Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

На правах рукописи

Сычугов Дмитрий Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре автоматизации научных исследований факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный консультант:

Доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор *Костомаров Дмитрий Павлович*

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник РНЦ
«Курчатовский Институт» *Сковорода Александр Алексеевич*

Доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
ИПМ РАН *Брушлинский Константин Владимирович*

Доктор физико-математических наук,
профессор факультета ВМК МГУ *Фаворский Антон Павлович*

Ведущая организация:
Институт Общей Физики РАН

Защита состоится 24 апреля 2013 г. в 15 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова,* расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____» _________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
профессор, доктор физико-математических наук Захаров Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Аннотация. Диссертация посвящена математическому моделированию процессов магнитного удержания плазмы в ловушках типа токамак и стелларатор – установках, на которых предполагается осуществить управляемый термоядерный синтез (УТС). Моделирование понимается в широком смысле: рассматриваются математические свойства моделей МГД равновесия и устойчивости плазмы, разработка на основе данных моделей численных кодов, стандартизация кодов и решение с их помощью прикладных задач, связанных с интерпретацией экспериментов и проектированием установок нового поколения. Автором доказан ряд теорем о свойствах моделей МГД равновесия и МГД устойчивости плазмы [6А, 32А], а также придуман метод, позволяющий с помощью потоковых координат рассчитывать МГД равновесия с магнитными островами, [8А, 13А, 14А]. Разработаны численные коды для расчета МГД равновесия и устойчивости плазмы [7А, 24А, 27А, 29А], которые доведены до уровня стандартных программ и выложены в открытый доступ [33А]. Выполнен ряд прикладных работ, касающихся установок Т-15М [15А-20А,22А], ТИН-СТ [31А], (Россия), CTF [26А], (Великобритания), КТМ [28А, 30А] (Казахстан).

Все результаты диссертации опубликованы в изданиях, входящих в список ВАК [1А-33А], а также докладывались на международных конференциях [34А-50А].

Актуальность темы диссертации подтверждается тем, что ее результаты востребованы. Прикладные работы посвящены проектированию установок токамак и стелларатор, сопровождению экспериментов на уже действующих установках [1А-5А, 7А, 9А-12А, 15А-20А, 22А, 26А, 28А, 30А-31А], всего на семи токамаках и двух стеллараторах. либо разработке и стандартизации численных кодов, предназначенных для решения тех же задач [7А, 21А, 24А, 27А, 29А, 33А]. В теоретических работах доказываются теоремы о свойствах математических моделей тех же процессов, что исследуются автором численно [6А, 32А], а также разрабатывается новые методы, позволяющие в перспективе расширить возможности численных кодов [8А, 13А, 14А].

Новизна результатов. Представленные в диссертации теоремы о свойствах моделей равновесия и вертикальной неустойчивости плазмы [6А, 32А], а также метод расчета равновесия плазмы с магнитными островами с помощью потоковых переменных [8А, 13А, 14А], являются оригинальными и новыми. Стандартные численные коды, представленные в диссертации [7А, 24А, 27А, 29А], хотя и имеют аналоги, но, благодаря лежащим в их основе оригинальным вариантам постановок задач, обладают рядом особенностей, позволяющих эффективно оптимизировать магнитные ловушки. Проекты нейтронных источников CTF [26А] и ТИН-СТ [31А], в разработке которых участвовал автор, выполнены впервые. Наконец, библиотека «Виртуальный

Токамак» [24A, 27A, 29A, 33A], объединившая не только коды автора, но и коды ведущих российских специалистов, в нашей стране уникальна.

Уровень результатов, соответствующий мировому, подтверждается участием автора диссертации в нескольких зарубежных и национальных проектах [15A-20A, 22A, 26A, 28A, 30A, 31A], а также высоким уровнем цитирования работ, на которые опирается диссертация. Например, работа [26A] имеет на момент написания диссертации, согласно данным сайта webofknowledge.com, индекс цитирования, равный 35.

Теоретическая значимость диссертации. Доказанные автором теоремы о свойствах решения задач МГД равновесия [6A], несомненно, способствуют более глубокому пониманию свойств моделей равновесия. Аналогично можно высказаться и относительно теорем о свойствах модели вертикальной неустойчивости плазмы [32A]. Что касается метода базовых координат [8A, 13A, 14A], то, помимо разработанного численного метода, важна сама идея применения координат с меняющейся топологией линий уровня.

Практическая значимость диссертации. Численные коды [7A, 24A, 27A, 29A], разработанные автором, имеют большое практическое значение. Они внедрены в РНЦ «Курчатовский Институт», ИОФ РАН (Россия), НЯЦ РК (Казахстан), применялись в разработках Национального Ядерного Центра Великобритании UKAEA.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения (глава 1), четырех предметных глав (главы 2-5), заключения и списка литературы.

Основные результаты диссертации. Научные результаты, полученные в диссертации, четко делятся на теоретические и прикладные. В диссертации впервые получены следующие основные **теоретические результаты:**

1. Исследованы математические свойства задач МГД равновесия в токамаке и стеллараторе, доказан ряд теорем относительно существования и единственности решения задач равновесия, а также в возможных типах структур магнитных поверхностей. Разработаны численные коды для расчета МГД равновесия в установках Токамак и Стелларатор, обладающие рядом уникальных свойств, полученных благодаря оригинальным вариантам постановок задач равновесия, лежащим в основе данных кодов [6A, 7A, 24A, 27A].
2. Для расчета МГД равновесных состояний с магнитными островами разработан метод, основанный на применении неоднозначных потоковых координат с меняющейся топологией поверхностей уровня (базовых координат) [8A, 13A, 14A].

3. Доказан ряд теорем о математических свойствах модели развития и подавления вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке, включая анализ модели нелинейной обратной связи [32А].

Помимо теоретических результатов, с помощью разработанных автором кодов решены также важные **прикладные задачи:**

4. Коды, разработанные автором для расчета МГД равновесия и вертикальной неустойчивости плазмы, доведены до уровня стандартных программ и выложены в открытом доступе [24А, 27А, 29А, 33А].
5. Рассчитаны МГД равновесные состояния плазмы в нескольких установках стелларатор, в том числе в российском Л-2 [7А, 9А-12А].
6. Проведена экспертиза проекта токамака Т-15М, Россия [15А-20А, 22А].
7. Проведена оптимизация системы катушек магнитного поля для проекта крупной установки CTF, Великобритания – источника термоядерных нейтронов [26А].
8. Проведен анализ дивертора в российском проекте термоядерного источника нейтронов – токамаке ТИН-СТ [31А].
9. Проведены уточняющие расчеты базового сценария разряда на токамаке КТМ, Казахстан, который в настоящее время построен и вводится в эксплуатацию [28А, 30А].

Все результаты диссертации опубликованы в изданиях, входящих в Перечень ВАК (33 печатные работы), а также докладывались на 17 международных конференциях.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава является вводной. В **§1** приводится обзор, написанный автором диссертации на основании анализа примерно 30 работ (ссылки даны в диссертации). По оценке автора, современное состояние проблемы УТС характеризует одна фраза – «половина пути». С одной стороны, достигнутые успехи позволяют надеяться, что со временем человечество обретет новый, практически неисчерпаемый, к тому же экологически чистый, источник энергии. Наиболее убедительным доказательством тому явилась установка JET, [20С] (объединенная Европа), в экспериментах на которой энергия синтеза впервые сравнялась с энергозатратами. С другой стороны, проблема УТС оказалась, пожалуй, сложнейшей из всех технических проблем, с которыми столкнулась современная цивилизация. Хотя исследования идут уже 60 лет, в ближайшей (10-15 лет) перспективе термоядерных электростанций не будет. Скорее всего, в указанный срок вступит в строй физический реактор ITER [18С-19С], который строится на юге Франции

(Кадараш). Кроме того, следует ожидать рекордных параметров плазмы в экспериментах на наиболее опасных конкурентах токамаков – стеллараторах (LHD в Японии и WVIIX в Германии, [21C-23C]).

Предполагается, что после ITER от термоядерной электростанции нас отделяет два поколения установок. Сейчас уже ведется проработка проектов поколения токамаков, которые вступят в строй вслед за ITER. Речь идет о нейтронных источниках – достаточно больших машинах, которые будут работать в термоядерных режимах, вследствие чего на них можно будет отрабатывать технологии ядерного синтеза. Примерами таких установок являются токамаки CTF (Великобритания) и ТИН-СТ (Россия), в проработке проектов которых принимал участие автор. Помимо крупных машин, в рамках национальных программ будут строиться также и малые, назначение которых обычно состоит в поддержке более крупных проектов. В качестве примеров приведем токамаки КТМ (Казахстан) и Т-15М (Россия).

Экспериментальный материал, полученный в ходе работ на ITER, нейтронных источниках, и вспомогательных установках даст обоснование проекту демонстрационного реактора DEMO, который, как представляется сейчас, будет последним этапом на пути к термоядерным электростанциям. Однако это произойдет, по оценке экспертов, не раньше, чем через 40-60 лет. Так как математическое моделирование процессов в токамаках и стеллараторах достигло очень высокого уровня, и к тому же на несколько порядков дешевле реального строительства, то каждой новой «живой» установке будет предшествовать ее виртуальные прототипы. Таким образом, важнейшим (после натурного эксперимента) инструментом, применяемым для решения проблемы УТС, будет математическое моделирование.

В **§ 2** обсуждается актуальность темы диссертации, новизна и уровень ее результатов, а также ее теоретическая и практическая значимость. В **§ 3** сформулированы основные результаты диссертации.

Вторая глава посвящена математическому моделированию МГД равновесия плазмы. В **§§ 1-5** приводится обзор современного состояния проблемы МГД равновесия плазмы [23A, 25A], рассматриваются различные постановки задач и известные из литературы их математические свойства. Более подробно, в **§1** рассматриваются общие уравнения МГД равновесия и следствия из них, в **§2** рассмотрено уравнение Грэда-Шафранова [1C-4C] и постановки задач, связанных с ним. В **§ 3** рассматриваются двумерные уравнения МГД равновесия, полученные из трехмерных путем усреднения. В частности, рассматривается модель Грина-Джонсона и Коврижных-Щепетова [5C-6C], построенная для описания МГД равновесия плазмы в стеллараторе. Обзор основных работ, посвященных моделированию эволюции равновесия, приведен в **§ 4,** [3C, 7C, 16C-17C]. Наконец, в **§ 5** приведены известные из литературы математические свойства моделей МГД равновесия [8C-12C].

В **§6** приводится ряд авторских теорем [6A] о свойствах моделей МГД равновесия. Сначала рассматривается постановка задачи МГД равновесия плазмы в токамаке внутри проводящего кожуха Ω с границей $\partial\Omega$ как краевой задачи для известного уравнения Грэда-Шафранова [1C-4C]:

$$-\frac{1}{r}\Delta^*\psi = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = j_\varphi(r,\psi) = \lambda f(r,\psi),\ \ (r,z)\in\Omega \qquad (2.1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2.2)$$

Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты с осью z, направленной вдоль главной оси тора; **Ω** – сечение плазменного шнура плоскостью $\varphi = const$, $\partial\Omega$ – граница области **Ω**, $2\pi\psi(r,z)$ – магнитный поток; $j_\varphi(r,\psi)$ – плоскость тока. В дальнейшем правую часть (1) будем обозначать $\lambda f(r, \psi)$, $\lambda > 0$ – параметр. Множество значений λ, при которых существуют классические, положительные решения задачи (2.1) - (2.2), назовем спектром. Для токамака типичным является случай, когда $f(r, \psi) \geq 0$. Пусть функция $f(r, \psi)$ в правой части уравнения (2.1) удовлетворяет условиям:

$$f(r,0)\equiv 0; f(r,\psi)>0; f'_\psi(r,\psi)>0; f''_{\psi\psi}(r,\psi)<0 \text{ при } \psi>0; \qquad (2.3)$$

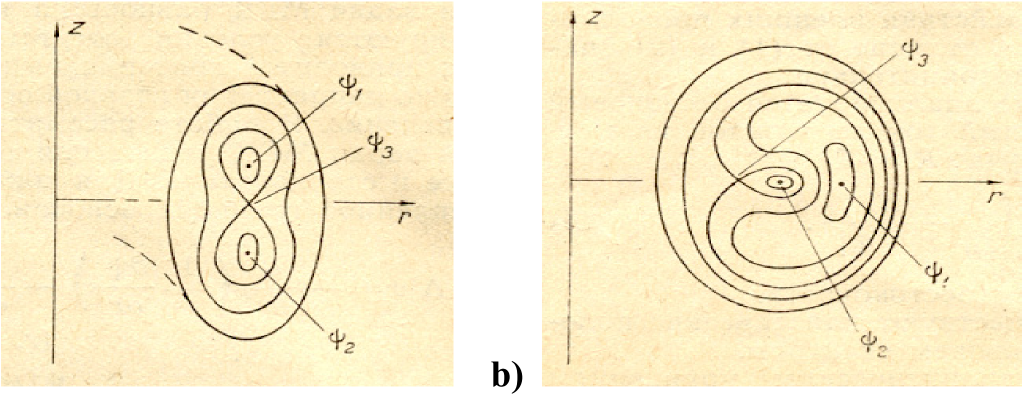
$$f(r,\psi)\in C^{2,\alpha}(\Omega\times R^+). \qquad (2.4)$$

Из литературы ([8C-12C], обзоры [23A], [25A]) известно, что при условиях (2.3)-(2.4) спектр задачи не является пустым, и состоит из множества $0<\lambda<\lambda^*$, где λ^*, в зависимости от дополнительных свойств функции f, может принимать как конечное, так и бесконечное значение. Кроме того, известно, что при данных условиях решение задачи (2.1)-(2.2) при каждом значении λ из спектра единственно. Менее изучен вопрос о структуре линий уровня $\psi = const$, их выпуклости, а также о числе и расположении критических точек, в которых $\nabla\psi = 0$. Автором доказана

Теорема 1. *Пусть функции f (r, ψ) удовлетворяют условиям (2.3), (2.4). Пусть, далее, область Ω симметрична по z и ее граница $\partial\Omega$ является гладкой и выпуклой относительно z-направления. Тогда:*

1) линии уровня решения задачи (2.1)-(2.2) $\psi(r, z) = const$ также является выпуклыми по z;

2) решение задачи (2.1)-(2.2) не может иметь критических точек, расположенных вне оси симметрии $z = 0$.



a) **b)**

Рисунок 1. Конфигурации с магнитными островами типа:
a) «дублет» с двумя максимумами ψ_1 и ψ_2 и седловой точкой ψ_3;
b) «петелька» с максимумом ψ_1, максимумом ψ_2 и седловой точкой ψ_3.

