Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Шестаков Олег Владимирович

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ПРИ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНОВСКОГО ТИПА

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012 г.

Работа выполнена на кафедре математической статистики
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Ушаков Владимир Георгиевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Ушаков Николай Георгиевич**

доктор физико-математических наук,
профессор **Федоткин Михаил Андреевич**

доктор физико-математических наук,
профессор **Кюркчан Александр Гаврилович**

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится 15 февраля 2013 г. в 11.00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «__» декабря 2012 г.

Председатель
диссертационного совета,
член-корреспондент РАН,
профессор Л.Н. Королев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. За последние 40 лет томографические методы реконструкции характеристик поглощающих, излучающих и отражающих объектов и сред получили широкое распространение в самых разнообразных областях, включая медицину, биологию, физику плазмы, газовую динамику, геофизику, астрономию и радиолокацию. Среди этих моделей наиболее распространенными являются классическое преобразования Радона, используемое в трансмиссионной (в частности, рентгеновской) томографии, экспоненциальное преобразование Радона, используемое для описания эмиссионного томографического эксперимента в однородной поглощающей среде, преобразование Радона с поглощением, являющееся обобщением экспоненциального преобразования Радона на случай неоднородной поглощающей среды, сферическое преобразование Радона, используемое в теормоакустических и фотоакустических томографических экспериментах, интегральное сферическое среднее, используемое в радиолокации, и дифракционное преобразование, используемое в ультразвуковой и оптической томографии.

В реальных экспериментах данные всегда регистрируются с некоторой случайной погрешностью. Эти погрешности необходимо учитывать при построении и анализе статистической модели наблюдаемых данных. И поскольку задачи обращения интегральных преобразований радоновского типа при наличии случайного шума относятся к классу некорректно поставленных статистических задач, непосредственное применение формул обращения может привести к очень большим ошибкам. Для решения статистических задач такого рода применяются методы регуляризации часто в сочетании с сингулярным разложением. Сингулярное разложение представляет собой весьма популярный инструмент. Более того, оконное сингулярное разложение при надлежащем выборе окна позволяет строить асимптотически наилучшие в минимаксном смысле оценки. Однако сингулярное разложение обладает некоторыми недостатками, которые налагают ограничения на его использование при анализе и обработке пространственно неоднородных функций. В последние десятилетия значительно возросла популярность нелинейных методов подавления шума с помощью аппарата вейвлет-анализа. Объясняется это тем, что вейвлет-анализ позволяет гораздо более эффективно исследовать нестационарные сигналы и изображения, чем традиционный Фурье-анализ. В частности, чтобы обойти ограничения, присущие сингулярному разложению, Д. Донохо предложил метод так называемого вейвлет-вейглет разложения, а Ф. Абрамович и Б. Сильверман – альтернативный метод вейглет-вейвлет разложения. Указанные методы вейвлет-анализа применяются для обращения линейных однородных операторов, к которым относится преобразование Абеля, лежащее в основе математической модели томографического анализа объектов, обладающих круговой симметрией. Кроме того, оказывается, что классическое преобразование Радона обладает многими свойствами линейных однородных операторов, позволяющими применять методы вейвлет-анализа для его обращения.

В сочетании с методами вейвлет-разложений для подавления шума широко применяются нелинейные процедуры пороговой обработки коэффициентов разложения. Их привлекательность заключается, во-первых, в быстроте алгоритмов построения оценок, а во-вторых, в возможности лучшей, чем линейные методы, адаптации к функциям, имеющим на разных участках различную степень регулярности. Пороговая обработка коэффициентов вейвлет-разложений применяется не только в томографических приложениях, но и во многих других прикладных и теоретических областях, например, при анализе и обработке радиосигналов, изображений и видеопотоков, анализе сейсмических данных, квантовой механике, компьютерной графике, при построении оценок в задачах непараметрической регрессии, построении оценок плотностей вероятностных распределений и т.д. Помимо подавления шума пороговая обработка также позволяет решать задачу «сжатия», т.е. экономного представления данных, что может играть критическую роль при передаче данных по каналам с ограниченной пропускной способностью. Основной проблемой в процедурах пороговой обработки является стратегия выбора порога. Проблема выбора порога и обоснования его оптимальности при решении конкретных практических задач рассматривалась в работах Д. Донохо, Й. Джонстона, Г.

Керкьячаряна, Д. Пикарда, М. Янсена, А. Балтхила, Г. Нэйсона, Н. Ли, А. Антониадиса, Дж. Маррона, Р. Аверкампа, С. Айята, Т. Кая, Л. Брауна и других. При обосновании выбора порога главным критерием является величина риска пороговой обработки, т.е. погрешности, к которой приводит использование данного метода. Сам риск вычислить нельзя, так как неизвестны незашумленные данные, однако можно изучить его асимптотические свойства. Кроме того, можно построить оценку риска непосредственно по наблюдаемым данным. Изучение свойств оценки риска также представляет важную задачу, поскольку эта оценка дает возможность количественно оценить погрешность метода подавления шума, основываясь только на наблюдаемых данных. Однако, если свойства теоретического риска достаточно хорошо изучены, свойствам его оценок до сих пор уделялось мало внимания (в частности, в работах Д. Донохо и Й. Джонстона доказаны лишь свойства несмещенности и состоятельности). Одной из задач диссертации является восполнение этого пробела и изучение свойств оценок риска пороговой обработки при различных стратегиях выбора порога.

Помимо наличия случайных погрешностей при обращении интегральных преобразований радоновского типа следует учитывать еще тот факт, что в реальных томографических экспериментах можно зарегистрировать лишь конечное число проекционных данных. Это обстоятельство усиливает некорректность задачи обращения. Известны примеры неединственности решения задачи обращения классического преобразования Радона, приводящие к так называемому парадоксу вычислительной томографии: с одной стороны, теоретически задачу реконструкции изображений по конечному числу проекций решить нельзя, с другой стороны, томографы реконструируют приемлемые для практических целей изображения. В работах Л.Б. Клебанова, С.Т. Рачева и Л.А. Халфина приводится решение этого парадокса, основанное на оценках близости в равномерной метрике между функционалами от изображений, имеющих конечное число совпадающих или близких проекций. В диссертации решается задача получения количественных оценок точности реконструкции функции по конечному числу проекционных данных радоновского типа.

Кроме случайности, обусловленной наличием шума, в томографических экспериментах может возникать случайность, связанная с особенностями самого объекта изучения. В таких ситуациях строится вероятностная модель объекта, и основной интерес представляют собой вероятностные характеристики случайной функции, описывающей объект. Проблема восстановления вероятностных характеристик случайной функции по вероятностным характеристикам ее интегральных преобразования радоновского типа возникает в ряде задач микробиологии, газовой динамики и физики плазмы. При этом основной особенностью является то обстоятельство, что разным проекциям (точнее, реализациям проекций) соответствуют разные реализации случайной функции, т.е. от каждой отдельной реализации случайной функции регистрируется, вообще говоря, только одна проекция. Функция может иметь несколько (даже бесконечное множество) состояний, которые меняются случайным образом во время процесса получения проекций. Это приводит к тому, что восстановление даже одного состояния случайной функции обычными методами обращения невозможно. Впервые такая постановка задачи встречается в работах В. Лью, Н. Боссета, М. Радемахера и Дж. Фрэнка. Для классического преобразования Радона первые содержательные результаты были получены В.Г. Ушаковым и Н.Г. Ушаковым. Также подобные задачи рассматривались в работах М.Г. Каримова, К. Чампли и Х. Пиккарайнен с привлечением параметрических стохастических моделей.

В диссертации рассматривается вопрос о возможности восстановления вероятностных характеристик случайной функции при наличии информации о вероятностных характеристиках ее интегральных преобразований радоновского типа без использования какой-либо параметрической модели для описания изображений. Рассмотрены все основные типы интегральных преобразований, используемые в томографических и радиолокационных приложениях.

Объект исследования. Диссертация посвящена исследованию интегральных преобразований радоновского типа от случайных функций и количественным оценкам точности методов их обращения.

Цель работы: Разработка методов вероятностного анализа характеристик случайных функций при наличии информации о вероятностных характеристиках интегральных преобразований радоновского типа и изучение свойств статистических оценок погрешностей методов подавления шума в проекционных данных.

Задачи диссертационной работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Доказательство предельных теорем для оценок среднеквадратичного риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов функции, описывающей наблюдаемые данные (сигнал), при различных стратегиях выбора порога и получение оценок скорости сходимости в этих теоремах.

2. Доказательство предельных теорем для оценок среднеквадратичного риска пороговой обработки при обращении линейных однородных операторов и преобразования Радона и получение оценок скорости сходимости в этих теоремах.

3. Получение количественных оценок точности реконструкции функции по конечному числу проекционных данных радоновского типа при наличии погрешностей.

4. Разработка методов реконструкции вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам интегральных преобразований радоновского типа.

Методы исследования. В работе используются современные методы теории вероятностей и математической статистики, теория случайных процессов, методы анализа Фурье и вейвлет-анализа, теория аналитических функций, теория интегральных преобразований, методы решения обратных задач, теория интегральной геометрии, методы математического и функционального анализа, а также теория интерполирования функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана асимптотическая нормальность оценок среднеквадратичного риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов оценки функции в задаче непараметрической регрессии при различных стратегиях выбора порога.

2. Доказана асимптотическая нормальность оценок среднеквадратичного риска пороговой обработки коэффициентов разложения функции в задаче обращения линейных однородных операторов и преобразования Радона.

