

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Рябков Олег Игоревич

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ
КОНСЕРВАТИВНО-ДИССИПАТИВНОГО ПЕРЕХОДА В
СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

*доктор физико-математических наук,
профессор*

Магницкий Николай Александрович

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук,
профессор*

Сидоров Сергей Васильевич

*кандидат физико-математических наук,
доцент*

Тихомиров Василий Васильевич

Ведущая организация:

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Защита состоится «12» декабря 2012 г. в 15:30 на заседании Диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан «____» _____ 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

*доктор физико-математических наук,
профессор*

Захаров Евгений Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Одним из выдающихся достижений XX века было открытие в динамических системах явлений, принципиально невозможных без наличия в них нелинейности. Эти эффекты были найдены в совершенно различных естественных науках: физике, химии, биологии, экономике. Найденные системы характеризовались с одной стороны полной нерегулярностью поведения, наблюдаемой стохастичностью (например, турбулентность), а с другой - внезапно возникающими стабильными режимами (ячейки Бенара). Как правило общее во всех этих системах было только одно - нелинейные члены в уравнениях, описывающих процесс. Сложность математического исследования заключалась в том, что для нелинейных систем нет общих принципов выписывания аналитического решения. Удастся это сделать обычно только в редких случаях. Это породило новые методы исследования подобных систем, такие как теория бифуркаций, линеаризация вблизи стационарных или периодических решений, геометрический подход. Последний наметил связь с топологией.

Хотя считается, что в технике любые автоколебания, вызванные нелинейностью, являются вредными и, следовательно, исследования достаточно вести лишь в тех областях фазового пространства и пространства параметров, где система ведет себя как линейная, существует множество природных процессов (атмосферные явления, тайфуны, процессы в организме человека и животных), в которых нелинейность является неустранимой и более того - существенной компонентой динамики. Исследование подобных явлений представляет научный и практический интерес, в то время как отсутствие общей теории мешает продвижению в соответствующих областях. К перечисленному можно добавить проблему управляемого термоядерного синтеза (УТС). Хотя в решении этой проблемы и был сделан существенный прогресс, она

еще далека от своего окончательного решения.

Между тем, нелинейная динамика породила массу чисто математических моделей, например, огромное число моделей с дискретным временем - различного рода отображений. Связь этих отображений с реальными динамическими системами, обычно представленными в виде дифференциальных уравнений не всегда ясна. К примеру, эндоморфизм Бернулли и автоморфизм Бернулли часто приводятся в пример, как отображения, обладающие свойством перемешивания. Однако оба эти отображения, вообще говоря, являются разрывными, в то время, как большинство фазовых потоков в дифференциальных уравнениях непрерывны и дифференцируемы. Теория отображений, сохраняющих меру, и их специфических свойств, таких как эргодичность и перемешивание, подразумевает наличие этой инвариантной меры и несомненно может быть привлечена для исследования консервативных фазовых потоков (отображение Чирикова или отображение Пуанкаре каких-либо консервативных дифференциальных уравнений), однако для диссипативных систем, динамика которых заключается в стремлении траекторий к какому-либо регулярному аттрактору (например, циклу), представляется маловероятным наличие какой-либо нетривиальной инвариантной меры (хотя дискретная мера, сосредоточенная, например, в циклах системы, и будет инвариантной, особого интереса она, скорее всего, представлять не будет). Что же до консервативных систем, то их отображения как правило не будут обладать даже свойством эргодичности, если в системе будет присутствовать хотя бы один устойчивый цикл (достаточно рассмотреть его область устойчивости, которая представляет собой инвариантное множество ненулевой меры). Нисколько не умаляя значения достижений различных областей нелинейной динамики и теории динамических систем, приходится признать, что текущий уровень знания (хотя бы на идейном уровне) относительно процессов в более или менее реалистичных моделях нелинейной науки весьма низок, что делает

изучение и систематизацию данных о последних весьма *актуальной темой*.

