

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Мазуренко Станислав Сергеевич

Уравнение эволюции невыпуклых множеств в задаче
достижимости и управление потоками

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012 г.

Работа выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова на кафедре системного анализа факультета ВМК.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
академик Александр Борисович Куржанский.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор Сергей Миронович Асеев;

доктор физико-математических наук,
профессор Николай Леонтьевич Григоренко.

Ведущая организация — Институт математики и механики УрО РАН.

Защита состоится 26 декабря 2012 г. в 15:30 на заседании Диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Автореферат разослан “ ” 2012 г.

Ученый секретарь совета

доктор физико-математических наук,

профессор

Евгений Владимирович Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи управления и оптимизации ставились исследователями с давних пор, однако активное изучение этих задач началось в 30х - 40х годах прошлого столетия. Современная проблематика теории управления затрагивает многие научные области: разработка систем автоматизации и роботостроения, управления процессами в физике, биологии, моделирование экономических процессов и т.д.

Толчок к развитию математической теории процессов управления был получен благодаря результатам академика Л.С. Понтрягина и его сотрудников. В частности, были выведены необходимые условия оптимальности для функционалов различного вида, получившие название Принципа максимума Понтрягина [1]. Примерно в те же годы Р. Беллманом был создан метод динамического программирования для решения задач синтеза управления в терминах гамильтонова формализма, а также получены достаточные условия оптимальности [2].

С тех пор круг задач, к которым применимы результаты теории управления, ровно как и методы решения таких задач, стремительно расширялся. Н. Н. Красовский активно занимался решением задач синтеза управления для различных классов возмущений в динамических уравнениях. Им и его сотрудниками были исследованы основные свойства систем с неопределенностями и их разнообразные приложения [3],[4]. Р. Калман исследовал вопросы фильтрации и предсказания поведения динамических процессов в рамках вероятностных моделей, а также ввел понятия наблюдаемости и управляемости [5]. Широкий класс подобных задач решался при использовании понятий множества достижимости и разрешимости: соответственно куда и откуда мо-

жет передвигаться объект, описываемый системой дифференциальных уравнений. Теория оптимального управления получила свое продолжение для уравнений в частных производных в работах Ж.-Л. Лиониса [6].

В дальнейшие годы, математическая теория процессов управления достигла широкого распространения с различными приложениями. А.Б. Куржанским и его сотрудниками были продолжены исследования задач управления в условиях неопределенности [7], синтеза управления, оценки и нахождения множеств достижимости и разрешимости при различных типах ограничений на состояния и параметры системы [8].

Настоящая диссертация продолжает исследования А.Б. Куржанского и его сотрудников в области задач синтеза управлений по реально доступной информации в широком смысле этого слова [9]. Ими была развита теория множеств и трубок достижимости [10]. Эти результаты были также представлены в совместных работах с О.И. Никоновым [11] и Т.Ф. Филипповой [12]. В частности, был получен результат для нахождения множества достижимости дифференциального включения в терминах эволюционного уравнения в общем случае, а также, в терминах опорных функций в случае выпуклого решения задачи дифференциального включения.

Современное развитие технологий ставит перед исследователями все более нестандартные задачи, требующие выработки новых методов решения. Так, например, в билинейных по управлению и позиции системах наряду с выпуклыми задачами динамического программирования возникает необходимость перейти к невыпуклому случаю. Это может произойти, если имеется неопределенность в коэффициентах матрицы движения линейной системы. В результате этого, множества достижимости системы представляют собой

звездную структуру даже при выпуклом начальном множестве. Разработанный к настоящему времени аппарат исследования таких задач при помощи выпуклого анализа и теории двойственности не может описать точное решение.