3. Получены оценки скорости сходимости в предельных теоремах для оценок среднеквадратичного риска.

4. Получены количественные оценки точности реконструкции функции по конечному числу проекционных данных радоновского типа при использовании линейного метода регуляризации с функцией окна.

5. Разработаны методы реконструкции вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам интегральных преобразований радоновского типа.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер, однако они могут быть использованы для решения различных практических задач анализа и обработки сигналов и изображений, в частности, вычислительной и стохастической томографии и их приложений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах «Современные методы обработки сигналов и изображений» (факультет ВМК МГУ), «Теория риска и смежные вопросы» (факультет ВМК МГУ), «Математическое моделирование волновых процессов» (РосНОУ), большом семинаре кафедры теории вероятностей (механико-математический факультет МГУ), 5-м всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (2004 г.), международных семинарах по проблемам устойчивости стохастических моделей (2003, 2004, 2005, 2007, 2011, 2012 гг.), 2-м международном конгрессе «Ультрасовременные телекоммуникации и системы управления ICUMT-2010» (2010 г.), 2-й школе молодых ученых ИПИ РАН (2011 г.) и научной конференции «Ломоносовские чтения» (ВМК МГУ, 2012 г.).

Работа поддержана грантами РФФИ (11-01-00515-а и 11-01-12026-офи-м), а также министерством образования и науки РФ (гос. контракт № 14.740.11.0996).

Публикации по теме. Основные результаты диссертации получены лично автором и представлены в 34 печатных работах [1]–[34]: статьях, тезисах докладов и трудах конференций, причем 23 из них – [1]–[7], [9]–[12], [14]–[19], [21]–[26] – опубликованы в журналах, входящих в список ВАК «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, перечня основных обозначений, введения, четырех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, включающего в себя 208 наименований. Используется тройная нумерация формул: через точку указывается номер главы, номер параграфа и порядковый номер в этом параграфе. Также используется двойная нумерация определений, теорем, лемм, утверждений, следствий и замечаний: через точку указывается номер главы и порядковый номер в этой главе. Основной текст занимает 234 страницы.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, ставятся цели диссертационного исследования, а также кратко излагается содержание диссертации.

В первой главе изучены асимптотические свойства оценок среднеквадратичного риска при использовании методов пороговой обработки в задаче оценивания функции сигнала по зашумленным наблюдениям.

В первом и втором параграфах приводятся необходимые сведения из теории вейвлет-анализа, описывается метод пороговой обработки вейвлет-коэффициентов разложения функции сигнала и определяется оценка среднеквадратичного риска.

Объектом изучения является функция сигнала f, заданная на отрезке $[0,1]$, которая предполагается равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma \geqslant 0$.

Вейвлет-разложение представляет функцию f в виде ряда из сдвигов и растяжений допустимой вейвлет-функции ψ:

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k},$$

где $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. Семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. В диссертации предполагается, что допустимая вейвлет-функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема M раз ($M \geqslant \gamma$), имеет M нулевых моментов и существует такая константа $C_A > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^\gamma)\, |\psi(x)|\, dx \leqslant C_A.$$

В этом случае найдется такая константа $A > 0$, что $\langle f, \psi_{j,k}\rangle \leqslant A2^{-j(\gamma+1/2)}$.

На практике функции сигнала всегда заданы в дискретных отсчетах, и наблюдения регистрируются с некоторой погрешностью (шумом). Не ограничивая общности будем считать, что функция f задана в точках i/N ($i = 1, \ldots, N$, где $N = 2^J$ для некоторого J): $f_i = f\,(i/N)$. В диссертации принята аддитивная модель шума:

$$Y_i = f_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где ε_i – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2. Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора наблюдений на ортогональную матрицу W, определяемую вейвлет-базисом $\{\psi_{j,k}\}$. В силу ортогональности матрицы W для дискретных вейвлет-коэффициентов принимается следующая модель:

$$X_i = a_i + \varepsilon_i^W, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где ε_i^W также независимы и нормально распределены с нулевым средним и дисперсией σ^2, а a_i равны соответствующим непрерывным вейвлет-коэффициентам, умноженным на $\sqrt{N}$.

Для подавления шума к вейвлет-коэффициентам применяется пороговая обработка с пороговой функцией $\rho_T(x)$, смысл которой заключается в удалении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Самыми распространенными видами пороговых функций являются функция жесткой пороговой обработки: $\rho_T(x) = x1(|x| > T)$, и мягкой пороговой обработки $\rho_T(x) = \operatorname{sgn}(x)\left(|x| - T\right)_+$. В диссертации рассматривается в основном функция мягкой пороговой обработки, поскольку в большинстве случаев именно она используется для подавления шума.

Среднеквадратичная погрешность (или риск) пороговой обработки определяется следующим образом:

$$R_N(f,\sigma,T) = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}\left(a_i - \rho_T(X_i)\right)^2.$$

Поскольку в этом выражении присутствуют неизвестные величины a_i, вычислить значение риска $R_N(f,\sigma,T)$ нельзя. Однако его можно оценить непосредственно по наблюдаемым данным:

$$\widehat{R}_N(f,\sigma,T) = \sum_{i=1}^{N} F[(Y_i^W)^2,\sigma,T],$$

$$\text{где } F[x,\sigma,T] = (x-\sigma^2)1(|x| \leqslant T^2) + (\sigma^2+T^2)1(|x| > T^2).$$

Д. Донохо и И. Джонстон показали, что при мягкой пороговой обработке функция $\widehat{R}_N(f,\sigma,T)$ является несмещенной оценкой для $R_N(f,\sigma,T)$.

Далее в первой главе доказываются предельные теоремы для оценки среднеквадратичного риска пороговой обработки при различных способах оценивания дисперсии шума и разных стратегиях выбора порога. Также получены оценки скорости сходимости в этих теоремах.

Одним из первых порогов был «универсальный» порог $T_U = \sigma\sqrt{2\ln N}$, предложенный Д. Донохо, И. Джонстоном и Г. Керкячаряном. Этот порог зависит от сигнала только через дисперсию шума и в некотором смысле является максимальным среди разумных в том смысле, что он эффективно удаляет почти весь шум, однако при этом может удалить и важные компоненты полезного сигнала. Описанию свойств «универсального» порога посвящен третий параграф первой главы.

Зачастую дисперсия σ^2 неизвестна, и ее также необходимо оценивать, при этом оценка риска принимает вид

$$\widehat{R}_N(f, \widehat{\sigma}, T) = \sum_{i=1}^{N} F[(Y_i^W)^2, \widehat{\sigma}, T],$$

а вместо универсального порога T_U используется порог $\widehat{T}_U = \widehat{\sigma}\sqrt{2\ln N}$.

Обычно дисперсия σ^2 (или среднеквадратичное отклонение σ) оценивается по выборке сигнала по половине всех вейвлет-коэффициентов для $j = J-1$ (напомним, что $N = 2^J$), поскольку если функция f удовлетворяет требуемым условиям регулярности, то эти коэффициенты фактически содержат только шум. В качестве оценки σ^2 (или σ) в диссертации рассматривается выборочная дисперсия:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^{N} X_i^2 - \overline{X}^2, \text{ где } \overline{X} = \frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^{N} X_i, \tag{1.1}$$

а также соответствующим образом нормированный выборочный интерквартильный размах $\widehat{\sigma}_R$ и выборочное абсолютное медианное отклонение от медианы $\widehat{\sigma}_M$:

$$\widehat{\sigma}_R = \frac{X_{N/2,3/4} - X_{N/2,1/4}}{2\xi_{3/4}}, \tag{1.2}$$

$$\widehat{\sigma}_M = \frac{\underset{N/2+1\leqslant i\leqslant N}{\mathrm{med}} |X_i - \underset{N/2+1\leqslant j\leqslant N}{\mathrm{med}} X_j|}{\xi_{3/4}}, \tag{1.3}$$

где $X_{N/2,1/4}$ и $X_{N/2,3/4}$ – выборочные квантили порядка $1/4$ и $3/4$, построенные по выборке из половины всех вейвлет коэффициентов на уровне $J-1$ $(N = 2^J)$, $\xi_{3/4}$ – теоретическая квантиль порядка $3/4$ стандартного нормального распределения ($\xi_{3/4} \approx 0.6745$), а med обозначает выборочную медиану. Выборочная дисперсия является самой популярной оценкой величины σ^2, и в случае отсутствия выбросов она наиболее предпочтительна. Однако в случае, когда оценка дисперсии строится по выборке сигнала, естественно ожидать, что выборка не будет однородной. Преимущество использования последних двух оценок заключается в их робастности, т.е. нечувствительности к выбросам. Нормированный выборочный интерквартильный размах, как частный случай q-квантильного размаха, является одной из самых популярных робастных оценок σ. Интерквартильный размах используется во многих прикладных задачах медицины, социологии, экономики и других областей. Однако практически во всех работах, посвященных вейвлет-анализу сигналов и изображений, в качестве робастной оценки σ предлагается использовать выборочное абсолютное медианное отклонение от медианы.

В четвертом параграфе получены оценки скорости сходимости в предельных теоремах для величины $\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T)$, доказанных в работах А.В. Маркина.