К числу наиболее значимых вопросов нелинейной динамики можно отнести и задачи ламинарно-турбулентного перехода в гидродинамике и магнитогидродинамике (МГД), которые также затрагиваются в работе. Переход от регулярного ламинарного движения несжимаемой жидкости к нерегулярному турбулентному как правило сопровождается уменьшением рассеяния кинетической энергии, что можно рассматривать как своего рода *консервативно-диссипативный переход*. Выбор МГД в качестве одной из моделей для изучения обусловлен желанием приблизиться к уже упоминавшейся выше задаче УТС.

Цель и задачи работы. Главным образом, цель работы состоит в изучении хаотической динамики в системах дифференциальных уравнений с консервативно-диссипативным переходом. Для этого были поставлены следующие задачи:

1. Численное и теоретическое изучение свойств полимодальных отображений - динамических систем с дискретным временем, являющихся обобщением т.н. унимодальных отображений, рассмотренных в работах Шарковского.
2. Проверка гипотезы о связи хаотической динамики в системах дифференциальных уравнений и хаотической динамики полимодальных отображений на примере ряда систем обыкновенных дифференциальных уравнений с применением аппарата математического моделирования.
3. Применение к рассматриваемым в работе системам метода Роберта Гиллмора и сопоставление получаемых этим методом результатов с выдвигаемыми в работе гипотезами.
4. Реализация в виде программных комплексов и тестирование численных схем решения начально-краевых задач гидродинамики и МГД.

5. Математическое моделирование первых стадий ламинарно-турбулентного перехода в задачах о гидродинамическом и МГД течениях в каверне и канале с симметричным расширением.
6. Совершенствование методов численного анализа систем дифференциальных уравнений, в частности метода стабилизации периодических решений.

Научная новизна. Основными новыми элементами в диссертации являются следующие.

1. Предложены сценарии перехода к хаосу в системах дифференциальных уравнений, являющиеся обобщением сценариев, предложенные ранее в работах Магницкого Н.А.
2. Предложен единообразный подход к описанию хаоса в консервативных и диссипативных системах.
3. В работе расширен список исследованных с точки зрения бифуркационного анализа систем, в частности, впервые рассмотрены некоторые начально-краевые задачи для МГД течений (т.е. течений проводящих жидкостей и газов, таких как плазма), для чего построены схемы высокого порядка, способные разрешать нестационарные аттракторы в соответствующих системах дифференциальных уравнений.
4. Впервые получены некоторые строгие результаты относительно полимодальных отображений.
5. Сопоставлены различные подходы к описанию хаоса, в частности, подходы Магницкого Н.А. и Роберта Гиллмора.

Методы исследования. В работе использованы методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, теории бифуркаций, символической и хаотической дина-

мики, численные методы решения нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для дальнейшего развития универсальной теории динамического хаоса в различных видах динамических систем, главным образом - в описываемых системами дифференциальных уравнений. В то же время сами по себе выявленные правила сосуществования траекторий могут быть использованы в численной процедуре поиска нестационарных аттракторов в том случае, если возникнет практическая необходимость в поиске подобных решений. Подобная необходимость может возникнуть, например, при решении задач, связанных с подавлением хаоса или контролем над хаосом и турбулентностью в реальных физических установках, или оптимизации каких-либо параметров нестационарных течений. В частности, задача течения проводящей жидкости в канале с расширением в присутствии поперечного магнитного поля может рассматриваться как модельное приближение задачи о течении в МГД-генераторе.

Стоит отметить, что в работе сделан особый акцент именно на поиске символической динамики в системах дифференциальных уравнений, т.е. на сопоставлении траекторий в непрерывных динамических системах и последовательностей символов. В некоторых биологических системах подобная связь становится особенно актуальной. Поэтому данное направление исследований может оказаться полезным и для понимания процессов обработки информации в биологических системах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и симпозиумах:

1. «Системный анализ и информационные технологии» (Россия, г.Звенигород, 17 сентября 2009 г.);