Альтернативный подход к задачам управления был предложен Р. Брокеттом [13], который обратил свое внимание на необходимость изучения задач управления потоками с заданными начальными распределениями состояний системы, которые могут быть сосредоточены и на невыпуклых множествах. Р. Брокетт рассматривает динамическую задачу управления потоком не в терминах отдельных объектов - фазовых переменных пространства R^n и соответствующих траекторий движения, а в терминах эволюции всей плотности распределения состояний системы. Исследование динамики всего распределения проведено с использованием уравнения Лиувилля - уравнения в частных производных для функции плотности. Помимо абсолютно непрерывного случая, уравнение верно и для более широкого класса распределений из пространства обобщенных функций. В результате, с помощью методов динамического программирования стало возможным нахождение в явном виде оптимального управления системой, сосредоточенной, например, в конечном числе точек, или на границе эллипсоида.

Представленная работа дополняет исследования задач теории управления при помощи эволюционного уравнения [12] и задания динамики системы в терминах уравнения Лиувилля [13].

Целью работы была разработка механизма нахождения невыпуклых множеств достижимости эволюционных систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в ви-

де распределений, и оптимального управления такими системами, который бы позволил численно находить соответствующие множества и оптимальное управление.

Научная новизна работы. Полученные результаты являются новыми. В работе рассмотрены ранее мало изученные динамические задачи с невыпуклой динамикой.

В частности, в дополнение к результатам [13] была формализована постановка задачи управления системой в случае, когда состоянием системы являются не координаты в n -мерном пространстве, а распределение координат. Данная постановка уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана была проделана для случая функции цены, зависящей от обобщенной функции распределения.

Настоящая работа продолжила исследования [12] в области систем со звездной динамикой. В данной работе эволюционные уравнения для множества достижимости дифференциальных включений были преобразованы и записаны для функций Минковского, что позволило численно находить калибровочную функцию и восстанавливать по ней всю звездную трубку достижимости.

Наконец, в диссертации представлены новые результаты по нахождению связующей нити между функцией цены в задаче поиска множества достижимости и калибровочной функцией Минковского.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших исследований и позволят далее перейти к практически реализуемым численным алгоритмам, то есть к решению задачи до конца. В частных случаях (квадратичный интегральный

функционал для систем с распределениями и двумерные линейные системы для задачи нахождения звездных множеств достижимости) были построены численные решения.

Методы исследования. Решение рассматриваемых в диссертации задач было получено в рамках упомянутых выше подходов, основанных на методах динамического программирования, а также на методах вариационного анализа и теоремах о дифференцировании условного максимума. Работа носит преимущественно теоретический характер.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на семинаре кафедры системного анализа факультета ВМиК МГУ (рук. академик РАН А. Б. Куржанский), а также на конференции Ломоносов 2009.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы, из них 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации 85 страниц. Библиография включает 57 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрываются цели работы, ее актуальность, а также кратко описаны основные результаты, полученные в диссертации.

В **первой главе** рассматривается задача управления в случае, когда множество начальных состояний системы характеризуется функцией распределения. В первом разделе приведена общая постановка подобной задачи: рас-

сматривается система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление из некоторого класса кусочно-непрерывных функций U , функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет стандартным свойствам для существования, единственности и продолжаемости решения на отрезок T . Начальное состояние системы задается функцией распределения $p(t_0, x)$ – в общем случае – обобщенным линейным функционалом над пространством непрерывных функций с компактным носителем. Такие распределения часто используются в физике, где, например, вещество или заряд могут быть сосредоточены на границе некоторого множества, или в конечном числе точек, для чего вводится понятие δ –функции.

Помимо задания рассматриваемого класса обобщенных функций, в разделе приводится теорема Рисса-Радона, позволяющая отождествить функции распределения с мерами Радона. Поэтому такая постановка задачи может говорить о вероятностном распределении начальных состояний системы и/или о плотности потока в различных точках пространства в начальный момент времени. Под позицией системы в первой главе будем подразумевать пару $(t, p(t, \cdot))$.

В разделе 1.1 выводится уравнение Лиувилля, являющееся линейным по позиции и задающее закон её изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = - \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t, x) f(t, x, u) \right\rangle.$$

В разделе 1.2 показывается, как зная вид решения исходной системы мож-

но получить решение уравнения Лиувилля: в случае, когда отображение φ каждому значению x_0 ставит в соответствие решение системы $x(t, t_0, x_0)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, плотность распределения x в момент времени t :

$$p(t, x) = \frac{p(t_0, \varphi_t^{-1}(x))}{|J_{\varphi_t}(x)|},$$

где J_{φ} — Якобиан преобразования φ .