Теорема 1.3. [1] *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 1/4$ и пусть оценка σ^2 задана соотношением (1.1), тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$ и $\tilde{C}_1$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},\widehat{T}_U)-R_N(f,\sigma,T_U)}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_0(\ln N)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4\gamma+2}}}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\gamma+2}}}+\frac{\tilde{C}_1}{N^{2\gamma-1/2}}.$$

Теорема 1.4. *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$ и пусть оценка σ^2 задана соотношением (1.2) или соотношением (1.3), тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$ и $\tilde{C}_1$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},\widehat{T}_U)-R_N(f,\sigma,T_U)}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Upsilon(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_0}{N^{\gamma-1/2}}+\frac{\tilde{C}_1(\ln\ln N)^{3/4}}{N^{1/4}},$$

если $\widehat{\sigma}=\widehat{\sigma}_R$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},\widehat{T}_U)-R_N(f,\sigma,T_U)}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Upsilon(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_0}{N^{\gamma-1/2}}+\frac{\tilde{C}_1(\ln N)^{3/4}}{N^{1/4}},$$

если $\widehat{\sigma}=\widehat{\sigma}_M$. Здесь $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией $\Upsilon^2=[2\xi_{3/4}\phi(\xi_{3/4})]^{-2}-1$.

В пятом параграфе исследуются асимптотические свойства оценки риска в методе SureShrink. Суть метода SureShrink заключается в минимизации оценки риска (1) на множестве $T\in[0,T_U]$, т.е. порог выбирается следующим образом:

$$\widehat{R}_N(f,\sigma,T_{SURE})=\min_{T\in[0,T_U]}\widehat{R}_N(f,\sigma,T).$$

[1] Нумерация теорем и лемм соответствует их нумерации в диссертации.

Этот порог имитирует теоретический «идеальный» порог T_{Min}, минимизирующий риск:

$$R_N(f,\sigma,T_{Min}) = \min_{T\in[0,T_U]} R_N(f,\sigma,T).$$

В диссертации доказывается асимптотическая нормальность оценки риска при выборе порога T_{SURE}.

Теорема 1.6. *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$, тогда имеет место сходимость по распределению*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\sigma,T_{SURE}) - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \quad \text{при } N\to\infty.$$

Теорема 1.8. *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$, и пусть оценка σ^2 задана соотношением (1.1), (1.2) или (1.3). Тогда имеет место сходимость по распределению*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T_{SURE}) - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi_\Sigma(x) \quad \text{при } N\to\infty,$$

где $\Phi_\Sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией Σ^2 равной единице, если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (1.1), и равной $[2\xi_{3/4}\phi(\xi_{3/4})]^{-2} - 1$, если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (1.2) или (1.3).

Теоремы 1.6 и 1.8 позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для риска пороговой обработки. Однако для того чтобы оценить отклонение вероятности попадания в доверительный интервал от доверительного уровня, необходимы оценки скорости сходимости к нормальному закону в этих теоремах. В диссертации эти оценки также получены.

Теорема 1.9. *Пусть выполнены условия теоремы 1.8, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}_3$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T_{SURE}) - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) - \Phi_\Sigma(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_0(\ln N)^{1+\frac{1}{2\gamma+1}}}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\gamma+1}}},$$

при $1/2 < \gamma \leqslant 3/2$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T_{SURE})-R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_1(\ln N)^{-1/2}}{N^{1/4}},$$

если $\gamma > 3/2$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (1.1),*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T_{SURE})-R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_2(\ln\ln N)^{3/4}}{N^{1/4}},$$

если $\gamma > 3/2$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (1.2) и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},T_{SURE})-R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_3(\ln N)^{3/4}}{N^{1/4}},$$

если $\gamma > 3/2$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (1.3).*

Следствие 1.1. *Пусть* f *задана на отрезке* $[0,1]$ *и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем* $\gamma > 1/2$, *тогда существуют такие константы* $\tilde{C}_0$ *и* $\tilde{C}_1$, *что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\sigma,T_{SURE})-R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_0(\ln N)^{1+\frac{1}{2\gamma+1}}}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\gamma+1}}},$$

если $1/2 < \gamma \leqslant 3/2$, *и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\sigma,T_{SURE})-R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_1(\ln N)^{-1/2}}{N^{1/4}},$$

если $\gamma > 3/2$.

Замечание 1.1. *Оказывается, что в классе оценок* σ, *построенных на основе* q*-квантильных размахов, величина* $\widehat{\sigma}_R$ *не является оптимальной в смысле предельной дисперсии. Дисперсия предельного нормального закона в теоремах 1.4 и 1.8 при использовании в качестве оценки* σ *величины* $\widehat{\sigma}_q = (X_{N/2,q} - X_{N/2,1-q})/[2\xi_q]$ *равна* $\Upsilon^2 = (2q-1)(2-2q)[\xi_q\phi(\xi_q)]^{-2}-1$. *Минимум этого выражения достигается при* $q \approx 0.931$ ($\xi_q \approx 1.4821$). *При использовании в качестве оценки* σ *величины* $\widehat{\sigma}_q$ *оценки скорости сходимости с точностью до мультипликативных констант останутся такими же, как в теоремах 1.4 и 1.9.*

Теорема 1.9 и следствие 1.1 дают возможность оценить отклонение от доверительного уровня вероятности попадания значения теоретического риска в доверительный интервал. Этой же цели служат теоремы 1.3 и 1.4 при использовании «универсального» порога.

В шестом параграфе рассматривается ситуация, когда дисперсия шума оценивается по независимой выборке.

Теорема 1.10. *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является кусочно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 0$ и пусть $\widehat{\sigma}^2$ – не зависящая от X_i оценка дисперсии σ^2, для которой выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{N}(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2) < x\right) \Rightarrow \Phi_\Sigma(x) \quad \text{при } N \to \infty,$$

где $\Phi_\Sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией Σ^2. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},\widehat{T}_U) - R_N(f,\sigma,T_U)}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \quad \text{при } N \to \infty,$$

где где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon^2 = 1 + \frac{\Sigma^2}{2\sigma^4}.$$

Теорема 1.11. *Пусть f задана на отрезке $[0,1]$ и является кусочно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 0$ и пусть $\widehat{\sigma}^2$ – не зависящая от X_i оценка дисперсии σ^2, для которой выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{N}(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2) < x\right) \Rightarrow \Phi_\Sigma(x) \quad \text{при } N \to \infty,$$

где $\Phi_\Sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией Σ^2. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\widehat{\sigma},\widehat{T}_{SURE}) - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \quad \text{при } N \to \infty,$$

где где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon^2 = 1 + \frac{\Sigma^2}{2\sigma^4}.$$

Из приведенных теорем следует, что асимптотическое поведение оценки риска зависит от способа оценивания дисперсии шума. В седьмом и восьмом параграфах рассматриваются свойства оценки риска в методе обобщенной кросс-валидации, разработанного М. Янсеном, М. Малфэйтом и А. Балтхилом. Суть этого метода заключается в выборе порога без использования значения дисперсии шума. Строится следующая функция обобщенной кросс-валидации, которая зависит только от наблюдаемых данных и порога T:

$$\widehat{G}_N(f,T) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \left(X_i - \rho_T(X_i)\right)^2}{\mu_T^2}, \text{ где } \mu_T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1(|X_i| \leqslant T).$$

Затем выбирается порог, минимизирующий $\widehat{G}_N(f,T)$ на некотором множестве $T \in [T_0, T_U]$:

$$\widehat{G}_N(f,T_{GCV}) = \min_{T\in[T_0,T_U]} \widehat{G}_N(f,T),$$

где T_0 – достаточно большое, но не зависящее от N число.

Порог T_{GCV} имитирует теоретический порог T^*:

$$\mathrm{E}\widehat{G}_N(f,T^*) = \min_{T\in[T_0,T_U]} \mathrm{E}\widehat{G}_N(f,T).$$

Известно, что

$$\frac{R_N(f,\sigma,T^*)}{R_N(f,\sigma,T_{Min})} \downarrow 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Это утверждение служит некоторым теоретическим обоснованием для выбора порога T_{GCV} (особенно в случаях, когда дисперсия шума неизвестна), и экспериментальные данные показывают, что T_{GCV} представляет собой довольно хорошую аппроксимацию оптимального порога. В диссертации доказана асимптотическая нормальность функции $\widehat{G}_N(f,T_{GCV})$, что является дополнительным теоретическим доводом для выбора такого порога. Также получены оценки скорости сходимости к нормальному закону.

Теорема 1.16. *Пусть $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ задана на отрезке $[0,1]$ и является равномерно регулярной по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$, тогда имеет место сходимость* *по распределению*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{G}_N(f,T_{GCV}) - N\sigma^2 - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \ \ \text{при } N\to\infty.$$

Следствие 1.2. *При выполнении условий теоремы 1.16 справедливо*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{R}_N(f,\sigma,T_{GCV}) - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \ \ \text{при } N\to\infty.$$

Теорема 1.17. *Пусть выполнены условия теоремы 1.16, тогда существуют такие константы* $\tilde{C}_0$ *и* $\tilde{C}_1$*, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{G}_N(f,T_{GCV}) - N\sigma^2 - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_0(\ln N)^{1+\frac{1}{2\gamma+1}}}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\gamma+1}}},$$

если $1/2 < \gamma \leqslant 3/2$*, и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{G}_N(f,T_{GCV}) - N\sigma^2 - R_N(f,\sigma,T_{Min})}{\sigma^2\sqrt{2N}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_1(\ln N)^{-\frac{1}{2}}}{N^{1/4}},$$

если $\gamma > 3/2$.

В следствии 1.2 справедливы такие же оценки скорости сходимости к нормальному закону с точностью до мультипликативных констант.

Во второй главе рассматривается задача обращения линейных однородных операторов в условиях наличия шума. В частности, рассматриваются интегральные операторы, используемые в математических моделях томографических экспериментов. Изучаются асимптотические свойства оценок среднеквадратичного риска при использовании методов пороговой обработки.