2. «Тихоновские чтения» (Россия, г.Москва, МГУ, 25 октября 2010 г.)
3. Международный симпозиум «Rare Attractors and Nonlinear Dynamics'2011» (Латвия, г.Рига, 18 мая 2011 г.)
4. «Тихоновские чтения» (Россия, г.Москва, МГУ, 14 июня 2011 г.)
5. «Системный анализ и информационные технологии» (Россия, р.Башкортостан, п.Абзаково, 21 августа 2011 г.)
6. «Ядро-2011», совместно с Евстигнеевым Н.М., доклад выполнил Евстигнеев Н.М. (Россия, г.Саров, 11 октября 2011 г.)
7. «Ломоносовские чтения» (Россия, г.Москва, МГУ, 14 ноября 2011 г.)
8. «Ломоносовские чтения» (Россия, г.Москва, МГУ, 16 апреля 2012 г.)
9. «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)» (Россия, г. Новосибирск, 26-30 марта 2012 г.)
10. «Динамические системы и их применение» (Украина, г.Киев, Институт математики НАН, 17 мая 2012 г.)
11. «Теория и практика системного анализа (ТПСА-2012)» (Россия, г.Рыбинск, 18 мая 2012 г.)
12. Научный семинар кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (Россия, г.Москва, 2006-2012 г.)
13. Всероссийский научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление» под руководством академика РАН С.В. Емельянова (Россия, г.Москва, 12 марта 2012 г.)
14. Всероссийский научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление» под руководством академика РАН С.В. Емельянова (Россия, г.Москва, 17 сентября 2012 г.)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, 5 статей в сборниках трудов конференций.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 199 страниц, включая 168 рисунков. Библиография включает 55 наименований на 6 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов.

В первой главе затрагиваются некоторые теоретические вопросы. В первых двух разделах формулируются основные гипотезы относительно символической динамики в системах с хаотической динамикой при изменении уровня диссипации. Третий и четвертый разделы посвящены методу стабилизации периодических решений, который является вспомогательным инструментом исследования.

В разделе 1.1 сделана попытка последовательно изложить качественную теорию двух видов т.н. полимодальных отображений - динамических систем (ДС) с дискретным временем. Наиболее известными в данной обла-

сти являются результаты касающиеся т.н. унимодальных отображений и их свойств, а именно - результаты Фейгенбаума и Шарковского [1], в частности порядок Шарковского. Несмотря на некоторую элегантность теоремы Шарковского о порядке появления циклов в унимодальных отображениях, ее нельзя рассматривать как исчерпывающую даже для указанного класса отображений. Более полное представление дает подход, использующий символическую динамику. Результаты первой части данного раздела без доказательств и строгих формулировок изложены в статье [2]. Именно эта статья и послужила основой для результатов данного подраздела. Вторая часть содержит строгие формулировки для другого вида полимодальных отображений, введенного Хансеном [3].

Полимодальные отображения первого типа представляют собой одношаговую ДС с дискретным временем $x_{i+1} = f(x_i)$, где $f(x)$ - произвольная непрерывная функция с n экстремумами в точках $c_1, \dots, c_n$, и $n+1$ интервалом монотонности: $I_0, \dots, I_n$. Для таких динамических систем нами вводятся некоторые вспомогательные понятия и функции: $s_i(x)$, равное номеру интервала монотонности, в который попадает i -ая итерация точки x под действием f ; $S(x) = s_1(x)s_2(x)\dots$ - вся последовательность номеров интервалов монотонности, также называемая *символической траекторией*; функция $\tau(S)$, принимающая вещественные значения в интервале $[0, 1]$, аргументом которой является символическая траектория $S = s_1s_2\dots$; функция $\tau(x)$ вещественного аргумента, определяемая как $\tau(x) = \tau(S(x))$. Будем говорить, что функция f имеет тип $(+ \dots)$, если на первом интервале монотонности она не убывает, на втором не возрастает и т.д. Наконец, самые важные понятия даются следующим определением:

Определение 1. Для данной ДС f определим следующие параметры ($q = 1, \dots, n$):

1. $G_q = S(f(x_{c_q}))$ назовем **делящей траекторией** системы f .

2. $g_q = \tau(f(x_{c_q}))$ назовем **топологическим параметром** системы f .

