1}{cb^j} \right\}, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
&k_n > \max_{j=1,\dots,k} \left\{ |\mu_n^j| \frac{1}{cb^j} \right\},
\end{aligned}$$

является одновременно стабилизирующим для объектов (5.1).

Для нахождения устойчивого решения системы (5.5) можно воспользоваться методами, разработанными в главе 3 на основе интервального анализа, позволяющими построить численную процедуру поиска такого решения.

Существенное преимущество использования универсального регулятора переменной структуры для одновременной стабилизации динамических объектов состоит в том, что он позволяет не только стабилизировать эти объекты, но также обеспечить им полную инвариантность по отношению к возможным координатным возмущениям.

В параграфе 5.4. для линейных объектов различных порядков предлагается метод приведения к одному динамическому порядку, после чего к получившемуся семейству объектов одинаковых порядков возможно применение разработанного в параграфе 5.3 метода построения регулятора переменной структуры. Более того, предложенный метод приведения линейных объектов к одному динамическому порядку, позволяет применять для их одновременной стабилизации и изложенные в главе 1 методы квадратичной стабилизации и сверхстабилизации.

Рассматривается k динамических объектов различных порядков со скалярным входом

$$\dot{x}^j = A_j x^j + b^j u, \quad j = 1, \dots, k, \tag{5.6}$$

где $A_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$, $b^j \in \mathbb{R}^{n_j \times 1}$, $u \in \mathbb{R}$, $x^j = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_j}}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $i_1 < \ldots < i_{n_j}$, $\{i_1, \dots, i_{n_j}\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, где $n = \max\{i_{n_1}, \dots, i_{n_k}\}$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{i_1, \dots, i_{n_j}\}$ через Γ_j, а множество $\{1, \dots, n\}$ через Γ. Обозначим через $\tilde{x}^j$ вектор из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого с индексами из множества $\Gamma \setminus \Gamma_j$ равны нулю.

Требуется найти единый регулятор в форме обратной связи по состоянию $u = u(x)$, $u(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, стабилизирующий все эти объекты, т.е. обеспечивающий глобальную асимптотическую устойчивость нулевого решения всех замкнутых систем

$$\dot{x}^j = A_j x^j + b^j u(\tilde{x}^j), \quad j = 1, \dots, k. \tag{5.7}$$

В случае поиска единого регулятора в классе разрывных (на множествах меры нуль) управлений, решения систем (5.7) следует понимать как решения дифференциальных включений

$$\dot{x}^j \in A_j x^j + b^j U_j(\tilde{x}^j), \quad j = 1, \dots, k,$$

где доопределение множеств $U_j(\tilde{x}^j)$ в точках разрыва управления $u(\tilde{x}^j)$ осуществляется в смысле А.Ф. Филиппова или методом эквивалентного управления. При этом асимптотическая устойчивость нулевого решения дифференциальных включений понимается в смысле А.Ф. Филиппова.

Пусть $\bar{A}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ — матрицы размера $n - |\Gamma_j|$. Обозначим через $\tilde{A}_j = (A_j, \bar{A}_j, \Gamma_j)$ матрицу порядка n, у которой на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_{n_j} \in \Gamma_j$ расположена матрица A_j, на пересечении строк и столбцов с номерами из множества $\Gamma \setminus \Gamma_j$ — матрица $\bar{A}_j$ порядка $n - |\Gamma_j|$, а на остальных местах — нули. Аналогично, через $\tilde{b}^j = (b^j, \Gamma_j)$ обозначим вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, у которого в элементах с индексами $i_1, \ldots, i_{n_j}$ расположен столбец b^j, а на остальных — нули. Учитывая введенные обозначения, систему

$$\dot{x} = \tilde{A}_j x + \tilde{b}^j u$$

можно считать расширением системы

$$\dot{x}^j = A_j x^j + b^j u$$

путем добавления независимой подсистемы размерности $n - |\Gamma_j|$.

Следующая теорема позволяет свести задачу одновременной стабилизации по состоянию конечного семейства динамических объектов (5.6) различных порядков $n_1, \ldots, n_k$ к задаче одновременной стабилизации объектов одинакового порядка n непрерывным универсальным стабилизатором.

Теорема 5.2. *Пусть для некоторого набора устойчивых матриц* $\bar{A}_1^*, \ldots, \bar{A}_k^*$ *регулятор* $u(x)$ $(u \in C(\mathbb{R}^n))$ *является универсальным стабилизатором для семейства объектов порядка* n

$$\dot{x} = \tilde{A}_j x + \tilde{b}^j u, \quad \tilde{A}_j = (A_j, \bar{A}_j^*, \Gamma_j), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.8}$$

Тогда он одновременно стабилизирует семейство линейных объектов (5.6).