Теорема 1 имеет четкую физическую интерпретацию. Конфигурация типа «дублет» (**рис. 1,a**) одно время считалась весьма перспективной для создания хороших параметров плазмы в установках токамак, существовала даже установка «Дублет», в которой безуспешно пытались воспроизвести «восьмерочную» структуру магнитных поверхностей. Из теоремы 1 следует, что при зависимостях профиля тока f (2.3)-(2.4) это невозможно сделать в принципе (вторая конфигурация типа «петелька», **рис. 1,b**, согласно данной теореме, при условиях (2.3)-(2.4), также невозможна).

Остальные три теоремы касаются свойств решений задачи МГД равновесия в стеллараторе, полученной на основе двумерной усредненной модели Грина-Джонсона и Коврижных-Щепетова [5С-6С]:

$$-\frac{1}{r}\Delta^*\psi = j_\varphi(r,\psi) + g(r,z)/r = \lambda\left(r - \frac{\hat{R}^2}{r}\right)f(\psi) + g(r,z)/r \tag{2.5}$$

$$\psi\,\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.6}$$

В упрощенном варианте постановки задачи (2.5)-(2.6) символом $\hat{R} = const$ обозначена r-координата геометрического центра плазменного шнура. Таким образом, правая часть в уравнении (2.5), в отличие от правой части (2.1), меняет знак. Этот случай не был предусмотрен в имевшейся литературе, и поэтому изучение математических свойств задачи (2.5)-(2.6) следует начинать с доказательства существования и единственности решения.

Наложим на функцию $f(\psi)$ в задаче (2.5)-(2.6) следующие условия:

$$f(0) = 0;\;\; f(\psi) \in C^{1,\alpha}(R^+);\;\; 0 < k_1 \le f'(\psi) \le k_2,\;\; k_1, k_2 = const, \tag{2.7}$$

Далее, введем формулу $\eta(r)$ вида

$$\eta(r) = \begin{cases} (r - \hat{R}^2/r)\cdot k_2 \;\; при & r > \hat{R}^2/r, \\ (r - \hat{R}^2/r)\cdot k_1 \;\; при & r < \hat{R}^2/r \end{cases} \tag{2.8}$$

и рассмотрим следующую линейную задачу на собственные значения:

$$-\frac{1}{r}\Delta^{*}u = \mu\eta(r)u, \quad (r,z)\in\Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.9}$$

Задача (2.9) имеет как положительные, так и отрицательные собственные значения [11С]. Обозначим минимальное, положительное собственное значение задачи (2.9) как $\mu_1(\eta,\Omega)$. Справедлива доказанная диссертантом

Теорема 2. *Пусть функция $f(\psi)$ в уравнении (2.5) удовлетворяют условиям (2.7) и пусть $g(r, z)\geq g_0=$ const > 0. Тогда для всех $0 < \lambda < \mu_1(\eta,\Omega)$ задача (2.5)-(2.6) имеет, и притом единственное, положительное решение.*

Анализ структур магнитных поверхностей в стеллараторе еще более важен, чем в токамаке. Дело в том, что геометрия магнитных поверхностей в стеллараторе в значительной степени определяется геометрией магнитных полей, создаваемых внешними проводниками. Структура последних может носить островной характер. Автором доказан своего рода аналог теоремы 1:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть, кроме того, область Ω симметрична по z, ее граница $\partial\Omega$ является гладкой, выпуклой относительно z-направления и $g(r, z,) = g_0 = const > 0$. Тогда:*

1) *при всех $0 < \lambda < \mu_1(\eta, \Omega)$ линии уровня $\psi(r, z) = const$ решений задачи (2.5)-(2.6) выпуклы по z;*
2) *критические точки решения могут находиться только на оси z=0.*

С физической точки зрения условие $\hat{R} = const$ является упрощением. Более интересен случай так называемого бестокового стелларатора, для модели которого суммарный ток по каждой из магнитных поверхностей равен нулю. В этом случае величина $\hat{R}$ не является постоянной и определяется в каждой точке формулой:

$$\hat{R}^2 = \hat{R}^2(\psi) = \frac{\int\limits_{\psi=const} \frac{rdl}{|\nabla\psi|}}{\int\limits_{\psi=const} \frac{dl}{r|\nabla\psi|}}, \tag{2.10}$$

и уравнение (2.5) становится интегро-дифференциальным.

Структура магнитных поверхностей типа «петелька», изображенная на **рис. 1,b**, считается весьма перспективной, так как в результате исследований оказалось, что она сохраняет устойчивость при больших величинах газокинетического давления внутри плазмы. Автором диссертации доказана теорема, из которой следует, что при условиях (2.10) такая структура невозможна и для ее существования нужны специальные условия.

Теорема 4. *Решение задачи (2.5)-(2.6) при условии (2.10) не может обладать локальным внутренним минимумом, окруженным локальной структурой гладких или кусочно-гладких вложенных поверхностей при условии* g(*r, z*) > 0, $g \in C^{0,\alpha}(\Omega),\ \ f \in C^{0,\alpha}(R^{+}).$ #

Оставшаяся часть главы 2 посвящена численному моделированию МГД равновесия. В **§7** приводится обзор численных методов решения задач МГД равновесия. В **§8** описываются разработанный автором код TOKAMEQ (TOKAMak Equilibrium) для расчета МГД равновесия плазмы в токамаке [24А, 27А]. Постановка задачи основана на уравнении Грэда-Шафранова, с дополнительными условиями на бесконечности и на главной оси тора:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r}\Delta^{*}\psi = \gamma \cdot \begin{cases} j_{\varphi}(\psi, r) & \text{при } \psi > \psi_{p} \text{ (внутри плазмы)} \\ \sum_{k=1}^{N} I_{k}\delta(r - r_{k}, z - z_{k}), & \text{при } \psi < \psi_{p} \text{ (вне плазмы)}, \end{cases} \\ \psi(0, z) = 0, \\ \lim\limits_{r,z \to \infty} \psi(r, z) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Здесь γ – размерный множитель, r_k, z_k, I_k – координаты внешних проводников с током и величины токов, ψ_p – значение магнитного потока на границе плазмы. Сама граница плазмы изначально неизвестна и находится в процессе вычислений. Функциональная зависимость $j_{\varphi}(\psi, r)$ задается либо в виде аналитической формулы, либо таблично.

Постановка задачи (2.11) при известных величинах внешних токов I_k соответствует **прямой задаче**. Помимо прямой, возникает еще и **обратная задача:** найти величины внешних токов (иногда еще и их положение), формирующих МГД равновесие с наперед заданной формой плазменного шнура. Обратная задача обычно некорректна, что влечет необходимость применения метода регуляризации. Помимо прямой и обратной задачи, есть еще один вариант постановки, придуманный диссертантом и лежащий в основе численного метода кода TOKAMEQ. Поясним его суть. В большинстве случаев требование абсолютного равенства границы сечения плазмы заданному заранее контуру излишне. На практике возникают более мягкие ограничения: чтобы плазма не касалась стенок камеры, чтобы координаты центра шнура, диаметр его сечения и эллиптичность лежали в заданных пределах, и так далее. Рассмотрим последовательность геометрических характеристик плазмы: координаты центра шнура, диаметр его сечения, эллиптичность, треугольность и т. д., выберем те из них, которые на данный момент являются важнейшими (на взгляд физика или инженера), и зафиксируем их значения. Величины внешних токов, текущих по тем из проводников, которые управляют зафиксированными параметрами, будем считать неизвестными, а величины остальных токов – заданными. В результате получаем **квазиобратную задачу (полу обратную),** сочетающую в себе элементы прямой и обратной задач. При физически грамотном выборе управляющих проводников квазиобратная задача оказывается корректной. Другими ее достоинствами постановки являются чрезвычайная гибкость и возможность эффективной адаптации к практическим расчетам.

Численный код TOKAMEQ обладает:

1. Высокими скоростными характеристиками (время расчета типичного варианта равновесия на стандартной ПЭВМ составляет 2-5 секунд);
2. Высокоэффективным текстово-графическим редактором данных, позволяющим вести проектирование установки и интерпретацию эксперимента в интерактивном режиме;
3. Встроенными средствами визуализации;
4. Удобным интерфейсом пользователя;
5. Средствами обмена информации с другими кодами;
6. Средствами самодокументации (помощь и встроенные описания кода и инструкции по его эксплуатации).
7. Средствами поддержки диалога на русском и английском языках.

Код неоднократно применялся для разработки проектов установок токамак и для интерпретации результатов эксперимента [1А-3А, 15А-20А, 22А, 26А, 28А, 30А-31А, 34А-35А, 42А-46А, 50А]. Данный код внедрен в РНЦ «Курчатовский Институт», НЯЦ РК (Казахстан), и применялся в разработках Национального Ядерного Центра Великобритании.

Численный метод, реализованный в коде, основан на вложенном тройном итерационном цикле, с обратными связями на величины управляющих токов, реализованными по методу хорд.

В **§9** дано описание кода STELLEQ (STELLarator EQuilibrium) для расчета МГД равновесия в стеллараторе. Код STELLEQ основан на численном решении двумерных усредненных уравнений Грина-Джонсона и Коврижных-Щепетова [5С- 6С]. Наличие трехмерных кодов (VMEQ, [14С]), казалось бы, делает проблематичным его право на существование. Однако существует широкая область параметров установок, для которой результаты двумерных усредненных расчетов и трехмерных расчетов практически не различаются [15С]. Еще одним аргументом в пользу двумерных усредненных кодов является скорость вычислений.

Задача МГД равновесия ставится в предположении, что существует область Ω_c, не содержащая в себе внешних проводников, и такая, что область плазмы Ω_p лежит внутри нее. Суммарный усредненный магнитный поток $\psi(r,z)$ ищется в виде суммы

$$\psi = \psi_{pl} + \psi^{*} + \psi_{ext}, \qquad (2.12)$$

где ψ^* – усредненный магнитный поток, создаваемый внешними винтовыми проводниками, ψ_{pl} – поток, создаваемый плазмой, ψ_{ext} – поток от кольцевых проводников. Внутри области Ω_p решается задача

$$-\Delta^*(\psi-\psi^*)=\begin{cases} f(r,\psi-\psi_p) \quad \text{при} \quad \psi>\psi_p \ (\text{внутри плазмы}); \\ 0, \quad \text{при} \quad \psi<\psi_p \ (\text{вне плазмы}), \end{cases} \tag{2.13}$$

причем граница плазмы $\partial\Omega_p$ заранее неизвестна и определяется в ходе вычислений.

Подчеркнем, что автор диссертации ни в коей мере не претендует на применяемую в коде STELLEQ модель усредненных уравнений. Автору принадлежит разработка алгоритма решения задачи и численного метода, в основе которого лежит алгоритм вложенного итерационного типа. Каждая внешняя j-я итерация состоит из следующих процедур:

1) Построение границы счетной области – контура C^j, при помощи решения уравнения:

$$\psi=\psi_{pl}^j+\psi^*+\psi_{ext}=\psi_c<\psi_p \tag{2.14}$$

2) Решение уравнения равновесия (2.13) при краевом условии первого рода

$$\psi\Big|_{C^j}=\psi_c \tag{2.15}$$

Краевая задача (2.13), (2.15) является нелинейной, и поэтому также решается при помощи итераций (внутренний цикл.) Для ее решения применяется известный метод обращенных квазиполярных потоковых координат [13C, 24C], адаптированный автором диссертации к решению уравнения (2.13).

С помощью кода STELLEQ был получен ряд важных результатов [7A, 9A-12A], которые потом подтвердились с помощью трехмерных кодов.

В третьей главе приведена разработанная автором диссертации теория координат с изменяющейся топологией поверхностей уровня (базовых координат) и описывается их применение к расчету МГД равновесия с магнитными островами [8A,13A-14A].

В **§ 1** излагается суть проблемы. При МГД равновесии плазмы силовые линии магнитного поля наматываются на поверхности равного давления *p=const*, т.е. изобарические поверхности совпадают с магнитными. В результате для наиболее точного описания плазмы необходимо использовать потоковые координаты [13C, 24C], в которых одной из независимых переменных является метка магнитной поверхности *a=const*. Практически все до сих пор известные варианты такого подхода основаны на предположении о вложенности магнитных поверхностей, что резко сужает класс решаемых задач.

Автором предложен принципиально новый подход. В его основе лежит концепция базовых координат, представляющих собой совокупность двух взаимосвязанных координатных систем: однозначных эйлеровых, и, вообще говоря, неоднозначных потоковых. Возможность выбора в любой момент вычислений наиболее удобной из этих двух систем координат (принцип двойственности) составляет одну из главных идей метода.

Схема метода базовых координат состоит в следующем (**рис. 3.1**). Прежде всего в базовой области Ω_b (в двумерном случае это круг, в трехмерном – цилиндр с отождествленными концами) строится семейство базовых координат, топология поверхностей уровня которых $a=const$ зависит от параметра $\boldsymbol{\tau}$, и, предположительно, при некоторых значениях $\boldsymbol{\tau}$ совпадает с топологией магнитных поверхностей в плазме. Далее, МГД равновесие ищется как невырожденное и обладающее достаточной степенью гладкости отображение Φ базовой области Ω_b на область плазменного шнура Ω_p. Отображение Φ ищется из условия минимума функционала L, уравнением Эйлера для которого являются уравнения МГД равновесия. Постановка задачи имеет вид:

$$\min L(\psi),\ \ при\ \ \psi(a) \in G,\ \ \Phi \in K,\ \ \boldsymbol{\tau} \in P. \qquad (3.1)$$

Здесь $\psi(a)$ – функция, связывающая значение магнитного потока ψ, протекающего через магнитную поверхность со значением ее метки a, символами $K,\ P$ обозначен класс, к которому принадлежит отображение Φ и множество значений топологических параметров. Таким образом, метод базовых координат, по сравнению с методом обращения переменных [13С, 24С], имеет то существенное преимущество, что позволяет в потоковых переменных рассчитывать магнитные острова. Помимо преимуществ, метод имеет тот недостаток, что он способен воспроизводить лишь ту топологию магнитных поверхностей, которая заложена в базовых координатах.