На основании введенных понятий и вспомогательных утверждений формулируется следующая теорема:

Теорема 1. Рассмотрим ДС $f(+ - \dots)$ с набором топологических параметров $g_1, g_2, \dots, g_n$. Дополнительно потребуем, чтобы на первом и последнем лучах области определения (I_0, I_n) функция f бесконечно возрастала (или убывала, в зависимости от типа монотонности на соответствующем интервале). Тогда в данной ДС траектория $\bar{S} = \bar{s}_1 \bar{s}_2 \dots \bar{s}_i \dots$ существует (существует хотя бы одна точка $x_0 : S(x_0) = \bar{S}$) $\Leftrightarrow \forall q = 1, \dots, n \ \forall k \geq 1$ таких, что $(\bar{s}_k = q - 1) \vee (\bar{s}_k = q)$ выполнено:

$$\tau(\sigma^k \bar{S}) \leq g_q, \text{ если } q - \text{нечетное,}$$

$$\tau(\sigma^k \bar{S}) \geq g_q, \text{ если } q - \text{четное}$$

Второй тип полимодальных отображений был предложен Kai T. Hansen. Рассмотрим набор из 2^b (b -целое, $b \geq 0$) унимодальных функций $f_{c_{-b} \dots c_{-1}}(x)$ типа $(+-)$, где в качестве индекса берутся всевозможные строки $c_{-b} \dots c_{-1}$ длины b (b - целое, $b \geq 0$), составленные из символов 0, 1. В нашем изложении мы дополнительно требуем, чтобы все функции имели экстремум в одной и той же точке x_{c_1} . Далее рассмотрим связанную с этой системой функций дискретную динамическую систему. В данном типе ДС, в отличие от полимодальных отображений первого типа, положение на шаге $i + 1$ определяется

не только положением на предыдущем шаге, но и некоторой предысторией:

$$x_{i+1} = F(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-b}) = \begin{cases} \dots \\ f_{c_{-b} \dots c_{-1}}(x_i), \text{ если } s_1(x_{i-b}) = c_{-b}, \dots, s_1(x_{i-1}) = c_{-1} \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

Для отображений этого типа аналогично вводятся функции $s_i(x)$, $S(x)$, $\tau(S)$, $\tau(x)$ и параметры системы.

Определение 2. Для данной ДС F определим 2^b параметров:

1. $G_{c_{-b} \dots c_{-1}} = S(F(x_{c_1}, c_{-1}, \dots, c_{-b}), c_{-1}, \dots, c_{-b})$ назовем **делящей траекторией** системы F .
2. $g_{c_{-b} \dots c_{-1}} = \tau(F(x_{c_1}, c_{-1}, \dots, c_{-b}), c_{-1}, \dots, c_{-b})$ назовем **топологическим параметром** системы F .

Здесь в качестве индексов берутся всевозможные слова из b символов в алфавите $\{0, 1\}$.

И формулируется аналогичная теорема:

Теорема 2. Рассмотрим ДС F . Потребуем, чтобы на $I_0(I_1)$ все функции $f_{\dots}$ бесконечно возрастали (убывали). Тогда в данной ДС траектория $\bar{S} = \bar{s}_1 \bar{s}_2 \dots \bar{s}_i \dots$ с предысторией $c_{-b} \dots c_{-1}$ существует (существует хотя бы одна точка $x_0: S(x_0, c_{-1}, \dots, c_{-b}) = \bar{S}$) $\Leftrightarrow \forall k \geq 1$ выполнено:

$$\tau(\sigma^k \bar{S}, \bar{s}_{k-1}, \bar{s}_{k-2}, \dots, \bar{s}_{k-b}) \leq g_{\bar{s}_{k-b} \bar{s}_{k-b+1} \dots \bar{s}_{k-1}},$$

где мы считаем, что $\bar{s}_0 = c_{-1}$, $\bar{s}_{-1} = c_{-2}$ и т.д.

В разделе 1.2 изложен подход Гиллмора-Лефранка к изучению систем дифференциальных уравнений. Изложение основано на книге [4]. В этой книге Р. Гиллмор и М. Лефранк предлагают использовать циклы, содержащиеся в хаотическом аттракторе в неустойчивом виде, для классификации этих аттракторов и порождающих их фазовых потоков. Более точно, аттракторы классифицируются по двумерным многолистным поверхностям, на которых можно расположить все их асимптотические траектории, в том числе и все периодические решения. Такая поверхность, будучи точно определенной, дает практически исчерпывающую информацию о динамике системы. Например, она дает возможность закодировать все циклы системы символическими последовательностями, а для двух любых циклов она дает информацию об их взаимном расположении в фазовом пространстве с точностью до гомеоморфизма (т.е. построить символическую динамику). Эти поверхности называются «темплейт» (*англ., шаблон*) или «нотхолдер» (*англ., держатель узлов*). Также в разделе 1.2 формулируются основные положения гипотезы нашей работы относительно символической динамики в системах дифференциальных уравнений с хаосом, которые состоят в следующем:

1. Для каждой системы (с одним или несколькими параметрами принимающими значения из определенной области) существует некоторое базовое отображение (полимодальное отображение первого типа).
2. Количество участков монотонности в этом отображении совпадает с количеством листов в Гиллморовском темплейте этой системы (и соответственно, количеством символов в алфавите символической динамики).
3. В зависимости от уровня диссипации правила сосуществования траектории совпадают с правилами сосуществования в полимодальных отображениях второго (точнее смешанного) типа, модальность которого по второму типу определяется уровнем диссипации. Существуют универ-

сальные правила, определяемые темплейтом.

В разделе 1.3 для метода стабилизации периодических решений в системах ОДУ с помощью сечения Пуанкаре доказано утверждение, гарантирующее, что локализованный с помощью этого метода цикл будет принадлежать исходной системе, рассмотрены некоторые вопросы стабилизации циклов в окрестности бифуркации «вилки». Метод стабилизации важен для применения методики Гиллмора.

В разделе 1.4 предложен подход к стабилизации в системах уравнений с частными производными. Подход основан на использовании полудискретной формы уравнения и последующего применения метода стабилизации для систем ОДУ. Работоспособность метода продемонстрирована на примере одномерной задачи для уравнения Курамото-Цузуки.

Во второй главе рассмотрены примеры систем обыкновенных дифференциальных уравнений (с размерностью фазового пространства не больше, чем четыре). Все системы исследованы численно, с помощью различных методов интегрирования (Рунге-Кутта 4-ого порядка аппроксимации, Дорман-Принс 5-ого и 8-ого порядков, как с процедурой контроля точности, так и без нее). Основная задача состояла в локализации периодических решений систем - циклов и построении бифуркационных диаграмм (диаграмм, оси которых соответствуют различным параметрам системы, и на которых отмечаются области существования или устойчивости тех или иных решений системы - в данном случае циклов).

В разделе 2.1 рассмотрена модельная двумерная неавтономная система дифференциальных уравнений с периодической правой частью, которая изначально была рассмотрена в [5]:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (2\mu + (\epsilon + 2\mu)(\cos t - 1))u_1 + (\epsilon + 2\mu)(\sin t)u_2 + u_2^2, \\ \dot{u}_2 &= (\epsilon + 2\mu)(\sin t)u_1 + (2\mu - (\epsilon + 2\mu)(1 + \cos t))u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_1 , u_2 - фазовые переменные, t - время, ϵ и μ - параметры системы.

Для системы (2) построена двумерная бифуркационная диаграмма в плоскости параметров, причем один из них - ϵ , отвечает за уровень диссипации в системе.

1. При высокой диссипации в системе наблюдается полное соответствие с порядком в унимодальных отображениях.
2. При уменьшении диссипации унимодальный порядок нарушается, области устойчивости циклов пересекаются (т.е. наблюдается явление мультистабильности). В частности цикл периода три в консервативном случае появляется раньше первого удвоения основного цикла. Качественно бифуркационная диаграмма совпадает с той, что наблюдается в отображениях второго типа с более чем одной модой.
3. Символическая динамика (последовательности, назначенные найденным циклам системы уравнений) по методу Гиллмора в точности совпала с символической динамикой получающейся в случае использования гипотезы о связи динамики систем дифференциальных уравнений и отображений.
4. На примере этой системы были подробно сопоставлены Гиллморский подход и гипотеза о связи символической динамики в дифференциальных уравнениях и полимодальных отображениях. Показано, что правила сосуществования даваемые Гиллморским подходом полностью согласуются с правилами сосуществования в полимодальных отображениях. Более точно, правила сосуществования для полимодальных отображений типа Хансена любой модальности являются более сильными, чем правила по Гилмору. Этот результат является логичным, поскольку в нашей гипотезе увеличение модальности соответствующего системе отображения связано с уменьшением диссипации, а выводы из методи-

ки Гиллмора не связаны с тем или иным уровнем диссипации в системе. Этот результат продемонстрирован на рис. 1-3 и рис. 4. Для любой ячейки, где проставлено правило по Гиллмору, это правило имеется и для всех полимодальных отображений. Для обнаруженных циклов системы (2) продемонстрировано выполнение Гиллморовских правил при любом уровне диссипации.