Далее ставится задача оптимизации:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u) p(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx \longrightarrow \inf_{u \in U},$$

в которой обе функции $L(t, x, u)$ и $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных. Оптимальное решение ищется при помощи метода динамического программирования: определение функции цены распространяется на случай, когда фазовая переменная — не вектор в $\mathbb{R}^n$, а обобщенная функция (мера):

$$V(t_0, p_0) = \inf_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u) p(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, x) dx \left| p(t_0, \cdot) = p_0(\cdot) \in \tilde{\mathcal{F}} \right. \right\},$$

где множество $\tilde{\mathcal{F}}$ задает меры, для которых сходятся несобственные интегралы в целевом функционале.

При таком задании функции цены выполняется полугрупповое свойство, из которого в представленной работе выводится принцип оптимальности и

соответствующий ему аналог системы Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V(t, p(t, \cdot)) + \inf_{u \in U} \left\{ -V'_p \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, p(t, x) f(t, x, u) \right\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} L(t, x, u) p(t, x) dx \right\} = 0 \\ V(t_1, p(t_1, \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) p(t_1, \cdot), \end{cases}$$

которая рассматривается в области $T \times \tilde{\mathcal{F}}$.

Также, доказывается теорема, согласно которой достаточно найти частное решение полученной системы Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое будет оценкой снизу функции цены, а при дополнительных условиях совпадет с её точным значением.

В разделе 1.4 для начального условия с распределением ставится задача нахождения оптимального управления линейной системой с линейно-квадратичным интегралом, зависящим от определенной выше позиции системы. Для такой задачи находится решение в замкнутом виде с использованием уравнений Риккати. Также в этом разделе рассматриваются частные примеры начальных условий с многомерным нормальным распределением, равномерным распределением на параллелепипеде и эллипсоиде, а также с равномерным распределением на границе эллипсоида.

Последний раздел Главы 1 описывает модификацию исходной задачи оптимизации, в которой целевой функционал зависит от распределения уже нелинейно:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, u, p(t, \cdot)) dt + \psi(t_1, p(t_1, \cdot)) \longrightarrow \inf_{u \in U}.$$

Для такого функционала выводится соответствующий аналог принципа оптимальности и уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Также решение

задачи управления линейной системой с функционалом, квадратичным по распределению, приводится к замкнутому виду.

Тем не менее, несмотря на универсальность подхода динамического программирования, применимого для задач с распределениями на невыпуклых множествах, нахождение функции цены представляется весьма трудоемкой, а иногда и трудно разрешимой задачей. В частности, если управление заложено в саму матрицу динамики линейной системы, то аналогичное уравнению с аддитивным управлением решение в замкнутом виде построить не удастся.

Поэтому в дальнейшем в работе акцентируется внимание на задаче нахождения множества достижимости, которое в общем случае также можно искать как линии уровня функции цены специального вида [7]. Здесь уже известны методы, затрачивающие намного меньшее количество вычислительных мощностей, чем прямое интегрирование уравнений ГЯБ [12]. Например, в выпуклом случае возможно выразить динамику множеств достижимости при помощи опорных функций. Однако как показывает практика, даже в системах с изначальной линейной структурой по фазовой переменной множества достижимости могут оказаться невыпуклыми. В начале **второй главы** диссертации рассматривается система, билинейная по (x, u) , в которой управление (или неопределенность) заложено в саму матрицу движения. В разделе 2.1.3 в явном виде ищется частное решение простейшей двумерной линейной системы и на примере показано, что множество достижимости для системы не выпуклое, а звездное, т.е. $\forall x \in X[t], \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x \in X[t]$.