Теорему, аналогичную теореме 5.2, можно сформулировать и для универсальных стабилизаторов переменной структуры вида

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), \text{если } \sigma(x) > 0, \\ u^-(x), \text{если } \sigma(x) < 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

где $\sigma(x) = cx$ — поверхность разрыва, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $u^+(x)$, $u^-(x)$ — непрерывные однородные степени α функции ($u^+(mx) = m^\alpha u^+(x)$, $u^-(mx) = m^\alpha u^-(x)$, $\alpha > 0$).

Теорема 5.3. *Пусть для некоторого набора устойчивых матриц* $\bar{A}_1^*, \ldots, \bar{A}_k^*$ *регулятор переменной структуры* (5.9) *является универсальным стабилизатором для семейства объектов* (5.8) *порядка* n. *Тогда он одновременно стабилизирует семейство линейных объектов* (5.6).

В приложении А приведены основные обозначения и определения, используемые в диссертации.

В приложении Б изложены используемые в работе методы теории групп, робастной устойчивости, интервального анализа, теории систем линейных неравенств.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Краев А.В., Фурсов А.С. Нижние и верхние оценки радиусов неустойчивости семейств полиномов с фиксированным подмножеством коэффициентов // Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, N 11. С. 1510-1516.

2. Кудрицкий А.В., Носов А.П., Фурсов А.С. Существование устойчивых решений линейных систем // Дифференц. уравнения, 2006, Т. 42, N 8. С. 1144-1145.

3. Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. Об одновременной стабилизации линейных объектов второго порядка // Дифференц. уравнения, 2007, Т. 43, N 8. С. 1144.

4. Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. О множестве одновременно стабилизируемых линейных объектов заданным регулятором // Дифференц. уравнения, 2007, Т. 43, N 8. С. 1149.

5. Носов А.П., Фурсов А.С. О стабилизации линейных объектов при ограничениях на структуру и параметры регулятора // Дифференц. уравнения, 2008, Т. 44, N 2. С. 280-281.

6. Кудрицкий А.В., Носов А.П., Фурсов А.С. Алгоритмы построения регуляторов, одновременно стабилизирующих линейные объекты второго порядка // Дифференц. уравнения, 2008, Т. 44, N 5. С. 619-625.

7. Носов А.П., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация линейных объектов регулятором низкого порядка // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей. Вып. 6 / Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, с. 65-70.

8. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. Об одновременной стабилизации линейных объектов произвольных порядков регулятором заданной структуры // Докл. АН, 2008, Т. 423, N 2. С. 173-177.

9. Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация линейных объектов произвольных порядков регулятором заданной структуры // Диф-

ференц. уравнения, 2008, Т. 44, N 8. С. 1149.

10. Кудрицкий А.В., Носов А.П., Фурсов А.С. Оценка множества регуляторов заданного порядка, одновременно стабилизирующих линейные объекты // Дифференц. уравнения, 2008, Т. 44, N 8. С. 1150.

11. Кудрицкий А.В., Носов А.П., Фурсов А.С. К вопросу об одновременной стабилиза-ции интервальных семейств линейных объектов // Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, N 2. С. 287-288.

12. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры // Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, N 4. С. 597-608.

13. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. К вопросу об одновременной α-стабилизации линейных объектов // Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, N 5. С. 698-705.

14. Кудрицкий А.В., Носов А.П., Фурсов А.С. Одновременная сильная стабилизация линейных объектов произвольных порядков регулятором заданной структуры // Дифференц. уравнения, 2009, Т. 45, N 8. С. 1214-1216.

15. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. Конструктивный алгоритм поиска регулятора, одновременно стабилизирующего семейство объектов // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей. Вып. 7 / Под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010, с. 5-16.

16. Фурсов А.С. Сравнительный анализ различных постановок задачи стабилизации линейных объектов // Дифференц. уравнения, 2010, Т. 46, N 8. С. 1212-1213.

17. Фурсов А.С. Методы одновременной стабилизации: условия существования и алгоритмы построения универсального регулятора для семейства динамических объектов // Дифференц. уравнения, 2010, Т. 46, N 8. С. 1213-1215.

18. Коровин С.К., Фомичев В.В., Фурсов А.С. К вопросу об одновременной стабилизации динамических векторных объектов // Дифференц. уравнения,

2011, Т. 47, N 2. С. 301-302.

19. Бобылева О.Н., Носов А.П., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Алгоритм проверки одного достаточного условия одновременной стабилизации семейства динамических объектов // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, N 2. С. 302-304.

20. Емельянов С.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Об одновременной стабилизации по состоянию одного класса линейных динамических объектов // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, N 7. С. 972-977.

21. Бобылева О.Н., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Об одном достаточном условии существования общего стабилизатора для семейства динамических систем // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, N 8. С. 1077-1083.

22. Коровин С.К., Миняев С.И., Фурсов А.С. Подход к одновременной стабилизации линейных динамических объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, N 11. С. 1592-1598.

23. Коровин С.К., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: синтез универсального регулятора // Автоматика и телемеханика, 2011, № 9, с. 61-73.

24. Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Топологический подход к задаче существования общего стабилизатора для семейства динамических систем // Докл. АН, 2011, Т. 441, N 6. С. 737-742.