Рис. 1. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 0$

Рис. 2. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 1$

Рис. 3. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 2$

Рис. 4. Правила следования циклов следующие из методики Гиллмора

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y + \sin x(-M - P \cos t) + P \cos x \sin t, \quad (3)$$

где x, y - фазовые переменные, t - время, α, M, P - параметры системы.

Полученная двумерная бифуркационная диаграмма системы (3) интересна тем, что цикл периода три в консервативном случае появляется как и в диссипативном случае после каскада удвоений основного цикла, тем самым правила унимодального порядка не нарушаются. Этот пример демонстрирует, что не всегда в консервативном и слабо диссипативном случаях нарушаются те правила унимодального порядка, которых нет в Гиллморовском порядке.

В разделе 2.3 рассмотрена система, описывающая т.н. «космический маятник»:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\varepsilon y - kx - l \sin(2\pi x) + h \cos(\omega t), \quad (4)$$

где x, y - фазовые переменные, t - время, $\varepsilon, \omega, k, l, h$ - параметры системы.

Для системы (4) также построена двумерная бифуркационная диаграмма консервативно-диссипативного перехода в плоскости параметров ε, l . В системе обнаружены циклы, которых не может быть в унимодальном отображении (например, два цикла периода три). Для системы (4) удалось построить одномерное отображение в сильно диссипативном случае и показать, что оно трехмодальное. Удалось построить «корень» из отображения Пуанкаре, для полученного отображения в сильно диссипативном случае вновь было построено одномерное отображение, которые оказалось унимодальным, а бифуркационная диаграмма «корня» из отображения Пуанкаре оказалась устроенной аналогично диаграммам для систем с простым двулистным темплетом, причем для связи периодов циклов были получены простые правила. Таким образом несоответствие базовому сценарию ФШМ (Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого) в данной системе было объяснено с помощью механизма полимодальности.

В разделе 2.4 рассмотрена система Янга-Миллса-Хиггса (5). Это консервативная гамильтонова система с двумя степенями свободы x, y , и консер-

вативно–диссипативный переход в ней не рассматривался. Тем не менее, она приведена как пример системы с крайне сложным Гиллморовским темплейтом, а также как пример системы, в которой темплейт меняется с изменением бифуркационного параметра α . При значении параметра $\alpha = 0.49$ для этой системы был получен темплейт с 9 листами (что соответствует символической динамике с алфавитом из 9 символов).

$$\ddot{x} + \alpha x + xy^2 = 0, \quad \ddot{y} + \alpha y + yx^2 = 0 \quad (5)$$

В третьей главе рассмотрены примеры начально-краевых задач систем дифференциальных уравнений с частными производными. Все примеры относятся к гидродинамике и магнитогидродинамике (МГД).

В разделе 3.1 изучены начальные стадии перехода к турбулентности в двух близких задачах: двумерной задаче о гидродинамическом течении в каверне с движущейся крышкой, и задаче о двумерном МГД-течении в каверне с приложенным поперечным магнитным полем.

В первой задаче рассматривается течение вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости, описываемой уравнениями Навье-Стокса (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \text{ для } i = 1..2, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где по индексу j подразумевается суммирование от 1 до 2. Здесь $V = (v_1, v_2)$ - вектор скорости течения жидкости, а p - давление.

Вторая задача - такое же течение, но с учетом электропроводности жидкости и в присутствии внешнего поперечного магнитного поля. Соответству-

ющая система уравнений для несжимаемой МГД [7]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{N}{Re_m} b_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}, \text{ для } i = 1..2, \\
\frac{\partial b_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{Re_m} \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j^2} + b_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{ для } i = 1..2, \\
\frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \\
\frac{\partial b_j}{\partial x_j} &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $B = (b_1, b_2)$ - вектор индукции магнитного поля.