В разделе 2.2 рассматривается общая постановка задачи управления

$$\dot{x} \in F(t, x) = \bigcup_{a \in A(t)} f(t, x; a), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x_0 \in X_0, \quad (1)$$

для которой выполнены стандартные условия существования, единственности и продолжаемости решения ([14]), а также предположение

Предположение 1. *Существует малое $\varepsilon > 0$, такое, что система (1) удовлетворяет свойствам:*

1. *Начальное множество $X_0 \in St(R^n)$,*
2. *График системы (1) $graph_t F \in St(R^{2n})$ для любого момента времени $t \in T$,*
3. *Окрестность нуля $\varepsilon B_{0,1} \subseteq X[t]$ для любого момента времени $t \in T$.*

Здесь $graph_t F = \{(x, y) \in R^{2n} | y \in F(t, x)\}$ - график многозначного отображения $F(t, x)$, и $B_{0,1}$ - шар единичного радиуса в R^n с центром в начале координат. При таком предположении, множество достижимости будет оставаться звездным, причем ноль будет всегда лежать строго внутри. Из [12] известно, что многозначная функция $X[t]$ - множество достижимости системы - является тогда единственным решением следующего эволюционного уравнения:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h \left(X[t + \sigma], \bigcup_{x \in X[t]} \{x + \sigma F(t, x)\} \right) = 0, \quad t \in T,$$

$$X[t_0] = X_0,$$

где $h(A, B)$ - метрика Хаусдорфа.

В выпуклом случае для дифференциального включения при выполнении некоторых дополнительных ограничений ([12]) это уравнение можно записать в терминах опорных функций. Целью настоящей главы было выйти за рамки выпуклых множеств и вывести дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского:

$$r(l|Z) = \max\{\lambda \in R | \lambda l \in Z\}, \quad r(0|Z) = +\infty,$$

которая, как и опорная функция, позволяет однозначно восстановить само множество:

$$Z = \{l \in R^n : r(l|Z) \geq 1\},$$

в случае, когда множество Z является звездным.

Раздел 2.3 приводит необходимые для данной работы свойства калибровочной функции, а также в этом разделе доказывается результат касательно непрерывной дифференцируемости функции $r(l|Z(\sigma))$ по параметру σ , который сформулирован в виде Теоремы 2.1. В результате, в разделе 2.4 доказывается основная теорема второй главы:

Теорема 2.5.

Пусть для системы (1) выполнено Предположение 1. Тогда для любого ненулевого направления $l \in R^n$, такого, что функция $r(l, t)$ дифференцируема по l в некоторой его окрестности, существует правая производная $\partial^+ r(l, t)/\partial t$, причем

$$\frac{\partial^+ r(l, t)}{\partial t} = \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l, t)}{\partial l}, f(t, z; a) \right\rangle,$$

где $z = r(l, t)l$.

Полученное дифференциальное уравнение обладает рядом примечательных свойств. В частности, из-за однородности калибровочной функции, оно может быть решено лишь на n -мерной сфере единичного радиуса для l , т.е. фактически размерность задачи совпадает с размерностью вектора l , что отмечено в работе в конце данного раздела.

В разделе 2.4 на систему дополнительно накладываются фазовые ограничения в виде выпуклого компактнозначного непрерывного по Хаусдорфу отображения $Y(t)$. Дифференциальное уравнение изменяется соответствующим образом, однако необходимо потребовать следующее ограничение:

Предположение 2. *Выполнены следующие требования на многозначное отображение $Y(t)$:*

1. *Существует малое положительное $\varepsilon : \forall t \in T \Rightarrow \varepsilon B_{0,1} \in Y(t)$,*
2. *Функция Минковского $r(l|Y(t))$ дифференцируема по l .*

В этом случае верна следующая теорема:

Теорема 2.6

Пусть для системы (1) действуют фазовые ограничения и выполнены Предположения 1-2. Тогда для любого ненулевого направления $l \in R^n$, такого, что функция $r(l, t)$ дифференцируема по l в некоторой его окрестности, существует правая производная $\partial^+ r(l, t)/\partial t$, причем

$$\frac{\partial^+ r(l, t)}{\partial t} = \begin{cases} \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l, t)}{\partial l}, f(t, z; a) \right\rangle, & \text{при } r(l, t) < r(l|Y(t)), \\ \min \left\{ \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial \log r(l, t)}{\partial l}, f(t, z; a) \right\rangle, \frac{\partial}{\partial t} r(l|Y(t)) \right\}, & \text{при } r(l, t) = r(l|Y(t)), \end{cases}$$

где $z = r(l, t)l$.