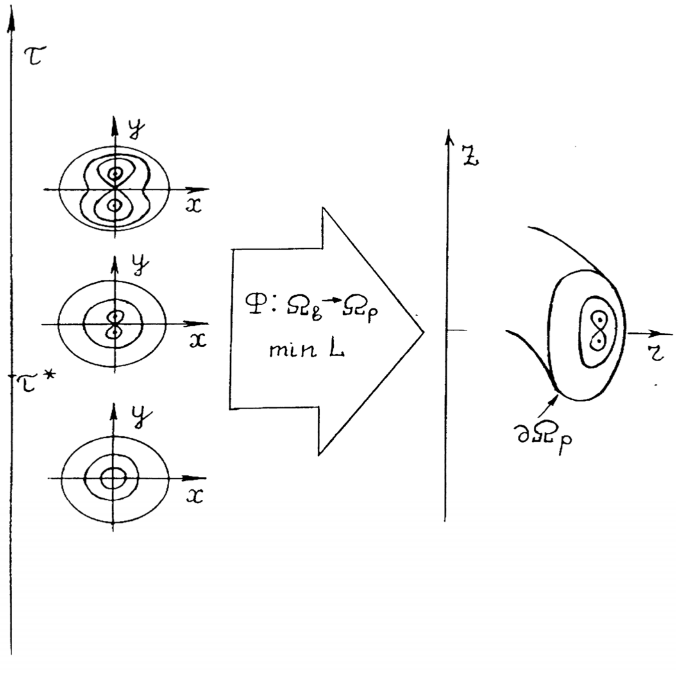


Рис. 3.1. Схема метода базовых координат в двумерном случае. Значению параметра $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^*$ соответствует смена топологии линий уровня.

В **§2** обсуждается концепция двумерных базовых координат. В двумерном случае базовые координаты задаются внутри единичного круга Ω_b с центром в точке $(0,0)$ при помощи базового уравнения:

$$T(a,\rho,\varphi,\boldsymbol{\tau}) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь (ρ,φ) – полярные координаты, $a_{\min} \le 0 \le a \le 1 \le a_{\max}$ (линии $a = const$ являются прообразами линий $\psi = const$), $\boldsymbol{\tau}$ – топологический параметр (может быть вектор). Разным значениям $\boldsymbol{\tau}$ могут соответствовать разные топологии линий уровня $a = const$. Потребуем, чтобы выполнялось условие разрешимости уравнения (3.2) относительно a, и чтобы линия $a = 1$ совпадала с границей круга Ω_b:

$$T'_a(a,\rho,\varphi,\boldsymbol{\tau}) \ne 0; \tag{3.3}$$

$$T(1,1,\varphi,\boldsymbol{\tau}) = 0. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.2) при условии (3.3) однозначно разрешимо относительно a, и, вообще говоря, неоднозначно, относительно ρ (принцип двойственности):

$$a = a(\rho,\varphi,\boldsymbol{\tau}); \;\; \rho = \rho_i(a,\varphi,\boldsymbol{\tau}), i = 1,2,...,N. \tag{3.5}$$

Двойственность базовых координат позволяет в любой момент вычислений выбрать наиболее удобные переменные. Это обеспечивает преимущества базовых координат по сравнению, как с эйлеровыми, так и с потоковыми координатами, взятыми по отдельности.

В **§3** приведены несколько систем базовых координат, интересных с точки зрения приложений. В качестве примера рассмотрим одну из них:

$$a(\rho,\varphi,\tau_1,\tau_2) = (1-\tau_1-\tau_2\cos 2\varphi)\rho^4 + (\tau_1+\tau_2\cos 2\varphi)\rho^2 \tag{3.6}$$

Линии уровня $a = const$ для семейства координат (3.6) в зависимости от параметров τ_1, τ_2 приведены на **рис. 3.2.**

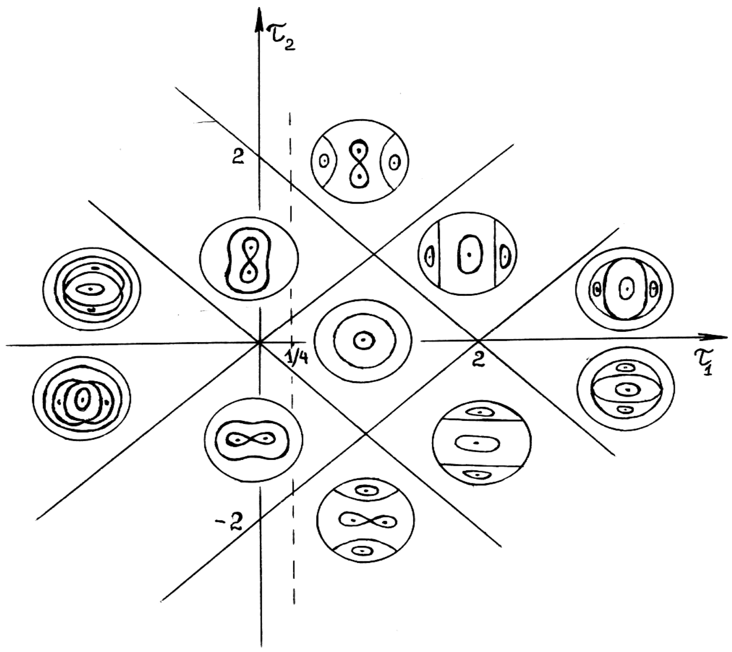


Рис. 3.2. Структура линий уровня *a* = *const* для семейства координат (3.6).

В **§4** проводится анализ схем вычислений в обращенных переменных. Поясним суть проблемы. Например, расчет криволинейных интегралов вида (2.10) от произвольной непрерывной функции $H(\rho,\varphi)$ вдоль линии $a=const$ (а также аналогичных интегралов) требует либо интерполяции в переменных (ρ,φ), либо обращения переменных, в результате чего получается следующая формальная схема интегрирования:

$$\int\limits_{a=const} \frac{H(\rho,\varphi)}{|\nabla a|} dl = \sum_{i=1}^{N(a)} \int\limits_{D_i(a)} H(\rho_i(a,\varphi),\varphi) J_i(a,\varphi)\rho_i(a,\varphi) d\varphi \qquad (3.7)$$

где $N(a)$ − число ветвей функции ρ по направлению $a=const$, $D_i(a)$ − область изменения угла φ для i−й ветви функции ρ вдоль контура $a=const$, $J_i(a,\varphi)$ − якобиан перехода от прямых к обращенным переменным:

$$J = J_i = \frac{D(\rho_i,\varphi)}{D(a,\varphi)} = \begin{vmatrix} \partial\rho_i(a,\varphi)/\partial a & \partial\rho_i(a,\varphi)/\partial\varphi \\ \partial\varphi(a,\varphi)/\partial a & \partial\varphi(a,\varphi)/\partial\varphi \end{vmatrix} = \partial\rho_i(a,\varphi)/\partial a\,. \qquad (3.8)$$

Здесь индекс i указывает на возможность неоднозначности. Вследствие обращения в особых точках функции $a(\rho,\varphi)$ якобиана перехода (3.8) в бесконечность возникает вопрос о сходимости интегралов типа (3.7) и аналогичных ему схем интегрирования (сходимость доказывается в **§4)**.

Вариационные формулировки задач МГД равновесия рассматриваются в **§5.** Показано, что решение краевой задачи для уравнения МГД равновесия плазмы в токамаке

$$-\frac{1}{r}\Delta^*\psi = -\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = \lambda F_\psi(r,\psi) = \lambda f(r,\psi),\ (r,z)\in\Omega_\rho, \qquad (3.9)$$

$$\psi|\partial\Omega_\rho = 0$$

является экстремалью функционала

$$L = L(\psi) = \iint\limits_{\Omega_p} \left[\frac{1}{r}(\nabla\psi)^2 - 2\lambda F(r,\psi)\right] drdz\,, \qquad (3.10)$$

причем, в случае выполнения условий (2.3), решение задачи (3.9) реализуется на строгом минимуме функционала L (3.10). Аналогично строится функционал, соответствующей краевой задаче (2.5)-(2.6).

Численный метод построения Ф отображения базовой области на область плазменного шнура обсуждается в **§6**. Сначала рассматривается **наиболее простой случай**, когда сечение плазмы Ω_p представляет собой единичный круг на плоскости (r,z) с центром в точке $(R_0,0)$, где $R_0>1$. В области Ω_p вводится система квазиполярных координат (h,θ):

$$r = R_0 + b(h) + h\cos\theta,\ \ z = h\sin\theta;\ -\pi \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le h \le 1,\ \ b(1) = 0. \qquad (3.11)$$

Линии *h=const* представляют собой окружности радиуса *h,* функция $b(h)$ описывает смещение их центра, переменная θ является аналогом полярного угла. Условие $b(1) = 0$ означает, что линия уровня $h = 1$ совпадет с границей Ω_p. Условие взаимной однозначности перехода (3.11) принимает вид:

$$D = \frac{D(r,z)}{D(h,\theta)} = h \cdot (1 + b'(h)\cos\theta) > 0\,. \qquad (3.12)$$

Функции $h(\rho,\varphi)$ и $\theta(\rho,\varphi)$ раскладываются в тригонометрические ряды Фурье по переменной φ (для краткости выкладок рассмотрен случай, когда область Ω_p, равновесие, и, соответственно, базовые координаты симметричны по z)

$$h(\rho,\varphi) = h_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\rho)\cos(n\varphi);\quad \theta(\rho,\varphi) = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\rho)\sin(n\varphi); \quad (3.13)$$

В свою очередь, функции $h_n(\rho)$ и $\theta_n(\rho)$ раскладываются в степенные ряды. Показано, что условия гладкости на отображение Ф и принцип соответствия границ приводят к тому, что эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned}
&h_0(\rho) = \rho + h_{0,1}\cdot\left(\rho - \rho^3\right) + h_{0,2}\cdot\left(\rho^3 - \rho^5\right) + \ldots;\\
&h_{2m}(\rho) = h_{2m,1}\cdot\left(\rho - \rho^3\right) + h_{2m,2}\cdot\left(\rho^3 - \rho^5\right) + \ldots;\\
&h_{2m+1}(\rho) = h_{2m+1,1}\cdot\left(\rho^2 - \rho^4\right) + h_{2m+1,2}\cdot\left(\rho^4 - \rho^6\right) + \ldots;\\
&\theta_{2m}(\rho) = \theta_{2m,1} + \theta_{2m,2}\rho^2 + \theta_{2m,3}\rho^4 + \ldots;\\
&\theta_{2m+1}(\rho) = \theta_{2m+1,1}\cdot\rho + \theta_{2m+1,2}\rho^3 + \theta_{2m+1,3}\rho^5 + \ldots.;\\
&b(h) = b_0\cdot\left(1 - h^2\right) + b_2\cdot h^2\left(1 - h^2\right) + b_2\cdot h^4\left(1 - h^2\right) + \ldots
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Зависимость $\psi(a)$ внутри i-го острова задавалась в виде:

$$\psi_i(a) = \psi_{i,0} + \psi_{i,1}\cdot\left(a - a_{i,0}\right) + \psi_{i,2}\cdot\left(a - a_{i,0}\right)^2 + \ldots \qquad (3.15)$$

Таким образом, отображение Ф определяется коэффициентами в рядах (3.14). В случае **некруглого сечения плазмы** построение Ф начинается с параметрического описания границы плазмы $\partial\Omega_p$ (ради краткости выкладок опять рассмотрен случай симметричных по z конфигураций):

$$r = R_0 + \hat\rho(\theta)\ \cos\theta;\ \ z = \hat\rho(\theta)\sin\theta,\quad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad (3.16)$$

Далее, вводится вспомогательная функция $s(h,\theta)$, определенная при $0 \le h \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$, и удовлетворяющая условиям

$$s(0,\theta) = 0;\ \ s(1,\theta) = \hat\rho(\theta);\ \ s(h,\theta + 2\pi) = s(h,\theta)\,. \qquad (3.17)$$

С помощью функции $s(h,\theta)$ задается связь между переменными (h,θ) и (r,z), с помощью формул:

$$r = R_0 + b(h) + s(h,\theta)\cos\theta; \quad z = s(h,\theta)\sin\theta. \tag{3.18}$$

Условием взаимной однозначности преобразования (3.18) является:

$$D = \frac{D(r,z)}{D(h,\theta)} = b'(h)\frac{\partial}{\partial\theta}[s(h,\theta)\sin\theta] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial h}[s^2(h,\theta)] > 0 \tag{3.19}$$

Линии уровня $h=const$ при условии (3.19) представляют собой семейства вложенных контуров, причем линия $h=1$ совпадает с границей сечения плазмы $a = 1$ (подчеркнем, что другие линии $h=const$ и $a=const$ не совпадают). Смещение центра координат (h,θ) равно $b(0)$. Линии θ = const представляют собой семейство криволинейных квазиполярных лучей. Общая структура координатных линий (h,θ) показана на **рис. 3.3**.