Исследование нестационарных аттракторов как правило (см. [8]) требуют методов повышенного порядка. В использованной в работе схеме применялся явный метод Рунге-Кутты 3-ого порядка аппроксимации по времени. Диффузионный член аппроксимировался методом конечных разностей шестого порядка, конвективный член - методом WENO5 [9]. Решение уравнения Пуассона, а также аппроксимация градиента давления были выполнены методом конечных элементов, как было сделано в [8]. В этом методе значения скоростей и давления рассматриваются на разнесенных сетках, но не так, как это делается в случае «шахматной» сетки. Наиболее близкий метод описанный в литературе называется частичной «шахматностью» (partially staggered) с той лишь разницей, что в [8] крайние точки сетки для значений давления располагаются на границе расчетной области, и на давление необходимо поставить дополнительное (нефизическое) граничное условие. В случае твердой стенки в качестве такого условия обычно берется условие Неймана. В классическом варианте partially staggered на границу попадают точки сетки для скоростей, а граничное условие на давление фактически отсутствует.

Решение НКЗ для системы (7) производилось аналогичным проекционным методом (см. [9], [10]). Конвективная часть для переменных V и B аппроксимировалась совместно, путем перехода к характеристическим перемен-

ным. Также в схеме был реализован метод коррекции дивергенции магнитного поля, необходимый для устранения численного магнитного монополя. Данная процедура была реализована аналогично процедуре коррекции дивергенции давления, но для аппроксимации градиента давления и дивергенции поля B использовались центральные разности, а в качестве дискретного оператора Лапласа бралась композиция указанных дискретных операторов дивергенции и градиента. Для дискретизации по времени так же использовалась полностью явная схема Рунге-Кутты 3-его порядка аппроксимации.

Схемы для рассматриваемых НКЗ были реализованы для MPI-совместимых архитектур. Решение дискретного уравнения Пуассона проводилось двумя методами: итерационным с применением multilevel предобуславливателя (использовались некоторые библиотеки пакета trilinos) и методом быстрого преобразования Фурье (использовалась библиотека FFTW). Расчет проводился на кластере с 8 процессорами Intel Xeon и на вычислительном комплексе IBM BlueGene/P факультета ВМК МГУ. Размер расчетной сетки (192x192 и 256x256) не позволил применять метод Фурье на системе BlueGene (в силу очень большого минимального количества запускаемых MPI-процессов в данной архитектуре). В результате скорость расчета в системе BlueGene/P была всего в два раза больше, чем при использовании указанного кластера. Данный факт объясняется тем, что описанная задача (в силу своей двухмерности) является слишком маленькой для такой системы как BlueGene/P.

В первой задаче обнаружены начальные стадии сценария Ландау-Хопфа, вплоть до (предположительно) тора размерности три. На рисунке 5 показан двумерный тор в фазовом пространстве существующий в системе при значении числа Рейнольдса $Re = 10300$. Во второй задаче обнаружены каскады удвоений и одна бифуркация Андронова-Хопфа рождения тора, причем по всей видимости оба сценария развиваются параллельно. На рисунке 6 показан цикл относительного периода 4, существующий в системе при значении

числа Рейнольдса $Re = 2720$.

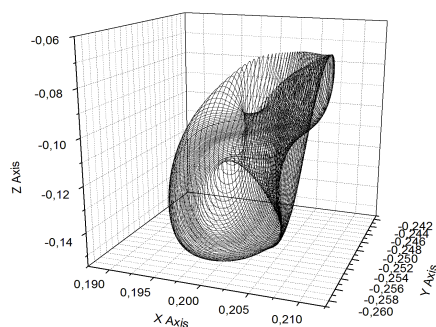


Рис. 5. Проекция фазового пространства НКЗ системы (6) при $Re = 10300$

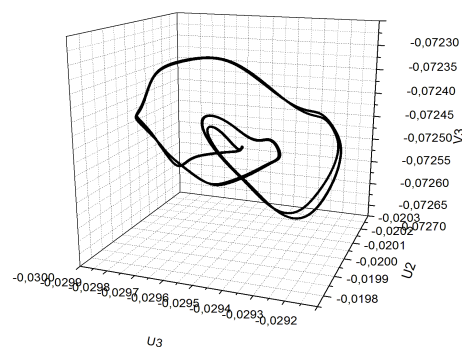


Рис. 6. Проекция фазового пространства НКЗ системы (7) при $Re = 2720$, $Re_m = 1000$, $N = 0,2$