Напомним, что определение звезды подразумевает наличие некоторого множества, называемого центральным, для каждой точки которого отрезок, соединяющий эту точку и произвольную точку множества, лежит внутри этого множества. Раздел 2.6 исследует вопрос, как изменится дифференциальное уравнение для калибровочной функции, если центральное множество звезды будет сосредоточено не вокруг начала координат, а вокруг некоторой заранее известной движущейся точки $q(t) : \dot{q}(t) = Q(q, t)$. Для этого необходимо потребовать, чтобы множество достижимости было строгой звездой: звездным множеством с центром из точки $q(t)$ и некоторой ее окрестности. Тогда дифференциальное уравнение для функции $r[l, t] = r(l|X[t] - q(t))$:

$$\frac{\partial^+ r[l, t]}{\partial t} = \max_{a \in A} \left\langle \frac{\partial \log r[l, t]}{\partial l}, Q(q(t), t) - f(t, z; a) \right\rangle,$$

где $z = r[l, t]l + q(t)$.

Третья глава диссертации посвящена сравнению двух подходов к задаче поиска множества достижимости: подходу с использованием линий уровня функции цены и подходу с использованием калибровочных функций. В первом подходе множество достижимости системы может быть найдено как линии уровня функции цены для попятной системы:

$$\dot{x} = f(t, x; a), a \in A(t), t \in T, x(t_1) = x, \quad (2)$$

$$d(x(t_0), X_0) \rightarrow \inf_{a \in A(t)},$$

где $d(s, S)$ - некоторая метрика в пространстве R^n :

$$\forall S \in \text{comp}(R^n), d(s, S) = 0 \Leftrightarrow s \in S.$$

Если задать функцию цены как

$$V(t, x) = \inf\{d(x(t_0), X_0) | x(t) = x\},$$

то из теории динамического программирования известно, что такая функция цены подчиняется уравнению Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \max_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x; a) \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = d(x, X_0). \end{cases} \quad (3)$$

Множество достижимости исходной системы может быть найдено как линии уровня функции цены для попятной системы:

$$X[t] = \{x \in R^n : V(t, x) \leq 0\}.$$

Аппарат Гамильтонова формализма позволяет, таким образом, находить множества достижимости и для невыпуклых задач, однако имеет ряд вычислительных трудностей.

Однако можно рассмотреть метрику $d(s, S)$, которая зависит от калибровочной функции, например,

$$d(s, S) = g(1 - r(s|S)), \quad (4)$$

где функция $g(x) = 0$ для значений $x \leq 0$, и $g(x)$ возрастает при $x > 0$. Т.е. "расстояние" от точки s до множества S — длина отрезка, заключенного между точкой s и множеством S , на прямой, соединяющей начало координат и точку s . В этом случае, если

$$s \in S \Leftrightarrow r(s|S) \geq 1 \Leftrightarrow d(s, S) = g(1 - r(s|S)) = 0,$$

поэтому линии уровня функции цены $V(t, x) \leq 0$ будут задавать искомое множество достижимости.

Основной результат раздела заключен в следующей теореме:

Теорема 3.2

Пусть система (2) удовлетворяет Предположению 1. Пусть также выполнено следующее равенство:

$$\max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial r(x, t)}{\partial x}, \frac{1}{r(x, t)} f(t, r(x, t)x; a) \right\rangle = \max_{a \in A} \left\langle -\frac{\partial r(x, t)}{\partial x}, f(t, x; a) \right\rangle$$

для любых ненулевых векторов $x \in R^n$, и момента времени $t \in [t_0, \tau] \subseteq T$. Тогда функция $V(t, x) = g(1 - r(x, t))$ является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \max_{a \in A(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x; a) \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = g(1 - r(x|X_0)) \end{cases} \quad (5)$$

на отрезке $t \in [t_0, \tau]$, для непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$, такой, что $g(x) = 0$ для значений $x \leq 0$, и возрастает при $x > 0$.