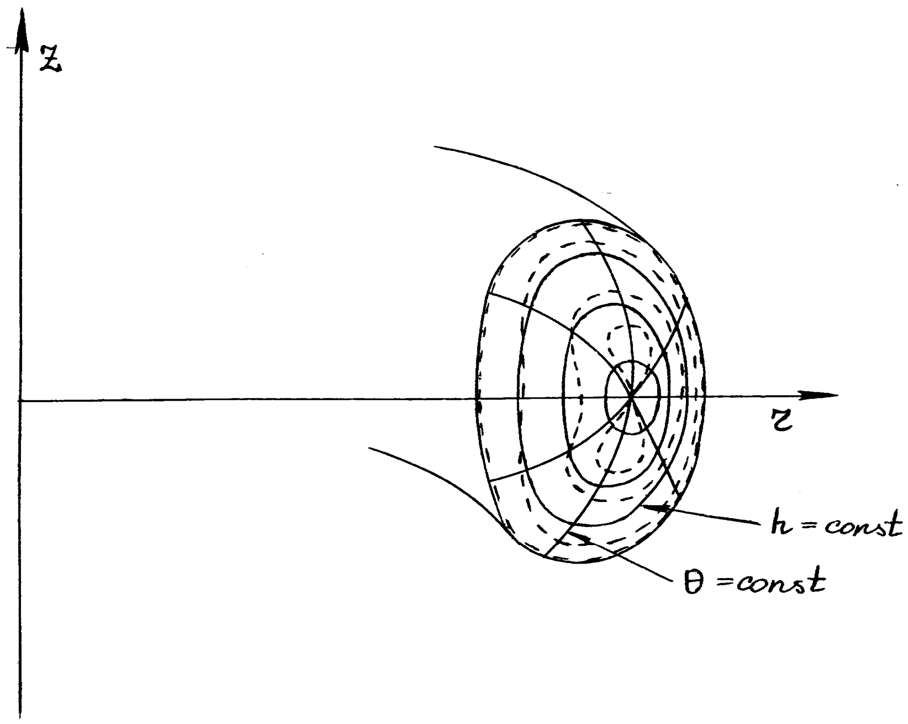


Рис.3.3. Система координат (h,θ) для некруглого сечения плазменного шнура. Пунктиром изображены сечения линий уровня магнитного потока ψ = const.

Построение отображения Ф завершается разложением функций $h(\rho,\varphi)$ и $\theta(\rho,\varphi)$ в ряды, аналогичные рядам (3.14).

Численный метод решения двумерных задач МГД равновесия подробно описан в **§ 7**. Вкратце его можно изложить следующим образом. Сначала функционал L записывается в базовых координатах, отображенных на область Ω_p, причем ряды (3.14), (3.15) заменяются конечными суммами. Возникает задача минимизации L в пространстве коэффициентов. При минимизации L применяется комбинированный метод: на первом этапе – метод сопряженных градиентов, далее – метод Ньютона.

В **§8** демонстрируются примеры решений двумерной задачи МГД равновесия в стеллараторе (2.5)-(2.6). Опишем первую серию расчетов. При определенных условиях структура вакуумных поверхностей, созданных внешними винтовыми проводниками, реализуется в виде дублета («восьмерки»). Ясно, что первым тестом для метода базовых координат должно быть испытание, насколько хорошо они могут воспроизводить вакуумные поверхности. Обозначим N общую размерность пространства коэффициентов. Оказалось, что для расчета некоторых режимов работы стелларатора с «восьмерочной» структурой магнитных поверхностей требуется небольшое, N =10-12, гармоник. При этом структура внешних поверхностей неотличима от подстроенных базовых координат, а значение L_{min} воспроизводится с относительной погрешностью $\varepsilon \approx 10^{-6}$. Результаты расчетов приведены на **рис. 3.4**.

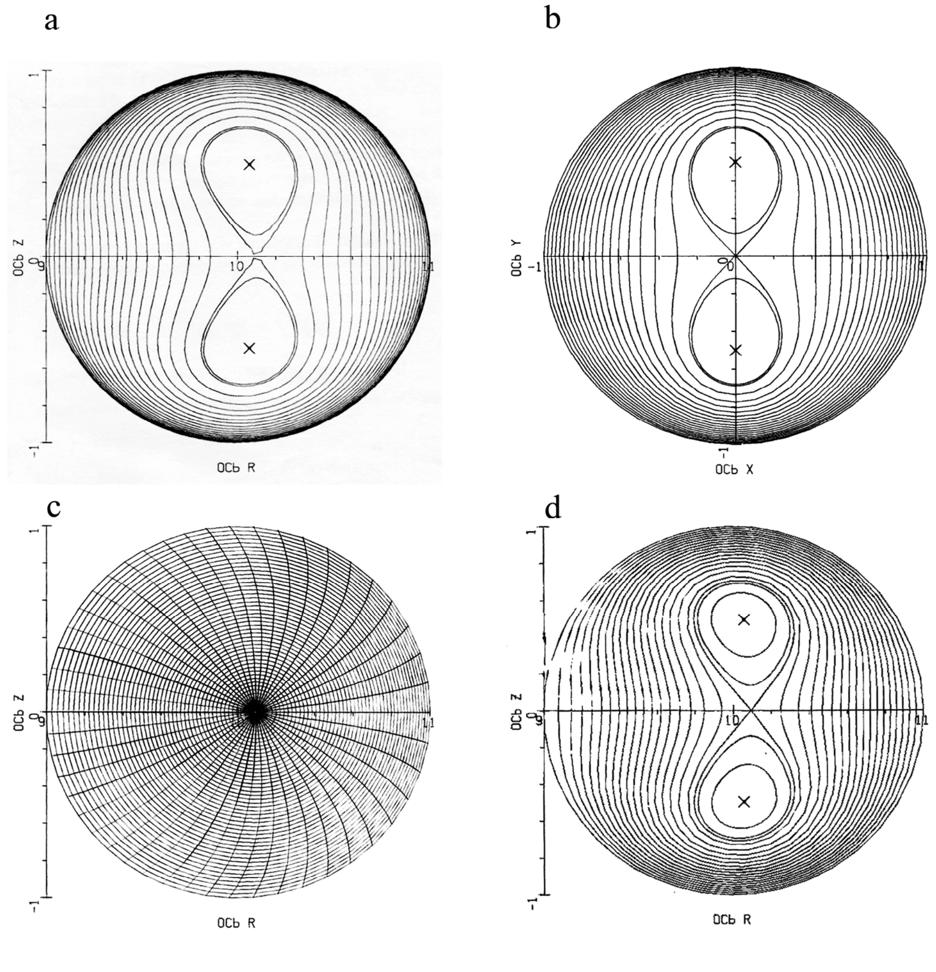


Рис. 3.4: a) вакуумные поверхности; **b)** исходное семейство базовых координат; **c)** образ полярной сетки (ρ,φ) после реализации отображения Ф; **d)** преобразованные базовые координаты.

Далее исследовался вопрос о возможности моделирования смены топологии магнитных поверхностей. Задачу (2.5)-(2.6) при упрощающем условии $\hat{R} = const$ можно решить с помощью эйлерова кода [5А]. На **рис. 3.5** показана серия равновесий для различных значений параметра β – отношения давления плазмы к давлению магнитного поля. Значению β = 0 (плазмы нет) соответствует дублетная структура магнитных поверхностей. Затем по мере роста давления плазмы магнитные острова исчезают. Смена топологии магнитных поверхностей происходит при β=3,6%.

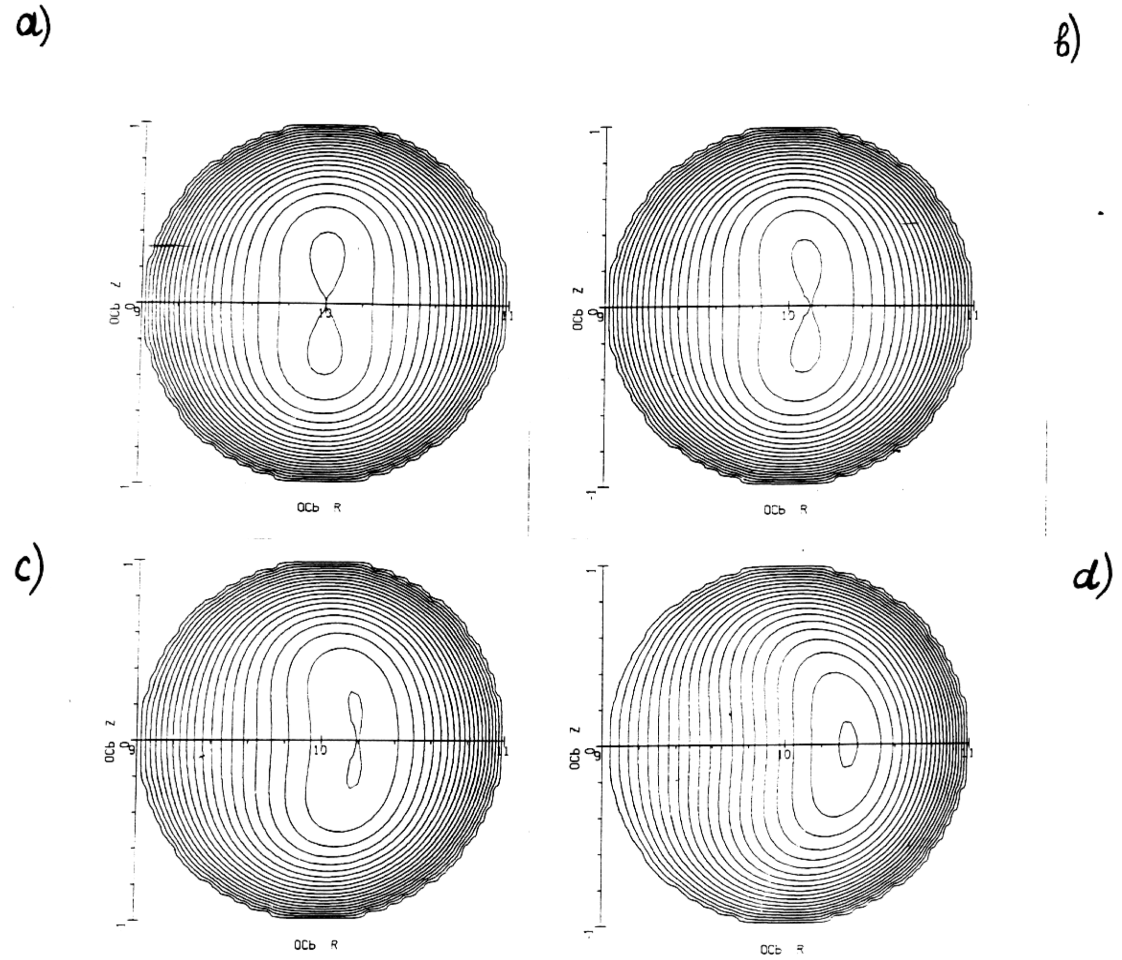


Рис. 3.5. Линии уровня $\psi = const$ для различных значений параметра β: *a*) $\beta = 0$ (плазмы нет); *b*) $\beta = 1{,}3\%$; *c*) $\beta = 2{,}65\%$; *d*) $\beta = 6{,}5\%$. При вычислениях использовался эйлеров код [5A].

Первая серия аналогичных расчетов по методу базовых координат проводилась при общем числе гармоник N = 24. Преобразованные базовые координаты, соответствующие данной серии, показаны на **рис. 3.6**. Видно, что при малых β, когда магнитные поверхности мало отличаются от вакуумных, либо, наоборот, когда β велико, и смена топологии уже произошла, соответствие хорошее (**рис. 3.5 *a*, *b*, *d*** и **3.6 *a*, *b*, *d***). Вблизи точки смены топологии различие между линиями ψ=*const* и преобразованными базовыми координатами уже заметно (**рис. 3.5 *c*** и **3.6 *c***). Очевидно, что для точного описания такого тонкого эффекта, как смена топологии, гармоник слишком мало. При N=31 мы вновь наблюдаем хорошее соответствие линий ψ=*const* и преобразованных базовых координат (**рис. 3.7 b** и **3.5 c**).

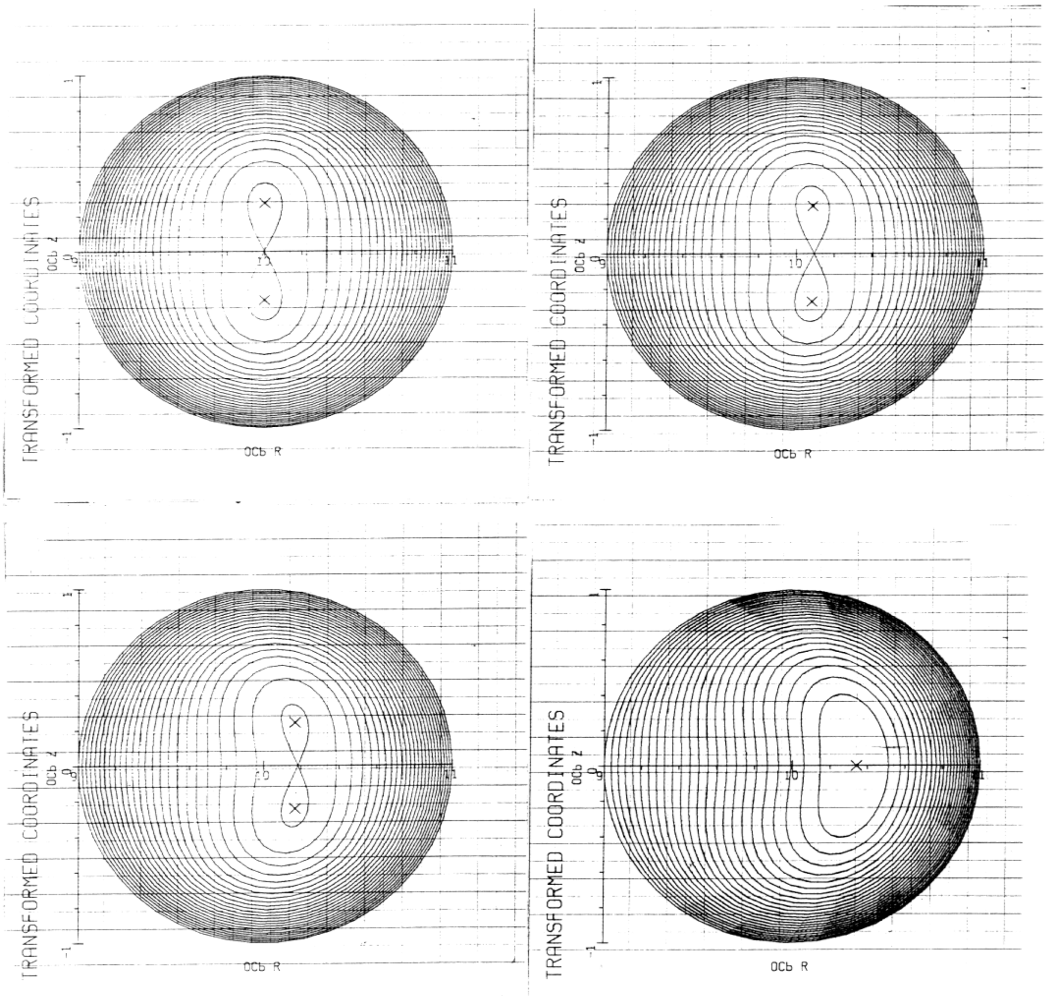


Рис. 3.6. Те же вычисления, проведенные с помощью метода базовых координат при общем числе гармоник N=24.