В первом параграфе описываются основные подходы к решению обратных статистических задач и обосновывается выбор метода вейглет-вейвлет разложения. Рассматривается следующую модель:

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\ldots,2^J,$$

где X_i – наблюдаемые данные, K – некоторый линейный оператор, f – истинная (незашумленная) функция, которую необходимо оценить, а ε_i – случайные погрешности измерения. Предполагается, что все ε_i независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2.

Также предполагается, что оператор K является однородным с показателем α, т.е.

$$K[f(a(x-x_0))] = a^{-\alpha}(Kf)[a(x-x_0)]$$

для любого x_0 и любого $a > 0$. Примерами однородных линейных операторов являются оператор интегрирования, преобразование Абеля, лежащее в основе математической модели томографического анализа объектов, обладающих круговой симметрией, и некоторые виды операторов свертки.

При построении оценки функции f используется нелинейный метод вейглет-вейвлет разложения, разработанный Ф. Абрамовичем и Б. Сильверманом. В этом методе Kf раскладывается в ряд по вейвлет-базису:

$$Kf = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle Kf, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}.$$

При этом функция f представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\langle Kf, \psi_{j,k}\rangle u_{j,k},$$

где $u_{j,k} = K^{-1}\psi_{j,k}/\beta_{j,k}$, а $\beta_{j,k} = \left\|K^{-1}\psi_{j,k}\right\|_{L^2} = 2^{\alpha j}\beta_{0,0}$. Функции $u_{j,k}$ называются «вейглетами». Последовательность $\{u_{j,k}\}$ не образует ортонормированную систему, однако если выполнены некоторые условия гладкости на $K^*\psi$ и $K^{-1}\psi$, то последовательность $\{u_{j,k}\}$ образует устойчивый базис.

Лемма 2.1. *Пусть существуют такие константы $A_i > 0$, $a_i > 0$ и $b_i > 1$, $i = 1, 2$, что*

$$\left|\widehat{K^{-1}\psi}(\omega)\right| \leqslant A_1 |\omega|^{a_1} (1+|\omega|^2)^{-(b_1+a_1)/2} \text{ и } \left|\widehat{K^{*}\psi}(\omega)\right| \leqslant A_2 |\omega|^{a_2} (1+|\omega|^2)^{-(b_2+a_2)/2}$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$, тогда последовательность $\{u_{j,k}\}$ образует устойчивый базис в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Во втором параграфе рассматриваются особенности оценивания среднеквадратичного риска при обращении линейных однородных операторов. При практической реализации вейвлет-преобразования дискретные вейвлет-коэффициенты получаются умножением вектора значений функции Kf на ортогональную матрицу W, определяемую вейвлет-базисом $\{\psi_{j,k}\}$. Таким образом, в силу ортогональности матрицы преобразования, дискретные вейвлет-коэффициенты наблюдаемых данных, которые мы обозначим через $Y_{j,k}$, описываются следующей моделью:

$$Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^{W}, \quad j = 0, \ldots, J-1,\ k = 0, \ldots, 2^j - 1,$$

где $\mu_{j,k} = 2^{J/2}\langle Kf, \psi_{j,k}\rangle$, а случайные погрешности $\varepsilon_{j,k}^{W}$ независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2.

Как и в первой главе для подавления шума рассматривается процедура мягкой пороговой обработки. К каждому зашумленному вейвлет-коэффициенту $Y_{j,k}$ применяется функция $\rho_{T_j}(x)$. Риск пороговой обработки в методе вейглет-вейвлет разложения определяется как

$$r_J(f, \sigma, \mathbf{T}) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{j,k}^2 \mathsf{E}(\mu_{j,k} - \rho_{T_j}(Y_{j,k}))^2.$$

где $\mathbf{T} = (T_0, \ldots, T_{J-1})$ – вектор порогов. В отличие от первой главы, в которой порог выбирался единым для всех масштабов $j = 0, \ldots, J-1$, здесь для каждого масштаба j выбирается, вообще говоря, свой порог. Это связано с тем обстоятельством, что вклады в риск слагаемых не равноправны на разных масштабах из-за наличия множителей $\beta_{j,k}^2$, которые возникают в результате обращения оператора K.

В качестве оценки риска используется следующая величина:

$$\widehat{r}_J(f, \sigma, \mathbf{T}) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{j,k}^2 F[Y_{j,k}^2, \sigma, T_j],$$

где $F[x, \sigma, T_j] = (x - \sigma^2)1(|x| \leqslant T_j^2) + (\sigma^2 + T_j^2)1(|x| > T_j^2)$.

$\widehat{r}_J(f, \sigma, \mathbf{T})$ является несмещенной оценкой для $r_J(f, \sigma, \mathbf{T})$.

В третьем, четвертом и пятом параграфах доказывается асимптотическая нормальность оценки риска при различных способах оценивания дисперсии шума и разных стратегиях выбора порога. Также получены оценки скорости сходимости к нормальному закону.

Третий параграф посвящен аналогу «универального» порога. Введем вектор «универсальных» порогов $\mathbf{T}_U = (T_{U,0}, \ldots, T_{U,J-1})$, где $T_{U,j} = \sigma\sqrt{2\ln 2^j}$. Введем обозначения:

$$B^2 = \frac{2\sigma^4\beta_{0,0}^4}{2^{4\alpha+1}-1} \quad \text{и} \quad D_J = B2^{(2\alpha+1/2)J}.$$

Теорема 2.1. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha > 0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция $Kf \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$, тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty.$$

Если дисперсия шума неизвестна, и ее также необходимо оценивать, то вместо порогов $T_{U,j}$ используются пороги $\widehat{T}_{U,j} = \widehat{\sigma}\sqrt{2\ln 2^j}$ (обозначим вектор этих порогов через $\widehat{\mathbf{T}}_U$).

Теорема 2.2. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha > 0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$. Пусть $\widehat{\sigma}^2$ – не зависящая от $Y_{j,k}$ оценка дисперсии σ^2, для которой выполнено*

$$\mathsf{P}\left(2^{J/2}(\widehat{\sigma}^2 - \sigma^2) < x\right) \Rightarrow \Phi_\Sigma(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty,$$

где $\Phi_\Sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией Σ^2. Тогда

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J} < x\right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty,$$

где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon^2 = 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2(2^{2\alpha+1}-1)^2}\frac{\Sigma^2}{\sigma^4}.$$

Если дисперсия оценивается по выборке сигнала и функция Kf удовлетворяет требуемым условиям регулярности, то ее оценивают по половине всех вейвлет-коэффициентов на уровне $j = J-1$, так как эти коэффициенты фактически содержат только шум. Во второй главе рассматриваются те же виды оценки σ^2, которые были рассмотрены в первой главе: выборочная дисперсия и нормированные выборочный интерквартильный размах и выборочное абсолютное медианное отклонение от медианы:

$$\widehat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{2^{J-1}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} Y_{J-1,k}^2 - \left(\frac{1}{2^{J-1}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} Y_{J-1,k} \right)^2, \tag{2.1}$$

$$\widehat{\sigma}_R = \frac{Y_{J-1,(3/4)} - Y_{J-1,(1/4)}}{2\xi_{3/4}}, \tag{2.2}$$

$$\widehat{\sigma}_M = \frac{\operatorname*{med}\limits_{0\leqslant k\leqslant 2^{J-1}-1} |Y_{J-1,k} - \operatorname*{med}\limits_{0\leqslant l\leqslant 2^{J-1}-1} Y_{J-1,l}|}{\xi_{3/4}}, \tag{2.3}$$

где $Y_{J-1,(1/4)}$ и $Y_{J-1,(3/4)}$ – выборочные квантили порядка $1/4$ и $3/4$, построенные по набору вейвлет-коэффициентов на уровне $j = J-1$.

Теорема 2.3. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha > 0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 1/4$. Пусть оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (2.1). Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f, \widehat{\sigma}, \widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f, \sigma, \mathbf{T}_U)}{D_J} \right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty,$$

где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon = \frac{1}{2^{4\alpha+1}} + \frac{2^{4\alpha+1} - 1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1} - 1\right)^2}.$$

Теорема 2.4. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha > 0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$. Пусть оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (2.2). Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f, \widehat{\sigma}, \widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f, \sigma, \mathbf{T}_U)}{D_J} < x \right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty,$$

где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon = 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_{3/4}^2(\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.4 и оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (2.3). Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J} < x\right) \Rightarrow \Phi_\Upsilon(x) \ \ \text{при} \ \ J\to\infty,$$

где $\Phi_\Upsilon(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon = 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_{3/4}^2(\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Сформулируем теперь утверждение о скорости сходимости к нормальному закону.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J}\right) - \Phi_{\Upsilon_1}(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_0(\ln 2^J)^{\frac{3}{2}+\frac{4\alpha+1}{4\gamma+2}J}}{2^{J\left(\frac{1}{2}-\frac{1-8\alpha\gamma}{4\gamma+2}\right)}} + \frac{\tilde{C}_1}{2^{J\left(2\gamma-\frac{1}{2}\right)}} + \frac{\tilde{C}_2}{2^{\frac{J}{2}}},$$

где $\Phi_{\Upsilon_1}(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{2^{4\alpha+1}} + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1}-1\right)^2}.$$