В заключении сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Построена формальная теория символической динамики полимодальных отображений двух типов, получены критерии существования траекторий с заданной символической последовательностью.
2. Выдвинута гипотеза о связи символической динамики систем дифференциальных уравнений с хаосом и символической динамики полимодальных отображений.
3. Проведено численное исследование некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, подтверждающее выдвинутую гипотезу.
4. На тех же примерах продемонстрирована связь между методикой Гиллмора и символической динамикой полимодальных отображений.
5. Реализованы в виде программных комплексов и протестированы численные схемы решения некоторых двумерных начально-краевых задач гидродинамики и МГД.

6. Промоделированы первые стадии ламинарно-турбулентного перехода в задачах о гидродинамическом и МГД течениях в каверне и канале с симметричным расширением.
7. Предложен метод стабилизации периодических решений начально-краевых задач.

Список основных публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Рябков О. И. Об исследовании седло-узловых бифуркаций и бифуркации вилки методом стабилизации Н. А. Магницкого // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1657–1661.
2. Рябков О. И. Исследование системы уравнений Янга-Миллса с помощью методики Гиллмора-Лефранка // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53, № 14. С. 46–62.
3. Рябков О. И. Исследование перехода к турбулентности в двумерной каверне с движущейся крышкой // Труды ИСА РАН. 2011. Т. 61, № 4. С. 39–44.
4. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Рябков О. И. Численное исследование перехода к турбулентности в задаче о двумерном течении вязкой сжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62, № 1. С. 55–62.
5. Буров Д. А., Голицын Д. Л., Рябков О. И. Исследование перехода от диссипативного к консервативному состоянию в двумерных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 430–434.

1. Рябков О. И. Структура бифуркационных диаграмм двумерных нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с периодической правой частью // Труды третьей международной конференции «Системный анализ и информационные технологии». 2009.
2. Рябков О. И. Проблема расщепления сепаратрисы в гамильтоновой механике на примере системы Крокета // Труды четвертой международной конференции «Системный анализ и информационные технологии». 2011.
3. Рябков О. И. О методе стабилизации периодических решений в системах уравнений с частными производными на примере системы Курамото-Цузуки // Труды второй всероссийской научной конференции «Теория и практика системного анализа». 2012.
4. Евстигнеев Н. М., Рябков О. И. О численном исследовании ламинарно-турбулентного перехода с использованием различных параллельных архитектур // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2012». 2012.
5. Ryabkov O. I. On the Gilmore-Lefranc method application to the yang-mills-higgs system of ordinary differential equations // 2nd International Symposium Rare Attractors and Rare Phenomena in Nonlinear Dynamics RA'11 Symposium Proceedings. 2011.

Цитированная литература

1. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989.

2. Hansen K. T. Bifurcation structures for multimodal maps // Submitted to Experimental Math. 1997. URL: <http://alf.nbi.dk/khansen/papers/multimod.ps.gz>.
3. Hansen K. T., Cvitanovich P. Bifurcation structures in maps of Henon type // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. Pp. 1233–1261.
4. Gilmore R., Lefranc M. The topology of chaos. Wiley-Interscience, 2002.
5. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. Москва: Едиториал УРСС, 2004.
6. Ghia U., Ghia K. N., Shin T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and Multigrid Method // Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 48. Pp. 387–411.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. Наука, 1982.
8. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О природе турбулентности в задаче движения жидкости за уступом // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 69—73.
9. Cheng-Chin W. A high order WENO finite difference scheme for incompressible fluids and magnetohydrodynamics // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. Vol. 101, no. 1. Pp. 37—61.
10. Mistrangelo C. Three-dimensional MHD flow in sudden expansions // Wissenschaftliche Berichte FZKA. 2006. Vol. 7201.