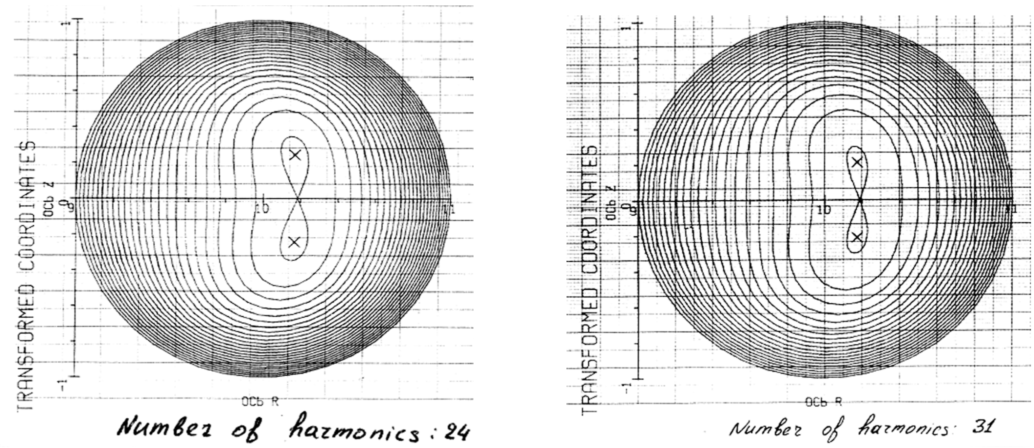


Рис 3.7. Эффект от увеличения числа гармоник N при β=2,65% (вблизи точки смены топологии): **a)** N = 24; **b)** N = 31.

Отметим, что при $\beta = 2{,}65$ % относительная разность величин L_{min} вычисленных при N=24 и N=31, составляет величину порядка $\varepsilon \approx 10^{-7}$, что говорит об очень высоких требованиях к точности вычислений. По существу это означает, что в пространстве нескольких десятков переменных требуется найти сильный минимум функции L, причем погрешность вычислений L должна быть, по крайней мере, на порядок меньше, то есть $\varepsilon \approx 10^{-8}$.

В **§9** проводится обобщение метода базовых координат на трехмерный случай. Топологическим прообразом плазменного тора в наших построениях является цилиндр с отождествленными (склеенными) концами. Условимся, что его радиус равен 1, длина равна 2π. Данный цилиндр назовем базовой областью и обозначим $\mathbf{\Omega}_b$. Прообразы магнитных поверхностей $a = const$ задаются уравнением:

$$T(a,\rho,\varphi,s,\boldsymbol{\tau}) = 0, \tag{3.20}$$

где (ρ,φ,s) – цилиндрические координаты, a – метка прообраза магнитной поверхности (потребуем, чтобы a менялась в пределах $a_{min} \le 0 \le a \le 1 \le a_{max}$), $\boldsymbol{\tau}$ – топологический параметр (может быть вектором). Различным значениям $\boldsymbol{\tau}$ могут соответствовать разные топологии поверхностей уровня a=$const$. Уравнение (3.20) назовем базовым уравнением.

Наложим на функцию T условие периодичности по s и φ:

$$T(a,\rho,\varphi,s+2\pi,\boldsymbol{\tau}) = T(a,\rho,\varphi,s,\boldsymbol{\tau});\quad T(a,\rho,\varphi+2\pi,s,\boldsymbol{\tau}) = T(a,\rho,\varphi,s,\boldsymbol{\tau}), \tag{3.21}$$

и потребуем разрешимости базового уравнения (3.20) относительно a и совпадения поверхности $a = 1$ с граничной поверхностью $\mathbf{\Omega}_b$:

$$\mathrm{T}_a(a,\rho,\varphi,s,\tau) \neq 0 \ \text{при}\ (\rho,\varphi,s) \in \Omega_b; \tag{3.22}$$

$$\mathrm{T}(1,1,\varphi,s,\tau) = 0 \tag{3.23}$$

Базовое уравнение (3.20) при условиях (3.22) – (3.23) разрешимо однозначно относительно a, и, вообще говоря, неоднозначно, относительно ρ:

$$a = a(\rho,\varphi,s,\tau); \tag{3.24}$$

$$\rho = \rho_i(a,\varphi,s,\tau), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{3.25}$$

Так же, как и в двумерном случае, МГД равновесие ищется, как невырожденное отображение Φ базовой области $\mathbf{\Omega}_b$ на область плазменного тора. Конструкция отображения Φ аналогична, с той разницей, что тригонометрические ряды Фурье строятся уже по двум переменным, φ и s. При численной реализации алгоритма ряды заменяются конечными суммами, их коэффициенты ищутся из условия минимума функционала L, уравнением Эйлера для что которого служит система трехмерных уравнений МГД равновесия. При минимизации L меняется также и $\boldsymbol{\tau}$, и тем самым определяется топология магнитных поверхностей.

Переход от расчетов двумерных конфигураций к расчету трехмерных удобно осуществлять через промежуточный этап – моделирование структур с винтовой симметрией, то есть зависящих $\omega = m\varphi\text{-}ns$, где m, n – натуральные числа. Причины этому следующие. С одной стороны, структуры с винтовой симметрией можно формально считать трехмерными. Поэтому при их моделировании можно подбирать различные системы базовых координат и отлаживать трехмерную методику построения преобразования Ф. С другой стороны, конфигурации с винтовой симметрией хорошо изучены, допускают двумерное описание, условия возникновения магнитных островов хорошо известны, и поэтому легко провести сравнение с имеющимися кодами.

Рассмотрим результаты демонстрационного расчета МГД равновесия с винтовой симметрией. Постановка задачи имела вид:

$$-\Delta_{\rho,\omega}\psi = \begin{cases} \lambda f(\psi) - 2, & \text{если } \psi > \psi_\rho \ \text{(внутри плазмы)} \\ -2, & \text{если } \psi < \psi_\rho \ \text{(вне плазмы)} \end{cases} \qquad (3.26)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3.27)$$

Здесь Ω - круг единичного радиуса, $f(\psi)$ – функция распределения тока по сечению шнура, ψ_ρ – значение винтового потока ψ на границе плазмы, λ – нормирующий множитель. Значения ψ_ρ и λ являются неизвестными и определяются из условия равенства площади сечения плазмы Ω_p заданной величине S_ρ и из условия равенства полного тока заданной величине J_ρ. Задача (3.26)-(3.27) решались по эйлерову коду, а также методом базовых координат, при общем числе неизвестных коэффициентов N =17. Для одного из вариантов расчета линии уровня ψ =*const* и преобразованные базовые координаты представлены на **рис. 3.8, *a*, *b***. Видно, что, несмотря на малое число гармоник, структуры магнитных полей практически неразличимы.

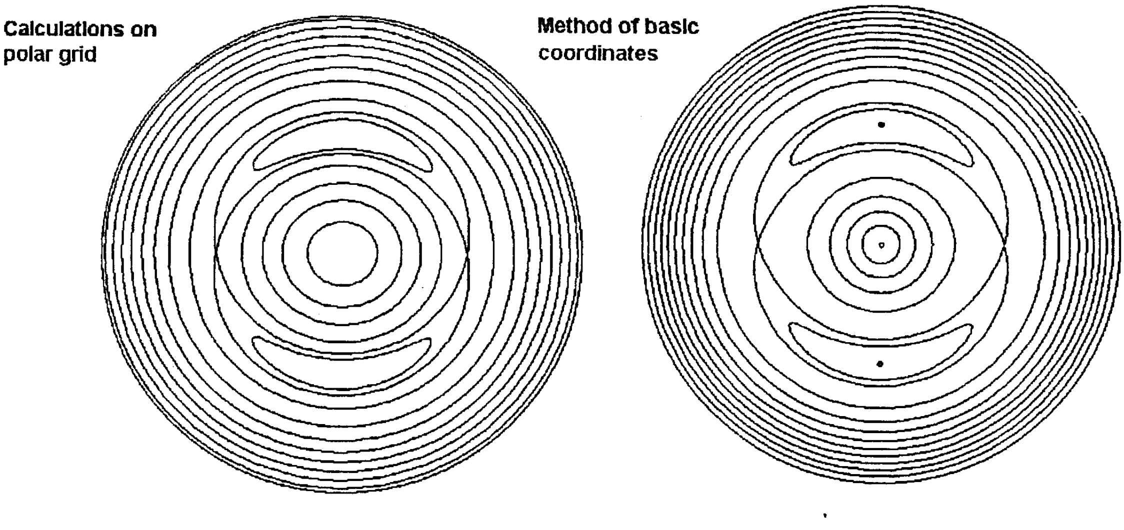


Рис.3.8. ***a*)** Решение задачи винтового равновесия (3.26)-(3.27) при помощи эйлерова кода [5A]; ***b*)** Решение той же задачи методом базовых координат.

Таким образом, проведенные вычисления показали применимость метода базовых координат для моделирования эволюционных процессов, сопровождающихся изменением топологии магнитных поверхностей. Метод допускает обобщение на трехмерный случай, что продемонстрировано на примере расчета МГД равновесий с винтовой симметрией.

Четвертая глава диссертации посвящена моделированию процессов развития вертикальной неустойчивости плазмы и способов ее подавления. В **§ 1** изложена суть проблемы. Причина возникновения вертикальной неустойчивости состоит в том, что по ряду физических и технических соображений плазменный шнур растягивают в направлении главной оси тора, и его сечение становится вытянутым и даже каплеобразным. В качестве примеров можно рассмотреть проекты английской установки CTF [26A], российских установок Т15-М [15A-20A, 22A], и ТИН-СТ [31A], (**рис. 4.1**), казахской установки КТМ [28A, 30A], данный список можно без труда продолжить. В районе образования «острия» удерживающее магнитное поле обращается в нуль, и может возникнуть неустойчивость плазменных равновесных конфигураций по отношению к вертикальному смещению, и, как следствие, потеря управляемости плазмы. Здесь и далее под управляемостью понимается возможность удержания плазменного шнура с помощью физических и технических средств, в заданных, весьма жестких, пределах, на протяжении всего сценария разряда.

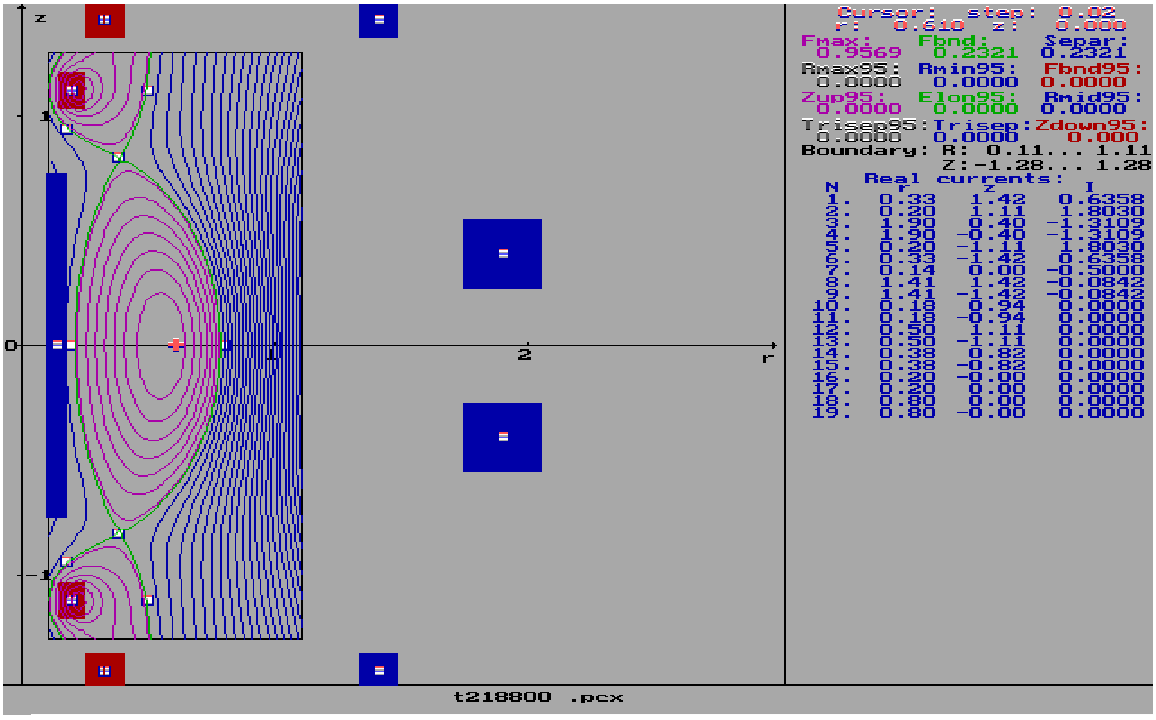


Рис. 4.1. Магнитные поверхности ψ =*const*, создаваемые плазмой и внешними проводниками внутри ТИН-СТ [31A]. Каплеобразное сечение плазменного шнура является причиной ее неустойчивости по отношению к вертикальным смещениям (все размеры даны в метрах).