Пусть выполнены условия теоремы 2.4, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_3$ и $\tilde{C}_4$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\widehat{\mathbf{T}}_U) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J}\right) - \Phi_{\Upsilon_2}(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_3}{2^{J(\gamma-1/2)}} + \frac{\tilde{C}_4(\ln\ln 2^J)^{3/4}}{2^{J/4}},$$

где $\Phi_{\Upsilon_2}(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Upsilon_2 = 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_{3/4}^2(\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Пусть выполнены условия теоремы 2.5, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_5$ и $\tilde{C}_6$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\widehat{\mathbf{T}}_U)-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_U)}{D_J}\right)-\Phi_{\Upsilon_2}(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_5}{2^{J(\gamma-1/2)}}+\frac{\tilde{C}_6(\ln 2^J)^{3/4}}{2^{J/4}}.$$

В четвертом параграфе результаты первой главы, касающиеся свойств оценки риска пороговой обработки в методе SureShrink, переносятся на случай обращения линейного однородного оператора с помощью вейглет-вейвлет разложения. Вектор порогов $\mathbf{T}_{SURE}=(T_0^S,\ldots,T_{J-1}^S)$ выбирается следующим образом:

$$\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{SURE})=\min_{T_j\in[0,T_\alpha],j=0,\ldots,J-1}\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}),$$

где $T_\alpha=\sigma\sqrt{2(2\alpha+1)\ln 2^J}$. Этот вектор имитирует теоретический «идеальный» порог $\mathbf{T}_{Min}=(T_{Min},\ldots,T_{Min})$, одинаковый для всех масштабов j:

$$r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})=\min_{T\in[0,T_\alpha]}\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\mathsf{E}(\mu_{j,k}-\rho_T(Y_{j,k}))^2.$$

Теорема 2.8. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha>0$, и оценка σ^2 задана соотношением (2.1), (2.2) или (2.3). Пусть вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma>\max\{(8\alpha+2)^{-1},1/4\}$, если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (2.1), и $\gamma>1/2$, если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (2.2) или (2.3). Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\mathbf{T}_{SURE})-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J}<x\right)\Rightarrow\Phi_\Sigma(x)\quad\text{при}\quad J\to\infty,$$

где $\Phi_\Sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Sigma^2=\frac{1}{2^{4\alpha+1}}+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1}-1\right)^2},$$

если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (2.1), и

$$\Sigma^2=1+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_{3/4}^2(\phi(\xi_{3/4}))^2}-\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)},$$

если $\widehat{\sigma}$ определяется соотношением (2.2) или (2.3).

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы 2.8, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ и $\tilde{C}_3$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\mathbf{T}_{SURE})-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_0(\ln 2^J)^{1+\frac{1}{2\gamma+1}}}{2^{J\left(\frac{1}{2}-\frac{1-4\alpha\gamma}{2\gamma+1}\right)}},$$

если $\max\{(8\alpha+2)^{-1},1/4\}<\gamma\leqslant 3/(16\alpha+2)$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (2.1), и* $1/2<\gamma\leqslant 3/(16\alpha+2)$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (2.2) или (2.3),*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\mathbf{T}_{SURE})-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_1(\ln 2^J)^{-1/2}}{2^{J/4}},$$

если $\gamma>3/(16\alpha+2)$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (2.1),*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\mathbf{T}_{SURE})-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_2(\ln\ln 2^J)^{3/4}}{2^{J/4}},$$

если $\gamma>3/(16\alpha+2)$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (2.2), и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\widehat{\sigma},\mathbf{T}_{SURE})-r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J}<x\right)-\Phi_\Sigma(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{C}_3(\ln 2^J)^{3/4}}{2^{J/4}},$$

если $\gamma>3/(16\alpha+2)$ *и* $\widehat{\sigma}$ *определяется соотношением (2.3).*

Замечание 2.1. *Дисперсия предельного нормального закона в теоремах 2.4 и 2.8 при использовании в качестве оценки* σ *величины* $\widehat{\sigma}_q$ *равна*

$$\Upsilon^2=1+\frac{(2^{4\alpha+1}-1)(2q-1)(2-2q)}{(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_q^2(\phi(\xi_q))^2}-\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Минимум этого выражения достигается при $q\approx 0.931$ *(*$\xi_q\approx 1.4821$*, см. замечание 1.1). При использовании в качестве оценки* σ *величины* $\widehat{\sigma}_q$ *оценки скорости сходимости с точностью до мультипликативных констант останутся такими же, как в теоремах 2.6 и 2.9.*

Приведенные теоремы позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для риска пороговой обработки и оценивать отклонение вероятности попадания в доверительный интервал от доверительного уровня.

В пятом параграфе рассматривается порог, выбираемый на основе процедуры обобщенной кросс-валидации. На каждом масштабе j строится функция обобщенной кросс-валидации, которая зависит только от наблюдаемых данных и порога

T_j:

$$\widehat{G}_j(T_j) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{2^j-1}\left(Y_{j,k} - \rho_{T_j}(Y_{j,k})\right)^2}{\mu_{T_j}^2}, \quad \text{где} \quad \mu_{T_j} = \frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{2^j-1} 1(|Y_{j,k}| \leqslant T_j).$$

Выбор вектора порогов $\mathbf{T}_{GCV} = (T_0^G, \ldots, T_{J-1}^G)$, основанных на процедуре обобщенной кросс-валидации, заключается в минимизации функции $\widehat{G}_j(T_j)$ на некотором множестве $T_j \in [T_0, T_\alpha]$:

$$\widehat{G}_j(T_j^G) = \min_{T_j \in [T_0, T_\alpha]} \widehat{G}_j(T_j),$$

где T_0 – достаточно большое, но не зависящее от j число.

Теорема 2.10. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha > 0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 2.1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > (8\alpha+2)^{-1}$. Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{GCV}) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \quad \textit{при} \quad J \to \infty.$$

Теорема 2.11. *Пусть выполнены условия теоремы 2.10, тогда существуют такие константы $\tilde{C}_0$ и $\tilde{C}_1$, что*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{GCV}) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J} < x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_0(\ln 2^J)^{1+\frac{1}{2\gamma+1}}}{2^{J\left(\frac{1}{2}-\frac{1-4\alpha\gamma}{2\gamma+1}\right)}},$$

если $\max\{(8\alpha+2)^{-1}, 1/4\} < \gamma \leqslant 3/(16\alpha+2)$, *и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathsf{P}\left(\frac{\widehat{r}_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{GCV}) - r_J(f,\sigma,\mathbf{T}_{Min})}{D_J} < x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{\tilde{C}_1(\ln 2^J)^{-1/2}}{2^{J/4}},$$

если $\gamma > 3/(16\alpha+2)$.

В шестом параграфе рассматривается задача обращения преобразования Радона в модели с аддитивным шумом. Предлагается метод разложения функции, описывающей проекционные данные, в ортогональный ряд по Фурье-вейвлет базису и доказывается устойчивость базиса, по которому раскладывается функция изображения. Приводятся условия, при которых имеет место асимптотическая нормальность оценки среднеквадратичного риска в предложенном методе.

Преобразование Радона определяется следующим образом:

$$Rf(\varphi,s)=\int\limits_{L_{\varphi,s}} f(x,y)dl=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\varphi-t\sin\varphi, s\sin\varphi+t\cos\varphi)dt,$$
$$s\in\mathbb{R}, \varphi\in[0,2\pi).$$

При обращении преобразования Радона в диссертации рассматривается подход, заключающийся в разложении функции $Rf(\varphi,s)$ в ряд Фурье по переменной φ и в вейвлет-ряд по переменной s:

$$Rf(\varphi,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\langle Rf_n,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}(s)Z_n(\varphi),\quad \text{где}\quad Rf_n(s)=\int\limits_0^{2\pi} Rf(\varphi,s)Z_n(\varphi)d\varphi,$$

а $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ – вещественный базис Фурье. После применения обратного оператора R^{-1}, получаем представление для функции f, которое является аналогом вейглет-вейвлет разложения:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\beta_{n,j,k}\langle Rf_n,\psi_{j,k}\rangle u_{n,j,k}(x,y),$$

где

$$u_{n,j,k}(x,y)=\frac{R^{-1}[Z_n\psi_{j,k}](x,y)}{\beta_{n,j,k}},\quad \beta_{n,j,k}=\left\|R^{-1}[Z_n\psi_{j,k}]\right\|_{L^2}.$$

Лемма 2.3. *Пусть существуют такие константы $A>0$, $a>1/2$ и $b>3/2$, что*

$$\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|\leqslant A\left|\omega\right|^a(1+\left|\omega\right|^2)^{-(b+a)/2}$$

для всех $\omega\in\mathbb{R}$, тогда последовательность $\{u_{n,j,k}\}$ образует устойчивый базис в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Для преобразования Радона справедливы аналоги всех утверждений, приведенных для однородных операторов, с $\alpha=1/2$ и заменой J на $2J$.

В третьей главе рассматриваются интегральные методы обращения преобразований радоновского типа в условиях неполноты данных и линейные методы регуляризации с помощью гауссовой функции окна. Исследуются преобразование

Радона в веерной схеме сканирования, экспоненциальное преобразование Радона, преобразование Радона с поглощением, сферическое преобразование Радона, интегральное сферическое среднее и дифракционное преобразование. Получены количественные оценки точности реконструкции функции изображения при наличии конечного числа ее проекций радоновского типа. Всюду в третьей главе предполагается, что носителем функции $f(x, y)$, описывающей томографическое изображение, является круг

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Кроме того, предполагается, что функция, описывающая объект, неотрицательна и нормирована, т.е.

$$\iint\limits_U f(x, y) dx dy = 1.$$

Класс всех таких функций обозначен через $\mathbf{F}_U$. Через $f_\sigma(x, y)$ обозначается функция изображения, восстановленная по проекционным данным и использованием гауссовой функции окна.