Т.е, например, для однородной правой части вида $f(t, x, a) = Ax$, $A \in \mathcal{A}$

функция

$$V(t, x) = g(1 - r(x, t))$$

является решением системы Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \max_{A \in \mathcal{A}} \left\{ \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, Ax \right\rangle \right\} = 0, \\ V(t_0, x) = g(1 - r(x, t_0)). \end{cases}$$

В разделе 3.3 рассмотрены частные примеры двумерных линейных систем, даны иллюстрации множеств достижимости, а также трубок достижимости, проиллюстрирована функция цены в фиксированные моменты времени.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Разработан метод поиска решения задачи оптимального управления потоками с позиции распределения при помощи модифицированных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Решена задача оптимального управления потоками, задаваемыми линейной системой с линейно-квадратичным интегралом, зависящим от позиции $(t, p(t, x))$. Построены графические иллюстрации динамики распределения в частных случаях;
2. Выведено дифференциальное уравнение для калибровочной функции Минковского множества достижимости дифференциального включения, позволяющее строить трубки достижимости систем со звездной динамикой. Получена модификация этого уравнения при наличии фазовых ограничений;
3. Теоретически обоснована взаимосвязь предложенных методов с подходами к решению задач управления в рамках гамильтонова формализма. Указаны уравнение и решение для функции цены задачи поиска множеств достижимости. Построены графические иллюстрации трубок достижимости и функций цены для задач с неопределенностью в матрице динамики линейной системы.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы” (контракт № 16.740.11.0426 от

26 ноября 2010 г.) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00589-а).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Мазуренко С. С.* Метод динамического программирования в системах с состояниями в виде распределений // Вестник Московского Университета. Секция 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2011. № 3. с. 30—38.
2. *Мазуренко С. С.* Дифференциальное уравнение на калибровочную функцию Минковского звездного множества достижимости дифференциального включения // Доклады Академии Наук. Математика. 2012. Т. 445, № 2. с. 139—142.

Цитированная литература

- [1] *Л. С. Понтрягин* “Избранные научные труды”, 2 т., М.: Наука, 1988.
- [2] *Р. Беллман* “Динамическое программирование”, М.: Изд-во Иностранная литература, 1960.
- [3] *Н. Н. Красовский* “Теория управления движением”, М.: Наука, 1961.
- [4] *Н. Н. Красовский* “Игровые задачи о встрече движений”, М.: ФИЗМАТЛИТ, 1970.
- [5] *R. E. Kalman* “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Trans. ASME. 1960. V. 82. N. Series D. P. 35–45.
- [6] *Ж.-Л. Лионс* “Управление сингулярными распределенными системами”, М.: Наука, 1987.
- [7] *А. Б. Куржанский* “Управление и наблюдение в условиях неопределённости”, М.: Наука, 1977.
- [8] *А. Н. Дарьин, И.А. Дигайлова, И.В. Рублев* “Избранные труды А.Б. Куржанского”, МГУ: 2009.
- [9] *А.Б. Куржанский* “О задачах синтеза управлений по реально доступной информации”, Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005. Специальный выпуск. С. 113–122.
- [10] *А.Б. Куржанский* “Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы”, Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1047–1050.

- [11] *А.Б. Куржанский, О.И. Никонов* “Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления”, Доклады РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 578–581.
- [12] *A. B. Kurzhanski, T. F. Filippova* “On the theory of trajectory tubes - a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control”, Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122-188.
- [13] *R. W. Brockett* “Optimal control of the Liouville equation”, Engineering and applied science, Harvard University.
- [14] *А. Ф. Филиппов* “Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью”, М.: Издательство физ.-мат. литературы, 1985.