Существуют несколько типов вертикальной неустойчивости плазмы, различающихся по характерным временам развития. Необходимым условием управляемости является устойчивость плазмы относительно «быстрых», или МГД, развивающихся за время ~10^{-6}с, смещений. Активная обратная связь

(АОС) в этом случае неприменима. Неустойчивость подавляется токами Фуко, наводящимися в камере и в специальных витках (пассивная обратная связь, **рис. 4.2**). На границе зоны «быстрой» неустойчивости возникает неустойчивость второго типа, «переходная», с характерным временем развития 10^{-4}-10^{-5}с. В этом случае АОС также неприменима. Наконец, если «быстрая» и «переходная» неустойчивости подавлены, то возникает неустойчивость третьего типа, – «медленная», с характерным временем развития 10^{-2}-10^{-3}с, которая в принципе может быть подавлена АОС. На практике считается, что управляемость может быть реализована, если характерное время развития «медленной» неустойчивости не меньше некоторого наперед заданного значения.

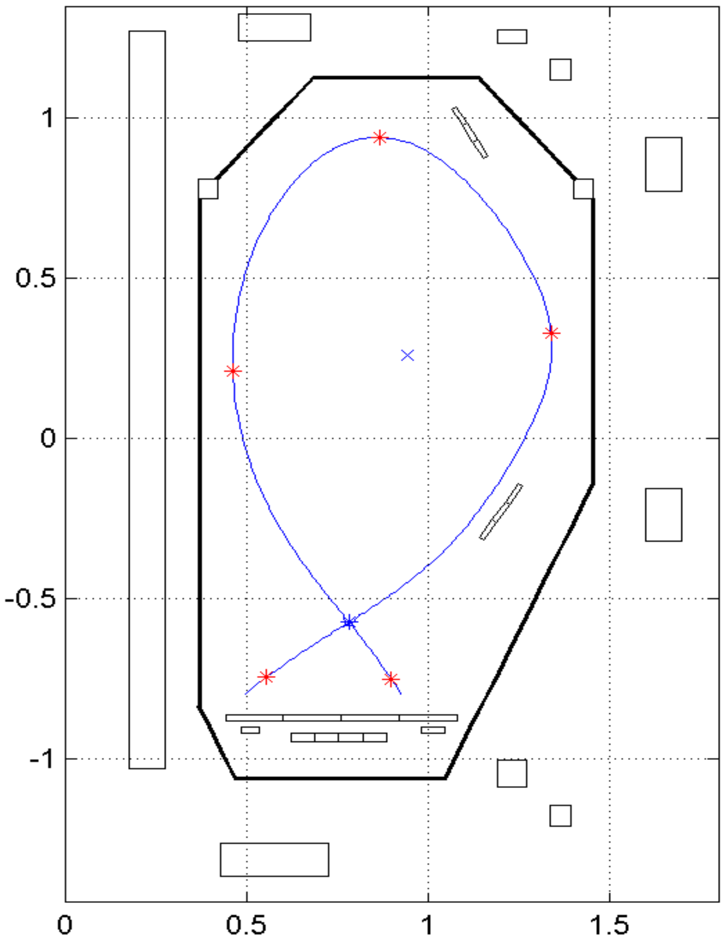


Рис. 4.2. Элементы конструкции, играющие роль в подавлении вертикальной неустойчивости плазмы, на примере схемы установки КТМ, [30А]:
вакуумная камера – обозначена сплошной жирной линией;
дополнительные пассивные витки – наклонные прямоугольники внутри камеры;
активные катушки магнитного поля – маленькие квадратики вне камеры
(все размеры даны в метрах).

Таким образом, анализ управляемости плазменного шнура нужно начинать с исследования его устойчивости относительно «быстрых» МГД смещений. В **§2** приводятся система МГД уравнений идеально проводящей несжимаемой жидкости, применяющаяся для описания «быстрых» (и только «быстрых») процессов. Математическая постановка задачи, основанная на данной модели, и численный метод ее решения обсуждаются в **§3**. Данная модель применялась при исследовании вертикальной неустойчивости плазмы в ранних работах автора [1А-3А]. При этом вопрос о том, с какой скоростью будет развиваться «медленная» неустойчивость после подавления «быстрой», оставался открытым.

Ввиду большой разницы характерных времен развития различных типов вертикальной неустойчивости плазмы, в качестве модели, описывающей все три типа неустойчивости, обычно выбирается так называемая «модель твердого сдвига», основанная на анализе смещения плазменного шнура, как целого. Одной из первых работ в этом направлении была работа [25С], в работе [4А] рассмотрена модель вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке с железным сердечником. Дальнейшее развитие модель «твердого сдвига» получила в работе [32А], и здесь излагается в **§§ 4-8**.

Более подробно, в **§ 4** рассматривается математическая постановка задачи. Поскольку модель, как уже говорилось, допускает три различных характерных времени развития процесса, то применение безразмерных переменных по меньшей мере неудобно, и дальше уравнения пишутся в размерных единицах: расстояние – метр [м], время – секунда [с], масса – килограмм [кг], сила тока – мегаАмпер [МА], электрическое сопротивление – Ом [Ом], магнитный поток – вебер [В·с], индукция магнитного поля – Тесла [Тл], коэффициенты индукции – микроГенри [мкГн].

Начнем с «быстрой» неустойчивости. В предположении, что плазменный шнур движется по вертикали как целое, его уравнение движения имеет вид:

$$10^{-6} M \frac{d^2}{dt^2}\xi(t) = W_0\xi(t) + W_1 I_1(t) + W_2 I_2(t) + \ldots + W_N I_N(t) \qquad (4.1)$$

Здесь M, ξ − масса шнура и его смещение, $W_0\xi$ – сила Лоренца, I_k – наведенный ток в k-м пассивном стабилизирующем витке, $W_k I_k$ – возвращающая сила со стороны данного витка, N – число витков. В большинстве случаев для систем с вытянутым сечением шнура $W_0 > 0$, и поэтому в отсутствие пассивных стабилизирующих проводников плазма неустойчива с характерным временем развития процесса $\sim 10^{-6}$ с.

Токи в витках описываются идеальными уравнениями Кирхгофа:

$$L_{i1}\frac{dI_1}{dt} + L_{i2}\frac{dI_2}{dt} + \ldots + L_{iN}\frac{dI_N}{dt} = -I_p \frac{dL_{ip}}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -W_i \frac{d\xi}{dt} \qquad (4.2)$$

Здесь L_{ik} – коэффициенты взаимной индукции проводников (при i=k самоиндукции), L_{ip} – коэффициент взаимной индукции между i-м витком и плазмой, I_p– полный ток в плазме.

«Переходная» неустойчивость возникает на границе зоны «быстрой» неустойчивости, где баланс сил начинает нарушаться, и поэтому движение плазмы по-прежнему описывается уравнением (4.1). В уравнениях Кирхгофа при таких временах необходим учет омического сопротивления:

$$L_{i1}\frac{dI_1}{dt}+...+L_{iN}\frac{dI_N}{dt}+R_iI_i=-W_i\frac{d\xi}{dt}, i=1,...,N. \tag{4.3}$$

При подавлении «быстрых» и «переходных» неустойчивостей левая часть уравнения (4.1) уменьшается на три порядка и ею можно пренебречь. Вследствие этого для описания «медленной» неустойчивости вместо уравнения движения (4.1) применяется уравнение баланса сил:

$$W_0\xi(t)+W_1I_1(t)+W_2I_2(t)+...+W_NI_N(t)=0. \tag{4.4}$$

Итак, «быстрая» неустойчивость описывается уравнениями (4.1)-(4.2), «переходная» – (4.1), (4.3), и медленная – (4.3)-(4.4). В диссертации показано, что из (4.1),(4.3) можно, как предельные случаи, получить остальные модели.

Активная обратная связь становится технически возможной лишь при подавлении «быстрых» и «переходных» смещений. Ее модель сводится к добавке в уравнения Кирхгофа дополнительной ЭДС для активных контуров:

$$L_{i1}\frac{dI_1}{dt}+L_{i2}\frac{dI_2}{dt}+...+L_{iN}\frac{dI_N}{dt}+R_iI_i=-W_i\frac{d\xi}{dt}-U_i(\xi,\frac{d\xi}{dt}). \tag{4.5}$$

В случае линейной модели АОС уравнения (4.5) принимают вид:

$$L_{i1}\frac{dI_1}{dt}+L_{i2}\frac{dI_2}{dt}+...+L_{iN}\frac{dI_N}{dt}+R_iI_i=-W_i\frac{d\xi}{dt}-A_i\xi-B_i\frac{d\xi}{dt}. \tag{4.6}$$

После введения обозначений:

$$\mathbf{A}=(A_1,..,A_N)^T;\mathbf{B}=(B_1,..,B_N)^T;\mathbf{I}=(I_1,..,I_N)^T;\mathbf{W}=(W_1,..,W_N)^T;$$
$$\mathbf{U}=(U_1,..,U_N)^T;\mathbf{R}=\begin{pmatrix}R_1 & ... & 0\\ ... & ... & ...\\ 0 & ... & R_N\end{pmatrix};\mathbf{L}=\begin{pmatrix}L_{11} & ... & L_{1N}\\ ... & ... & ...\\ L_{N1} & ... & L_{NN}\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

получаются следующие матричные формы записи уравнений:
для «быстрых» смещений

$$10^{-6}M\frac{d^2\xi}{dt^2}=(\mathbf{W},\mathbf{I})+W_0\xi; \quad \mathbf{LI}=-\mathbf{W}\xi \quad ; \tag{4.8}$$

для «переходной» неустойчивости

$$10^{-6}M\frac{d^2\xi}{dt^2}=(\mathbf{W},\mathbf{I})+W_0\xi; \quad \mathbf{L}\frac{d\mathbf{I}}{dt}+\mathbf{RI}=-\mathbf{W}\frac{d\xi}{dt}; \tag{4.9}$$

для «медленной» неустойчивости

$$(\mathbf{W},\mathbf{I})+W_0\xi=0; \quad \mathbf{L}\frac{d\mathbf{I}}{dt}+\mathbf{RI}=-\mathbf{W}\frac{d\xi}{dt}; \tag{4.10}$$

для линейной модели АОС

$$(\mathbf{W},\mathbf{I})+W_0\xi=0, \quad \mathbf{L}\frac{d\mathbf{I}}{dt}+\mathbf{RI}=-\mathbf{A}\xi-(\mathbf{B}+\mathbf{W})\frac{d\xi}{dt}; \tag{4.11}$$

и, наконец, для нелинейной модели АОС

$$(\mathbf{W},\mathbf{I})+W_0\xi=0;\quad \mathbf{L}\frac{d\mathbf{I}}{dt}+\mathbf{RI}=-\mathbf{W}\frac{d\xi}{dt}-\mathbf{U}(\xi,\frac{d\xi}{dt}). \qquad (4.12)$$

В том же параграфе дан вывод коэффициентов в уравнениях (4.1)-(4.12).

В **§ 5** приводится анализ математических свойств модели «быстрых» смещений. После подстановки в уравнения (4.8) зависимостей

$$\xi(t)=\xi_0 e^{\gamma t},\mathbf{I}=\mathbf{I_0}e^{\gamma t} \qquad (4.13)$$

из уравнений (4.8) вытекает формула для инкремента неустойчивости γ:

$$\gamma^2=\frac{10^6W_0}{M}-\frac{10^6}{M}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{W},\mathbf{W})=\frac{10^6W_0}{M}(1-\frac{(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{W},\mathbf{W})}{W_0})=\gamma_A^2(1-E) \qquad (4.14)$$

Параметр

$$\frac{(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{W},\mathbf{W})}{W_0}=E, \qquad (4.15)$$

названный автором диссертации **эффективностью стабилизирующей системы проводников**, играет определяющую роль во всех дальнейших исследованиях. Прежде всего, из уравнения (4.14) следует, что «быстрая» неустойчивость подавлена, если выполнено условие

$$E>1\ . \qquad (4.16)$$

Автором диссертации доказана следующая теорема

Теорема 1*. Для эффективности E_{12} системы, состоящей из двух проводников, верны неравенства:*

$$E_{1,2}\geq\max(E_1,E_2);\ \ E_{1,2}\geq\frac{E_1+E_2}{1+\alpha};E_{12}<\frac{E_1+E_2}{1-\alpha^2}, \qquad (4.17)$$

Здесь E_1,E_2 – эффективности систем, состоящих из одного проводника, $\alpha=L_{12}/\sqrt{L_{11}L_{22}}$. Теорема 1 имеет очень простой физический смысл: при добавлении в систему дополнительного проводника ее стабилизирующие свойства могут только улучшиться.

В **§ 6-7** приводится анализ моделей «переходной» и «медленной» неустойчивостей. Если в (4.9) подставить (4.13), то получается уравнение для инкремента развития неустойчивости γ

$$\gamma^2=\gamma_A^2-\frac{10^6}{M}(\gamma(\gamma\mathbf{L}+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{W},\mathbf{W}) \qquad (4.18)$$

Показано, что для стабилизирующих систем, состоящих из одного и двух пассивных проводников (теоремы 2 и 3), при условии (4.16) уравнение (4.18) имеет только один вещественный положительный корень. Прочие корни являются либо вещественными отрицательными, либо комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью.

Для системы с одним проводником вводится характерное время затухания тока в проводнике:

$$\tau_{coil}^{-1} = \gamma_{coil} = R_1 / L_{11} \tag{4.19}$$

и показывается, что на границе «быстрой» неустойчивости при $E = 1$ возникает «переходная» неустойчивость с инкрементом развития:

$$\gamma_{nep} = \sqrt[3]{\gamma_A^2 \cdot \gamma_{coil}}; \tau_{nep} = \sqrt[3]{\tau_A^2 \cdot \tau_{coil}} \ . \tag{4.20}$$

Показано, что для оценки инкремента развития «медленной» неустойчивости справедлива асимптотическая формула

$$\gamma = \frac{\gamma_{coil}}{E_1 - 1} = \gamma_1 = \tau_1^{-1}, \tag{4.21}$$

и что модель (4.9) содержит в себе, как предельные случаи, модели (4.8) и (4.10). В целом картина всех трех типов неустойчивостей хорошо отображается на следующем рисунке (**рис. 4.3**).