В первом параграфе описываются основные особенности задачи обращения преобразования Радона при наличии конечного числа проекционных данных. Приведены оценки точности реконструкции по конечному числу проекций, полученные Л. Клебановым и Л. Халфиным, а также оценки точности в случае наличия погрешностей в проекционных данных.

Во втором, третьем, четвертом, пятом, шестом и седьмом параграфах получены оценки точности реконструкции по конечному числу проекций в моделях с использованием других интегральных преобразований радоновского типа.

В веерной схеме сканирования источник излучения движется по окружности с центром в начале координат и радиусом T, а носитель объекта, описываемого функцией $f(x, y)$, содержится внутри этой окружности. Пусть $\beta \in [0, 2\pi)$ – угловая координата источника пучка лучей, а $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ описывает положение луча внутри пучка. В такой схеме сканирования проекционные данные описываются следующим выражением:

$$Df(\beta,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(T\sin\alpha\cos(\beta{+}\alpha){-}y\sin(\beta{+}\alpha),T\sin\alpha\sin(\beta{+}\alpha){+}y\cos(\beta{+}\alpha))dy.$$

Теорема 3.4. *Пусть $f(x,y),g(x,y)\in\mathbf{F}_U$ непрерывно дифференцируемы всюду за исключением конечного числа кусочно-гладких кривых, вдоль которых они могут иметь разрывы первого рода. Пусть*

$$\sup_{(x,y)\in U\setminus L}\|\nabla f(x,y)\|_{\ell^2}\leqslant C,\ \textit{и}\ \sup_{(x,y)\in U\setminus L}\|\nabla g(x,y)\|_{\ell^2}\leqslant C.$$

Если

$$Df(\beta_k,\alpha)=Dg(\beta_k,\alpha),\quad \alpha\in[-\alpha_m,\alpha_m],\ k=1,\dots N,$$

где $\beta_k=2\pi k/N$, тогда

$$\sup_{(x,y)\in U}|f_\sigma(x,y)-g_\sigma(x,y)|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^3N}+\frac{2C}{\sigma^2N}\frac{T^2+T\sqrt{1+T^2}}{1+T^2}.$$

Теорема 3.5. *Пусть $f(x,y),g(x,y)\in\mathbf{F}_U$ непрерывно дифференцируемы всюду за исключением конечного числа кусочно-гладких кривых, вдоль которых они могут иметь разрывы первого рода. Пусть*

$$\sup_{(x,y)\in U\setminus L}\|\nabla f(x,y)\|_{\ell^2}\leqslant C,\ \textit{и}\ \sup_{(x,y)\in U\setminus L}\|\nabla g(x,y)\|_{\ell^2}\leqslant C.$$

Если для некоторого фиксированного $\varepsilon>0$

$$|Df(\beta_k,\alpha)-Dg(\beta_k,\alpha)|\leqslant\varepsilon,\quad \alpha\in[-\alpha_m,\alpha_m],\ k=1,\dots N,$$

где $\beta_k=2\pi k/N$, тогда

$$\sup_U|f_\sigma(r,\theta)-g_\sigma(r,\theta)|\leqslant\frac{T\varepsilon}{\sigma^2\pi\sqrt{T^2+1}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^3N}+\frac{2C}{\sigma^2N}\frac{T^2+T\sqrt{1+T^2}}{1+T^2}.$$

Экспоненциальным преобразованием Радона, которое возникает в задачах однофотонной эмиссионной томографии в ситуации, когда поглощающая излучение среда однородна (с коэффициента поглощения $\mu>0$), называется преобразование вида

$$R_\mu f(\varphi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\mu t}f(s\cos\varphi-t\sin\varphi,s\sin\varphi+t\cos\varphi)dt,\ s\in\mathbb{R},\varphi\in[0,2\pi).$$

Теорема 3.6. *Пусть* $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$. *Если*

$$R_\mu f(\varphi_j, s) = R_\mu g(\varphi_j, s), \quad s \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, N,$$

где $\varphi_j = 2\pi j/N$, *тогда*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \frac{e^{2\mu}}{N}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^3} + \mu\frac{e^{-\frac{\sigma^2\mu^2}{2}}}{\sigma^2}\right).$$

Теорема 3.7. *Пусть* $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$. *Пусть для некоторого фиксированного* $\varepsilon > 0$

$$|R_\mu f(\varphi_j, s) - R_\mu g(\varphi_j, s)| \leqslant \varepsilon, \quad s \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots N,$$

где $\varphi_j = 2\pi j/N$, *тогда*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \varepsilon\frac{e^{\mu}}{\pi\sigma^2} + \frac{e^{2\mu}}{N}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^3} + \mu\frac{e^{-\frac{\sigma^2\mu^2}{2}}}{\sigma^2}\right).$$

Определим преобразование Радона с поглощением. Пусть $a(x,y)$ – известная функция, которая имеет смысл коэффициента поглощения в данной точке (x,y). Будем предполагать, что $a(x,y)$ неотрицательна и ее носителем является круг U единичного радиуса с центром в начале координат. Также будем предполагать, что $a(x,y)$ непрерывно дифференцируема, $\sup\limits_{(x,y)\in U} a(x,y) \leqslant \mu$ для некоторой константы μ, а $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\nabla a(x,y)\|_{\ell^2} = G_a$. Класс всех функций $a(x,y)$, удовлетворяющих этим условиям, будем обозначать через $\mathbf{A}_U$. Положим

$$Da(\varphi, x, y) = \int_0^\infty a(x + t\cos\varphi, y + t\sin\varphi)dt, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Для $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $s \in \mathbb{R}$ преобразование Радона с поглощением определяется выражением

$$R_a f(\varphi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Da(\varphi+\pi/2, s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)} f(s\cos\varphi - t\sin\varphi, s\sin\varphi + t\cos\varphi)dt.$$

Теорема 3.8. *Пусть* $a(x,y) \in \mathbf{A}_U$, $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$. *Если*

$$R_a f(\varphi_j, s) = R_a g(\varphi_j, s), \quad s \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, N,$$

где $\varphi_j = 2\pi j/N$, *тогда*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \frac{2e^{3\mu}}{N\sigma^2}\left(4G_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{2}}\right) +$$
$$+\frac{2e^{3\mu}}{N\sigma}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}G_a + \frac{\sqrt{\pi}\mu}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right)\left(4G_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\right).$$

Теорема 3.9. *Пусть* $a(x,y) \in \mathbf{A}_U$, $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$. *Если для некоторого фиксированного* $\varepsilon > 0$

$$|R_a f(\varphi_j, s) - R_a g(\varphi_j, s)| \leqslant \varepsilon, \ \ s \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, N,$$

где $\varphi_j = 2\pi j/N$, *тогда*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \frac{2e^{3\mu}}{N\sigma^2}\left(4G_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{2}}\right) +$$
$$+\frac{2e^{3\mu}}{N\sigma}\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}G_a + \frac{\sqrt{\pi}\mu}{2\sqrt{2}\sigma^2}\right)\left(4G_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\right) +$$
$$+\frac{2\varepsilon e^{3\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(5G_a + \frac{3\mu}{2\sigma^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} + \frac{2}{N}\left(G_a + \frac{\mu}{2\sigma^2}\right)\left(\pi G_a + \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right).$$

Сферическое преобразование Радона на плоскости, используемое в математических моделях термоакустичекой и фотоакустической томографии определяется следующим образом:

$$Sf(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi + r\cos\theta, \sin\varphi + r\sin\theta)d\theta, \ \ \varphi \in [0, 2\pi), \ r \in (0, \infty).$$

Теорема 3.10. *Пусть* $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$ *бесконечно дифференцируемы,*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\nabla f(x,y)\|_{\ell^2} \leqslant C \ \text{и} \ \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\nabla g(x,y)\|_{\ell^2} \leqslant C.$$

Пусть $\varphi_j = 2\pi j/N$ *и*

$$Sf(\varphi_j, r) = Sg(\varphi_j, r), \ \ r \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, N,$$

тогда

$$\sup_{(x,y)\in U} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\frac{4C}{N\sigma^2}.$$

Теорема 3.11. *Пусть $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$ бесконечно дифференцируемы,*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\nabla f(x,y)\|_{\ell^2} \leqslant C \text{ и } \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\nabla g(x,y)\|_{\ell^2} \leqslant C.$$

Пусть $\varphi_j = 2\pi j/N$ и

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} |Sf(\varphi_j, r) - Sg(\varphi_j, r)| \leqslant \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, N,$$

тогда

$$\sup_{(x,y)\in U} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{2\varepsilon}{\pi\sigma^2} + \frac{4C}{N\sigma^2}\right).$$

Интегральное сферическое среднее используется при формировании изображений из сигналов, получаемых радиолокационными станциями с синтезированной апертурой. Пусть функция $f(x,y) \in \mathbf{F}_U$ четна по второй переменной. Определим интегральное сферическое среднее функции $f(x,y)$, как интеграл по окружности радиуса r с центром в точке $(t,0)$:

$$Mf(t,r) = \int_0^{2\pi} f(t + r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta.$$