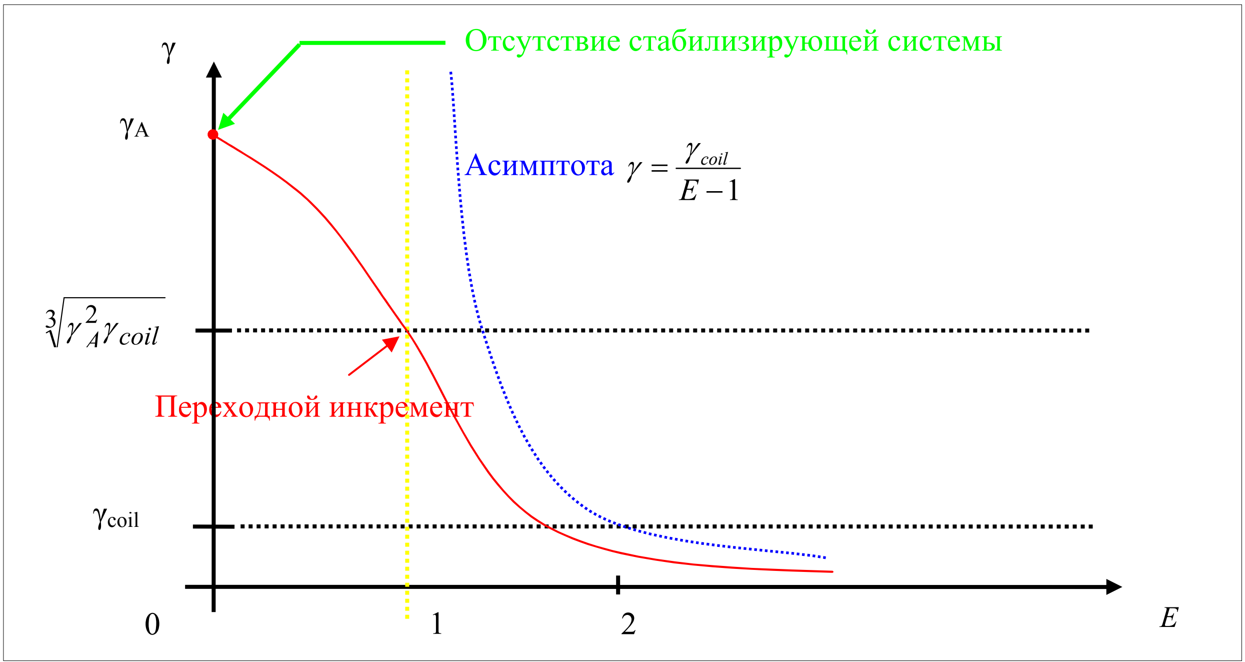


Рис. 4.3. Зависимость инкремента неустойчивости от эффективности стабилизирующего проводника *E*, [32А].

В конце **§ 7** (теорема 4) приводится оценка характерного времени развития «медленной» неустойчивости в системе, состоящей из двух проводников.

Модель активной обратной связи исследуется в **§ 8**. Сначала рассматривается линейная обратная связь для системы с одним проводником, являющимся одновременно как активным, так и пассивным. Показано, что при выполнении необходимого условия управляемости (4.16) «медленная» неустойчивость подавляется, если выполнено условие

$$A > \frac{W_1 \cdot \gamma_{coil}}{E_1}. \tag{4.22}$$

Далее рассматривается случай нелинейной обратной связи. Система (4.12) при этом принимает вид

$$W_1 I_1 + W_0 \xi = 0,$$
$$L_{11}\frac{dI_1}{dt} + R_1 I \;= -W_1\frac{d\xi}{dt} + U(\xi, \frac{d\xi}{dt}) \qquad (4.23)$$

и, в случае аддитивной обратной связи

$$U\;(\xi, \frac{d\xi(t)}{dt}) = A(\xi) + B(\frac{d\xi(t)}{dt}), \qquad (4.24)$$

без труда сводится к уравнению вида

$$(E_1 - 1)\frac{d\xi(t)}{dt} + \frac{W_1}{L_{11}W_0}B(\frac{d\xi(t)}{dt}) = \gamma_{coil1}\xi - \frac{W_1}{L_{11}W_0}A(\xi) \qquad (4.25)$$

Естественно предположить, что функции $A(\xi)$ и $B(\frac{d\xi}{dt})$ – нечетные и неотрицательные при положительных значениях своих аргументов.

Задача об активной обратной связи не всегда допускает линеаризацию. Дело в том, что управляющие функции могут не разлагаться в ряд Тейлора в окрестности нуля (например, быть ступенчатыми). Если рассмотреть еще раз схему, изображенную на **рис. 4.2** (а также аналогичные ей), то становится ясным, что в процессе управления важно не допустить слишком больших смещений шнура. Сформулируем определение управляемости системы в терминах предельных амплитуд смещения от положения равновесия.

Определение: *Систему (4.23)назовем управляемой с предельной амплитудой $\xi_A > 0$, если для всех $\xi > \xi_A$ уравнение (4.25) может быть разрешимо только при отрицательных $\frac{d\xi(t)}{dt}$.*

Нетрудно видеть, что принцип предельной амплитуды является частным случаем известного понятия устойчивости на множестве [26С-27С]. Автором диссертации доказана следующая теорема

Теорема 5. *Если выполняются следующие условия:*

1) $E_1 > 1$ *(«быстрая» неустойчивость подавлена);*

2) *реакция на скорость смещения $B(\frac{d\xi}{dt})$ представляет собой нечетную функцию, неотрицательную при $\frac{d\xi}{dt} > 0$;*

3) *реакция на смещение $A(\frac{d\xi}{dt})$ представляет собой нечетную функцию, неотрицательную при $\frac{d\xi}{dt} > 0$;*

4) *при $|\xi| > |\xi_A|$ верно неравенство $\frac{A(\xi)}{\xi} \geq \gamma_{coil1}\frac{W_1}{E_1}$,*

то система (4.23) является управляемой и предельная амплитуда смещений не превышает ξ_A.

В **§ 9** приводится описание стандартного кода TOKSTAB для расчёта всех трех типов вертикальной неустойчивости плазмы. В основе кода лежит модель «твёрдого сдвига», описанная выше. Код характеризуют:

1) высокая скорость вычислений (время расчёта на стандартной ПЭВМ составляет 3-5 с);

2) наличие встроенного графического редактора и удобного интерфейса.

Входными данными для кода являются МГД равновесие, рассчитанное по коду TOKAMEQ, (вычисление коэффициентов) и файл, описывающий стабилизирующую систему проводников. Код применялся при выполнении работ [15А, 17А, 18А, 22А, 30А, 31А], в настоящее время стандартизован и включен в библиотеку «Виртуальный токамак» [29А]. Его численный метод основан на решении обобщенной алгебраической задачи на собственные значения, получающейся после подстановки зависимостей (4.13) в (4.1)-(4.4).

Пятая глава посвящается выполненным автором диссертации прикладным работам. В **§ 1** кратко перечисляются выполненные прикладные работы. В **§ 2-5** приводится описание четырех выполненных, последних в хронологическом порядке, циклов прикладных работ.

Более подробно, в **§ 2** описываются результаты экспертизы проекта токамака Т-15М, Россия [15А-20А, 22А]. Предполагается, что эта установка позволит решать разнообразные задачи в поддержку проекта ИТЭР, в частности: прорабатывать конструкцию и проводить испытания различных узлов ИТЭР и диагностического оборудования, исследовать различные режимы работы токамака, оптимизировать алгоритмы управления разрядом и подготавливать кадры для работы на токамаке ИТЭР. В настоящее время проект Т-15М завершен и размещаются заказы на части его конструкции.

Автор диссертации входил в состав коллектива, проводившего экспертизу, как конструкции установки, так и базового сценария разряда. Непосредственно участие автора сводилось к проверке базовых сценариев базовых разряда и к анализу их управляемости. В качестве инструментария применялись коды TOKAMEQ и TOKSTAB, которые к описываемому периоду уже имели все признаки стандартных кодов (документация, средства сервиса, средства ввода-вывода, графика) хотя и не были включены ни в какие библиотеки стандартных программ (работа над библиотекой «Виртуальный Токамак» [33А] началась несколькими годами позже).

Автору удалось показать ошибочность начальной версии сценария разряда и предложить его коррекцию (**рис. 5.1**). Кроме того, не без помощи расчетов автора, был сделан окончательный выбор системы пассивных стабилизирующих витков.

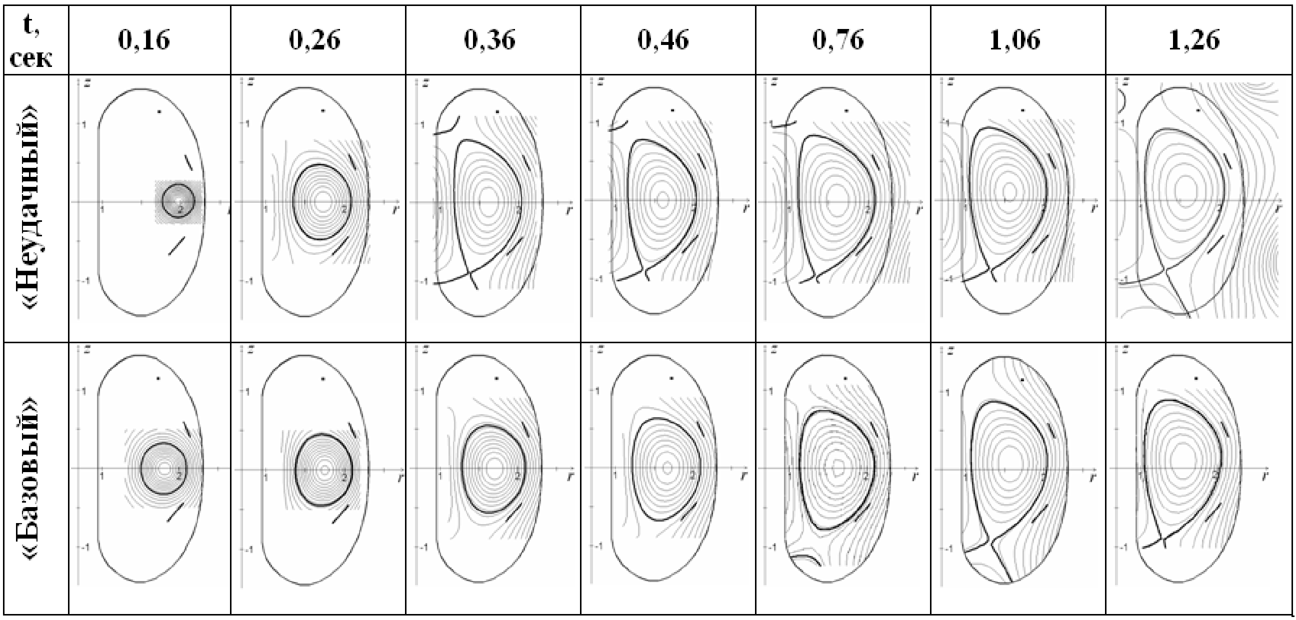


Рис. 5.2. «Неудачный» и корректированный (базовый) сценарии разряда в Т-15М [22А]. В «неудачном» сценарии плазма из-за преждевременного приобретения каплеобразной формы сечения становится неустойчивой.

В **§ 3** описана работа автора по проекту токамака CTF. Цели проекта следующие. В 1994 году МАГАТЭ инициировало исследование, какие источники нейтронов нужны для развития технологий УТС [28С]. Сформулированные требования легли в основу проекта CTF. В его разработке, помимо сотрудников английского национального ядерного центра UKAEA, участвовали также сотрудники Imperial College, Лондон, University of Sydney, Австралия, Международного Научного Центра Cadarache, Франция, РНЦ «Курчатовский Институт», а также автор диссертации, МГУ. Сам процесс проектирования проходил итерационно (поэтапно), автор участвовал в пяти этапах (2003-2008 гг., [43А-46А]). Проектирование завершилось разработкой концепции установки [26А], **рис. 5.3**. Участие автора сводилось к оптимизации магнитной системы CTF.

Задачи оптимизации, решаемые на каждом этапе, подробно описаны в главе 5. Отметим вкратце, что на первых трех «итерациях» проекта они сводились к поиску наилучшей, с точки зрения физики, формы сечения плазменного шнура, при ограничениях на предельные величины токов во внешних проводниках. Идеальным инструментом для решения таких задач оказался код TOKAMEQ, работающий в **полу обратном режиме**. Благодаря такому подходу часть требований на геометрию шнура удовлетворялась автоматически, и оптимизация велась в пространстве существенно меньшей размерности. Не меньшую пользу принесла возможность задания функциональной зависимости плотности тока в табличном виде, благодаря чему два профиля тока (требуемого по техническому заданию и рассчитанного с помощью кода TOKAMEQ) полностью совпадали (**рис. 5.4**).

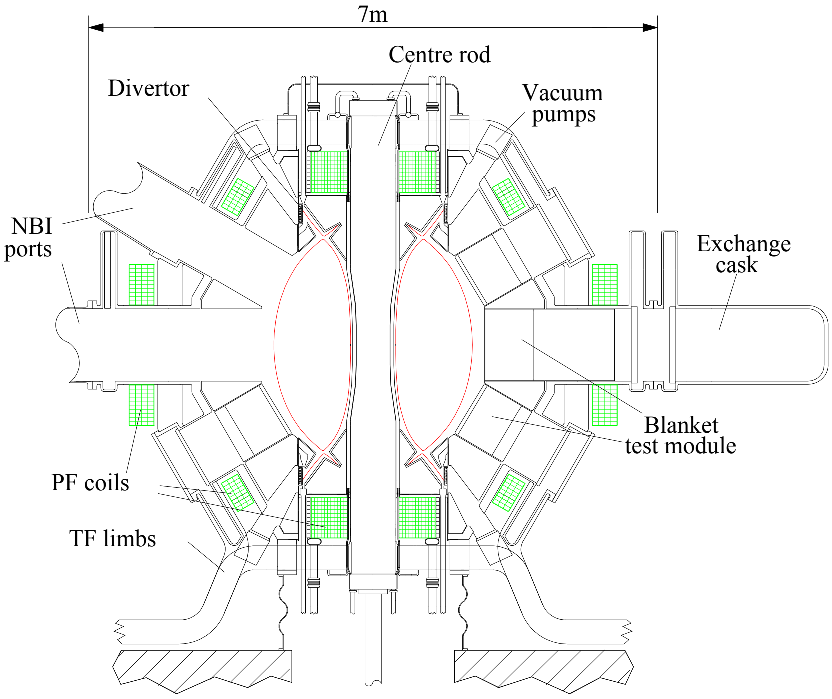


Рис. 5.3. Сечение токамака CTF, с указанием некоторых основных элементов конструкции, [26A]. Штриховкой обозначены катушки магнитного поля.