Теорема 3.12. *Пусть натуральные числа N и n выбираются так, что при $n \to \infty$ выполнено $N/n \to \infty$ и $N/n^2 \to 0$. Обозначим*

$$t_i = \frac{i}{n}, \ i = -N, \ldots, N.$$

Если $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$ – четные по второй переменной и $Mf(t_i, r) \equiv Mg(t_i, r)$ для всех t_i, $i = -N, \ldots, N$, тогда

$$\sup_{(x,y)\in U} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\sigma^3}\left(\frac{N}{n^2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{\pi^2\sigma^2} \operatorname{arcctg} \frac{2N}{n}.$$

Теорема 3.13. *Пусть t_i, $i = -N, \ldots, N$, те же, что в предыдущей теореме, $f(x,y), g(x,y) \in \mathbf{F}_U$ – четные по второй переменной, и*

$$\sup_{r\in\mathbb{R}} |Mf(t_i, r) - Mg(t_i, r)| \leqslant \varepsilon$$

для всех t_i, $i = -N, \ldots, N$, тогда

$$\sup_{(x,y)\in U} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi\sigma^2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\sigma^3}\left(\frac{N}{n^2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{\pi^2\sigma^2} \operatorname{arcctg} \frac{2N}{n}.$$

В дифракционной томографии аппроксимация Рытова приводит к следующему интегральному преобразованию, названному дифракционным преобразованием:

$$Gf(\varphi, s) = \frac{ik}{4\pi} e^{-ikr} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{is\omega} \frac{e^{ira(\omega)}}{a(\omega)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(r'(a(\omega)-k)+s'\omega)} \times$$
$$\times f(r'\cos\varphi - s'\sin\varphi, r'\sin\varphi + s'\cos\varphi) dr' ds' d\omega.$$

Здесь k – частота волны, облучающей объект, r – радиус окружности, на которой расположены приемники, $a(\omega) = \sqrt{k^2 - \omega^2}$. Пусть $h_j(\omega) = \widehat{f}(\omega\cos\varphi_j, \omega\sin\varphi_j)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., N$. Разложим $h_j(\omega)$ в ряд Тейлора в точках k и $-k$ до члена порядка $m-1$:

$$h_j(\omega) = P^{\pm}_{j,m}(\omega) + \frac{h_j^{(m)}(\xi^{\pm})(\omega \mp k)^m}{m!}, \quad |\omega| > k,$$

где $\xi^+ \in (k, \omega)$, $\xi^- \in (\omega, -k)$ и

$$P^{\pm}_{j,m}(\omega) = \sum_{l=0}^{m-1} h_j^{(l)}(k) \frac{(\omega \mp k)^l}{l!}.$$

Определим функции $\psi_{j,m}(\omega) = \psi_{j,m}(\omega) = h_j(\omega) 1(|\omega| \leqslant k) + P^{+}_{j,m}(\omega) 1(\omega > k) + P^{-}_{j,m}(\omega) 1(\omega < -k)$. Пусть $\psi_{N,m}(\varphi, \omega) = \psi_{j,m}(\omega)$ для всех $\omega \in \mathbb{R}$ и всех $\varphi \in [\varphi_j - \pi/N, \varphi_j + \pi/N]$, $j = 1, ..., N$. Запишем $\psi_{N,m}(\varphi, \omega)$ в декартовых координатах: $\psi_{N,m}(\omega_1, \omega_2)$. Функция $\psi_{N,m}(\omega_1, \omega_2)$ приближает $\widehat{f}(\omega_1, \omega_2)$ в круге радиуса k. На этапе обращения преобразования Фурье воспользуемся гауссовым регуляризующим окном $W_\sigma(\omega_1, \omega_2) = e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2}$. Обозначим через $f_\sigma(x, y)$ обратное преобразование Фурье от произведения $\widehat{f}(\omega_1, \omega_2) W_\sigma(\omega_1, \omega_2)$. В качестве аппроксимации для $f_\sigma(x, y)$ будем использовать модуль обратного преобразования Фурье от произведения $\psi_{N,m}(\omega_1, \omega_2) W_\sigma(\omega_1, \omega_2)$, который обозначим через $|f_{N,m,\sigma}(x, y)|$.

Теорема 3.14. *Пусть $f(x, y) \in \mathbf{F}_U$ и пусть функция $|f_{N,m,\sigma}(x, y)|$ получена по описанному выше методу. Тогда*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_\sigma(x, y) - |f_{N,m,\sigma}(x, y)|| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sigma^3 N} + \frac{e^{-\sigma^2 k^2}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2^{m/2}\sigma^{m+2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} + \frac{k}{2^{(m+1)/2}\sigma^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \right).$$

Если дополнительно предположить, что $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема, тогда

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - |f_{N,m,\sigma}(x,y)|| \leqslant \frac{C_f\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sigma^3 N} +$$
$$+\frac{e^{-\sigma^2k^2}}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2^{m/2}\sigma^{m+2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} + \frac{k}{2^{(m+1)/2}\sigma^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\right),$$

где $C_f = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |\nabla f(x,y)|$.

В четвертой главе исследуется задача стохастической томографии, заключающаяся в реконструкции вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам проекций радоновского типа. Описываются особенности этой задачи, приводятся примеры отсутствия единственности ее решения. Для всех преобразований радоновского типа, рассмотренных в третьей главе в классе дискретных случайных функций разрабатываются методы реконструкции вероятностных распределений случайных функций по распределениям проекций. Приводятся количественные оценки устойчивости предложенных методов.

Формально постановка задачи следующая. Имеется двумерная случайная функция $\xi(x,y)$, реализации которой предполагаются с вероятностью 1 интегрируемыми. Также будем считать, что носителем $\xi(x,y)$ является единичный круг: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Функции, совпадающие всюду за исключением множеств нулевой Лебеговой меры, будем считать эквивалентными. Предполагается, что имеется некоторая информация о вероятностных характеристиках проекционных данных (всех или некоторого множества). Задача состоит в нахождении определенных вероятностных характеристик случайной функции $\xi(x,y)$.

В общем случае эта задача не имеет единственного решения. В диссертации приведены некоторые примеры неединственности, построенные в работах В.Г. Ушакова, Н.Г. Ушакова и работах автора.

Определим также более узкий класс случайных функций, который в дальнейшем будет использоваться в качестве основной модели. Этот класс, с одной стороны, достаточен для многих приложений, с другой стороны, – позволяет единственным образом восстановить вероятностные характеристики стохастических объектов по характеристикам интегральных преобразований радоновского типа. Пусть Q – множество всех случайных функций $\xi(x, y)$ вида

$$\xi(x, y) = f_\nu(x, y),$$

где $f_1(x, y), f_2(x, y), \ \ldots$ – последовательность различных (неэквивалентных) интегрируемых функций, определенных в единичном круге U, а ν – случайная величина, принимающая целые положительные значения. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что функции $f_1(x, y), f_2(x, y), \ \ldots$ принадлежат классу $\mathbf{F}_U$.

Случайные функции из класса Q есть ни что иное, как дискретные случайные элементы в пространстве $L^1(U)$, и их вероятностная структура полностью определяется набором

$$(f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots ; p_1, p_2, \ldots),$$

где $p_i = \mathrm{P}(\xi(x, y) = f_i(x, y))$, $i = 1, 2, \ldots,$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Распределение $\xi(x, y) \in Q$ будем обозначать через P_ξ.

Теорема о взаимооднозначном соответствии между распределением случайной функции из класса Q и распределениями ее проекций, доказанная В.Г. Ушаковым и Н.Г. Ушаковым, формулируется следующим образом:

Теорема 4.1. *Пусть* $\xi(x, y) \in Q$, $\eta(x, y) \in Q$, *и* $\mathrm{P}_{R\xi_\varphi} = \mathrm{P}_{R\eta_\varphi}$ *для всех* $\varphi \in \Lambda \subseteq [0, 2\pi)$, *где* Λ *– бесконечное множество. Тогда* $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.

Метод восстановления распределений случайных функций разработан автором и основан на следующем свойстве согласованности проекционных данных:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s) s^m ds = p_m(\varphi),$$

где $p_m(\varphi)$ – тригонометрический многочлен степени m.

В диссертации доказаны теоремы единственности, аналогичные теореме 4.1, для преобразований радоновского типа, введенных в третьей главе, и разработаны методы восстановления распределений случайных функций по распределениям проекционных данных.

Теорема 4.2. *Пусть* $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$, *и* $\mathrm{P}_{D\xi_\beta} = \mathrm{P}_{D\eta_\beta}$ *для всех* $\beta \in \Lambda \subseteq [0, 2\pi)$, *где* Λ *– бесконечное множество, тогда* $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.

Метод восстановления распределений случайных функций для веерной схемы сканирования основан на аппроксимации функции

$$H(\beta,\varphi) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Df(\beta,\alpha)}{|\sin(\beta+\alpha)\cos\varphi - \cos(\beta+\alpha)\sin\varphi|} d\alpha.$$

алгебраическим многочленом.

Теорема 4.3. *Пусть* $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$, *и* $\mathrm{P}_{R_\mu\xi_\varphi} = \mathrm{P}_{R_\mu\eta_\varphi}$ *для всех* $\varphi \in \Lambda \subseteq [0, 2\pi)$, *где* Λ *– бесконечное множество, тогда* $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.

Метод восстановления распределений случайных функций для экспоненциального преобразования Радона основан на аппроксимации функции

$$J^{(m)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\mu f(\varphi,s) s^m ds.$$

тригонометрическим многочленом.

Теорема 4.4. *Пусть* $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$, *реализации случайных функций* $\xi(x,y)$ *и* $\eta(x,y)$ *непрерывны и* $\mathrm{P}_{R_a\xi_\varphi} = \mathrm{P}_{R_a\eta_\varphi}$ *для всех* $\varphi \in \Lambda$, *где* Λ *– подмножество* $[0, 2\pi)$, *имеющее положительную меру Лебега. Тогда* $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.

Метод восстановления распределений случайных функций для преобразования Радона с поглощением основан на аппроксимации множителя $e^{-Da(\varphi+\pi/2,x,y)}$ в определении функции

$$J^{(m)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_a f(\varphi,s) s^m ds = \iint\limits_U (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^m e^{-Da(\varphi+\pi/2,x,y)} f(x,y) dxdy.$$

тригонометрическим многочленом. В результате получается приближение тригонометрическим многочленом для функции $J^{(m)}(\varphi)$.

Теорема 4.5. *Пусть $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$, реализации случайных функций $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ непрерывны и $\mathrm{P}_{S\xi_\varphi} = \mathrm{P}_{S\eta_\varphi}$ для всех $\varphi \in \Lambda$, где Λ – подмножество $[0,2\pi)$, имеющее положительную меру Лебега, тогда $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.*

Метод восстановления распределений случайных функций для сферического преобразования Радона основан на следующем свойстве согласованности проекционных данных:

$$J^{(k)}(\varphi) = \int\limits_0^\infty r^{2k} Sf(\varphi,r) r dr = p_k(\varphi),$$

где $p_k(\varphi)$ – тригонометрический многочлен степени k.

Теорема 4.6. *Пусть $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$ бесконечно дифференцируемы и четны по второй переменной. Пусть $\mathrm{P}_{M\xi_t} = \mathrm{P}_{M\eta_t}$ для всех $t \in \Lambda$, где Λ – подмножество $\mathbb{R}$ положительной меры Лебега, тогда $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.*

Метод восстановления распределений случайных функций для интегрального сферического среднего основан на следующем свойстве согласованности проекционных данных:

$$J^{(k)}(t) = \int\limits_0^\infty r^{2k} Mf(t,r) dr = p_{2k}(t),$$

где $p_{2k}(t)$ – алгебраический многочлен степени $2k$.

Теорема 4.7. *Пусть $\xi(x,y) \in Q$, $\eta(x,y) \in Q$ и $\mathrm{P}_{G\xi_\varphi} = \mathrm{P}_{G\eta_\varphi}$ для всех $\varphi \in \Lambda \subseteq [0,2\pi)$, где Λ – бесконечное множество, тогда $\mathrm{P}_\xi = \mathrm{P}_\eta$.*

Метод восстановления распределений случайных функций для дифракционного преобразования основан на следствии из дифракционной теоремы, которая устанавливает следующее соотношение:

$$\widehat{Gf}(\varphi,\omega) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} ik \frac{e^{ir(a(\omega)-k)}}{a(\omega)} \times$$
$$\times \widehat{f}\left((a(\omega)-k)\cos\varphi - \omega\sin\varphi, (a(\omega)-k)\sin\varphi + \omega\cos\varphi\right).$$

Обозначим

$$J^{(m)}(\varphi) = \widehat{Gf}_{\omega}^{(m)}(\varphi, \omega)|_{\omega=0}.$$

Из дифракционной теоремы следует, что $J^{(m)}(\varphi)$ представляет собой тригонометрический многочлен степени m.

В **Заключении** приведены основные результаты, выносимые на защиту.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность академику РАН Ю.В. Прохорову и профессорам В.Г. Ушакову и В.Ю. Королеву за разностороннюю помощь, оказанную во время исследований и работы над диссертацией.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Асимптотика оценки риска при вейглет-вейвлет разложении наблюдаемого сигнала // T-Comm — Телекоммуникации и Транспорт, 2011. № 2. С. 54–57.

[2] Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Асимптотическое распределение оценки риска пороговой обработки вейглет-коэффициентов сигнала при неизвестном уровне шума // T-Comm — Телекоммуникации и Транспорт, 2011. № 5. С. 24–30.

[3] Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Реконструкция томографических изображений с помощью пороговой обработки коэффициентов разложения проекционных данных по ортогональному базису // T-Comm — Телекоммуникации и Транспорт, 2012. № 3. С. 63–68.

[4] Ушаков В.Г., Шестаков О.В. Экспоненциальное преобразование Радона случайных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2005. № 1. С. 49–55.

[5] Ушаков В.Г., Шестаков О.В. Восстановление вероятностных характеристик случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. № 1. С. 20–24.

[6] Ушаков В.Г., Шестаков О.В. Реконструкция распределений случайных функций в задачах однофотонной эмиссионной томографии при помощи аппрок-

симации экспоненциального множителя тригонометрическими многочленами // Информатика и ее применения, 2011. Т. 5. № 3. С. 17–21.

[7] Шестаков О.В. Алгебраические методы восстановления вероятностных характеристик многомерных случайных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2004. № 3. С. 32–36.

[8] Шестаков О.В. Алгебраические методы восстановления вероятностных характеристик многомерных случайных функций // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2004. № 2. С. 428.

[9] Шестаков О.В. Оценка точности восстановления функции по ее экспоненциальному преобразованию Радона при использовании конечного числа проекций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2006. № 4. С. 22–25.

[10] Шестаков О.В. Об устойчивости метода восстановления распределений многомерных случайных функций по распределениям проекций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2007. № 3. С. 25–30.

[11] Шестаков О.В. Точность реконструкции томографических изображений при использовании веерной схемы сканирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2008. № 3. С. 20–23.

[12] Шестаков О.В. Об устойчивости реконструкции изображений в задачах эмиссионной томографии // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. № 3. С. 47–51.

[13] Шестаков О.В. О проблеме восстановления коэффициента преломления в задачах дифракционной томографии // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, 2009. № 6. С. 158–162.

[14] Шестаков О.В. Реконструкция распределений случайных функций в задачах стохастической дифракционной томографии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2009. № 3. С. 36–39.

[15] Шестаков О.В. Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использова-

нии выборочной дисперсии // Информатика и ее применения, 2010. Т. 4. № 4. С. 73–81.

[16] Шестаков О.В. Восстановление вероятностных распределений стохастических радиолокационных изображений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2010. № 3. С. 23–29.

[17] Шестаков О.В. О скорости сходимости распределения выборочного абсолютного медианного отклонения к нормальному закону // Информатика и ее применения, 2011. Т. 5. № 3. С. 74–80.

[18] Шестаков О.В. Оценки погрешности при реконструкции радиолокационных изображений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2011. № 2. С. 8–13.

[19] Шестаков О.В. О единственности восстановления вероятностных характеристик стохастических изображений, формируемых радаром с синтезированной апертурой // T-Comm – Телекоммуникации и транспорт, 2011. № 4. С. 32–34.

[20] Шестаков О.В. Минимизация функции обобщенной кросс-валидации для выбора порога при мягкой пороговой обработке коэффициентов вейвлет-разложения сигнала // Вторая школа молодых ученых ИПИ РАН. Сборник докладов. – М.: ИПИ РАН, 2011. С. 31–36.

[21] Шестаков О.В. Асимптотическая нормальность оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов при выборе адаптивного порога // Доклады РАН, 2012. Т. 445. № 5. С. 513–515.

[22] Шестаков О.В. О точности приближения распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала нормальным законом при неизвестном уровне шума // Системы и средства информатики, 2012. Т. 22. № 1. С. 142–152.

[23] Шестаков О.В. О скорости сходимости оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов к нормальному закону при использовании робастных оценок дисперсии // Информатика и ее применения, 2012. Т. 6. № 2. С. 122–128.

[24] Шестаков О.В. Регуляризация метода реконструкции функции по ее сферическому преобразованию Радона // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2012. № 1. С. 23–27.

[25] Шестаков О.В. Зависимость предельного распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов сигнала от вида оценки дисперсии шума при выборе адаптивного порога // T-Comm - Телекоммуникации и Транспорт, 2012. № 1 С. 46–51.

[26] Шестаков О.В. О свойствах оценки среднеквадратичного риска при регуляризации обращения линейного однородного оператора с помощью адаптивной пороговой обработки коэффициентов вейглет-вейвлет разложения // Вестн. Тверск. ун-та. Сер. Прикладная математика, 2012. № 8. С. 117–130.

[27] Kudryavtsev A. Shestakov O. Central limit theorem for risk estimate of vaguelette-wavelet signal decomposition // Transactions of XXIX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2011. P. 33–34.

[28] Kudryavtsev A. Shestakov O. Reconstruction of tomographic images using Fourier-wavelet decomposition // Transactions of XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2012. P. 51–53.

[29] Shestakov O.V. Fan-beam stochastic tomography // Systems and Means of Informatics. Special Issue. Mathematical and Computer Modeling in Applied Problems., 2008. P. 62–78.

[30] Shestakov O.V. Reconstruction of probability distributions of stochastic SAR images // Transactions of International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Moscow. 2010. P. 1062–1064.

[31] Shestakov O.V., Ushakov V.G. Reconstruction of Probabilistic Distributions of Multivariate Random Functions from Distributions of Their Projections // Proceedings of the XXIII Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2003. Spain. P. 60.

[32] Shestakov O.V., Ushakov V.G. Approximating projections with orthogonal polynomials to reconstruct distributions of multivariate random functions //

Transactions of the XXIV Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2004. Latvia. P. 60.

[33] Shestakov O.V., Ushakov V.G. Inversion of exponential Radon transform of random functions // Transactions of XXV Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2005. Italy. P. 264–269.

[34] Shestakov O.V., Ushakov V.G. Stability of reconstruction in stochastic tomography settings // Transactions of XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. 2007. Israel. P. 185–191.