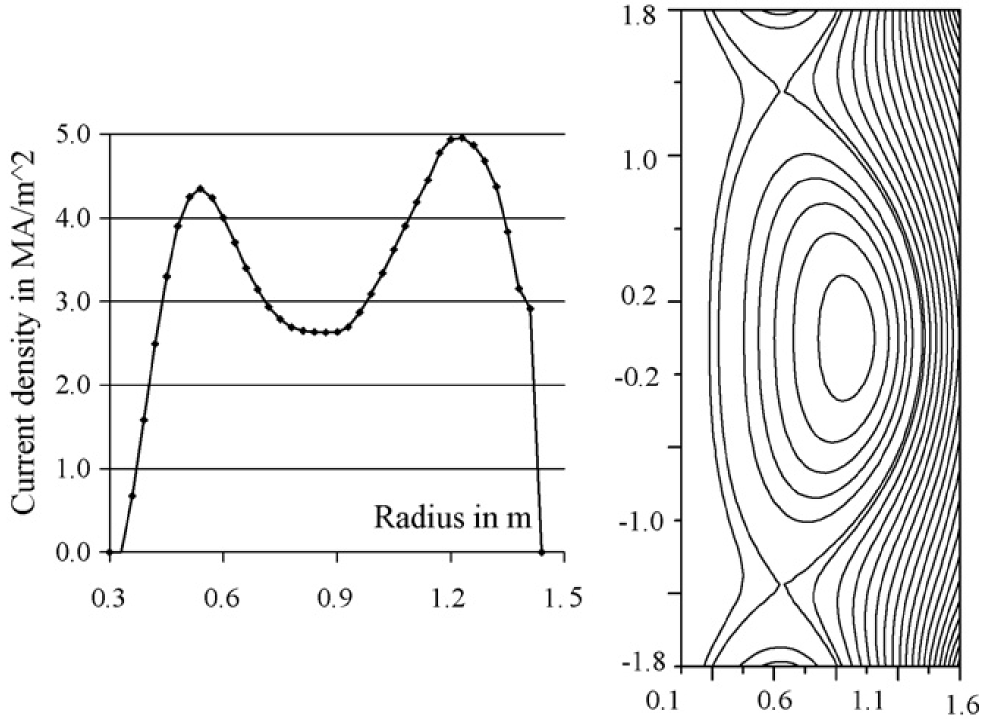


Рис. 5.4,[26A]: а) Воспроизведение заданной UKAEA плотности тока (сплошная линия) при расчетах по коду TOKAMEQ (линия с метками);
b) Сечения магнитных поверхностей, рассчитанных по коду TOKAMEQ.

На четвертом и пятом этапах проектирования, когда все основные геометрические, физические и технические требования к разряду в плазме были удовлетворены, настал черед оптимизации устройства для вывода плазмы из примесей (дивертора). Для решения этой задачи пришлось, сохраняя достигнутые параметры плазмы, оптимизировать положения магнитных поверхностей на значительном удалении от шнура.

В **§ 4** описаны работы автора, связанные с установкой КТМ [28A, 30A]. Токамак КТМ построен в Республике Казахстан в рамках национального проекта по развитию технологий УТС. Его характеристики приведены в работах [29C-30C]. Установка спроектирована в ФГУП НИИЭФА им. Д.В. Ефремова, её основные узлы изготовлены там же. Первый плазменный разряд на КТМ был получен в 2010 г., в настоящее время на КТМ осуществляется подготовка к запуску в омическом штатном режиме.

К моменту включения автора в работу установка КТМ была уже построена, а основные сценарии разряда – просчитаны [31C]. Поэтому роль автора здесь сводилась к уточнению базовых сценариев разряда, то есть к исследованию возможностей коррекции сценария при его отклонении от базового. Кроме того, речь шла о настройке кодов TOKAMEQ и TOKSTAB на работу с установкой КТМ и о передаче данных кодов коллективу КТМ.

В течение нескольких последних лет в России, в рамках национальной программы УТС, ведется проработка проекта термоядерного источника нейтронов ТИН-СТ [32C-35C]. В **§ 5** описана работа автора, связанная с данной установкой [31A]. К моменту включения автора в процесс проектирования на повестку дня вышла задача проработки конструкции дивертора. Автор, пользуясь кодом TOKAMEQ, оценил, насколько могут различаться потоки частиц в верхнюю и нижнюю ловушки дивертора из-за смещения плазменного шнура по вертикали. Такие оценки очень важны, так как тепловые нагрузки на диверторные пластины в крупных установках находятся на пределе технических возможностей. Полученные оценки оказались в хорошем соответствии с экспериментом.

В заключение описания пятой главы отметим, что выполненные работы дали автору возможность сравнить результаты расчетов по кодам TOKAMEQ и TOKSTAB с другими кодами: SPIDER[36C], KINX [37C], DINA[16C-17C], PET[38C]. Степень соответствия результатов расчетов во всех проведенных сравнениях оказалась очень хорошей, в некоторых вариантах – практически идеальной. Таблицы сравнений можно найти в упомянутых в данной главе авторских работах, а также в главе 5 диссертации.

Список литературы делится автором на 2 раздела: авторские работы и цитируемые. Авторские работы состоят из основного и дополнительного списка. Основной список содержит авторских публикаций [1A-33A] – работ, опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК. Этот список полностью закрывает все разделы диссертации. Дополнительный список состоит из работ [34A-50A] и включает в себя доклады на международных конференциях. Список цитируемой в диссертации литературы состоит из работ [1C-169C]. В реферате цитируется 38 работ из данного списка.

ПУБЛИКАЦИИ
статьи, опубликованные в изданиях, входящих в список ВАК

1А. Герасимов С.Н., Попов А.М., Сычугов Д.Ю. Сравнение математического моделирования равновесия и МГД устойчивости плазмы с экспериментом на установке Т-12. Физика плазмы, 1983, т.9, № 4, стр.688-696.

2А. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Пистунович В.И., Попов А.М., Сычугов Д.Ю. Стабилизация вертикальной неустойчивости в токамаке с полоидальным дивертором. Физика плазмы, 1984, т.10, № 4, стр. 688-694.

3А. Сычугов Д.Ю., Зотов И.В. Математическое моделирование процессов развития вертикальной неустойчивости плазмы. Вестник МГУ, сер. 15 «Вычислительная математика и кибернетика», 1985, № 3, стр. 35-43.

4А. Андреев В.Ф., Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Попов А.М., Сычугов Д.Ю. Вертикальная устойчивость в токамаке с железным сердечником. Вопросы Атомной Науки и Техники. Сер. «Термоядерный синтез». М., 1986, выпуск 3, стр. 33-39.

5А. Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. Равновесные плазменные конфигурации с магнитными островами при больших β. Физика плазмы, 1988, т. 14, стр. 663-667.

6А. Коврижных Л.М., Костомаров Д.П., Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. Свойства структур магнитных поверхностей в плазме. Дифференциальные уравнения, 1989, т. 25, № 6, стр. 983-989.

7А. Кузнецов А.Б., Кузнецов Ю.К., Щепетов С.В., Сычугов Д.Ю. Равновесие плазмы со свободной границей в торсатроне У2-М. Вопросы Атомной Науки и Техники. Сер. Термоядерный Синтез. 1991, выпуск 3, стр. 64-68.

8А. Костомаров Д.П., Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. Применение неоднозначных потоковых переменных к решению задач МГД равновесия плазмы (метод базовых координат). Математическое моделирование. Сер. Вычислительные методы и алгоритмы, 1992, т. 4, № 10, стр. 71-87.

9А. Кузнецов А.Б., Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. Разрушение внешних магнитных поверхностей в стеллараторе из-за эффектов конечного давления. Вопросы Атомной Науки и Техники. Сер. «Термоядерный синтез». 1993, выпуск 1-2, стр.65-69.

10А. Кузнецов А.Б., Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. К вопросу об определении профиля плазмы в стеллараторе по результатам магнитных измерений. Вопросы Атомной Науки и Техники. Сер. «Термоядерный синтез». 1993, выпуск 1-2, стр.70-74.

11А. Kuznetsov A.B., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Is it possible to extract information on the plasma pressure profiles from magnetic measurements in stellarator? Nuclear Fusion, 1994, vol. 34, № 2, pp. 185-190.

12А. Kuznetsov A.B., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Finite pressure induced destruction of the plasma boundary in stellarators. Nuclear Fusion, 1995, vol. 35, № 2, pp. 183-193.

13А. Shchepetov S.V., Kuznetsov A.B., Sychugov D.Yu. Plasma equilibria with stochastic regions and magnetic islands. Transactions of Fusion Technology, 1995, vol. 27, pp. 455-458.
14А. Сычугов Д.Ю., Щепетов С.В. Моделирование винтового равновесия с магнитными островами при помощи потоковых координат. Математическое моделирование. Сер. Вычислительные методы и алгоритмы. 1996, т. 8, №2, стр. 57-65.
15А. Dnestrovskij Yu.N., Leonov V.M., Notkin G.E., Khvostenko P.P., Savrukhin P.V., Trubnikov A.S., Tsaun S.V., Filatov O.G., Vasilev V.I., Mineev A.B., Muratov V.P., Khayrutdinov R.R., Sychugov D.Yu., Voznesenskij V.A., Gasilov N.A. Discharge Scenario for T-15M tokamak design project. Problems of Atomic Science and Technology, 2000, N 3, Series: Plasma Physics (5), p. 25-27.
16А. Персиянов И.С., Сычугов Д.Ю. О возможности контроля границы плазмы в режиме реального времени. Вестник МГУ, Сер. 15 «Вычислительная математика и кибернетика», 2003, №4, стр. 24-28.
17А. Bondarchuk E.N., Dnestrovskii Yu.N., Leonov V.M., Maksimova I.I., Sychugov D.Yu., Tsaun S.V., Voznesesky V.A. Vertical MHD stability of the T15-M Tokamak Plasma. Plasma Devices and Operations, December 2003, vol. 11, № 4, pp. 219-227.
18А. Бондарчук Э.Н., Вознесенский В.А., Днестровский Ю.Н., Леонов В.М., Максимова И.И., Сычугов Д.Ю., Цаун С.В. Вертикальная МГД устойчивость плазмы в Т-15М. Вопросы Атомной Науки и Техники, Сер. Термоядерный синтез, 2003, вып. 2, с. 55-60.
19А. Сычугов Д.Ю., Амелин В.В., Гасилов Н.А., Цаун С.В. Численное исследование вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке при конечной проводимости стабилизирующих элементов. Вестник МГУ, Сер. 15 «Вычислительная математика и кибернетика», 2004, № 4, стр. 27-32.
20А. Зотов И.В., Персиянов И.С., Сычугов Д.Ю. Контроль границы плазмы в токамаке в режиме реального времени. Вопросы Атомной Науки и Техники, Сер. Термоядерный синтез, 2004, вып. 4, стр. 44-54.
21А. Вознесенский В.А., Сычугов Д.Ю. Модернизированный численный метод расчета МГД-равновесия плазменного шнура в токамаке. Вестник МГУ, Сер. 15 «Вычислительная математика и кибернетика», 2005, № 1, стр. 24-29.
22А. Какурин А.М, Леонов В.М., Ноткин Г.Е., Хвостенко П.П., Цаун С.В., Бондарчук Э.Н., Васильев В.И., Минеев А.Б., Максимова И.И., Амелин В.В., Гасилов Н.А., Сычугов Д.Ю. Основные сценарии разряда токамака Т-15М. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск.4, 2005, с.53-75.
23А. Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю. Математическое моделирование МГД равновесия плазмы. Математическое моделирование. Сер. Вычислительные методы и алгоритмы, 2008, т. 20, № 5, стр. 3-34.
24А. Сычугов Д.Ю. Код для расчета МГД равновесия TOKAMEQ (модуль библиотеки программ «Виртуальный Токамак»). Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск.4, 2008, с.85-89.

25А. Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю. Равновесные плазменные конфигурации. Энциклопедическая серия "ЭНЦИКЛОПЕДИЯ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ". 2008, том VII-1, часть 1, с. 39-60.
26А. G.M. Voss, S. Davis, A. Dnestrovskij, A. Kirk, P.J. Knight, M. Loughlin, M.H. O'Brien, D. Sychugov, A. Tabasso, H.R. Wilson. Conceptual design of a component test facility based on the spherical tokamak. Fusion Engineering and Design, v. 83, 2008, pp. 1648-1653.
27А. Сычугов Д.Ю. Новая версия кода TOKAMEQ для расчета конфигураций с произвольным профилем тока и расширенным дивертором (модуль библиотеки программ «Виртуальный Токамак»). Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск.3, 2009, с.60-62.
28А. Сычугов Д.Ю., Шаповалов Г.В., Волынкина Ю.В.,. Садыков А.Д., Чектыбаев Б.Ж., Шипилов Д.В., Шумайлова О. Н. Численное моделирование омического сценария разряда в токамаке КТМ. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск 1, 2010, с.38-45.
29А. Сычугов Д.Ю., Амелин В.В., Гасилов Н.А. Модуль TOKSTAB (модуль библиотеки программ «Виртуальный Токамак»). Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск.3, 2010, с. 46-49.
30А. Д.Ю. Сычугов, Г.В. Шаповалов, А.Д. Садыков, Б.Ж. Чектыбаев, О.Н. Шумайлова. Численное исследование вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке КТМ. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, выпуск. 3, 2011, с. 88-92.
31А. В. Ю. Сергеев, Б. В. Кутеев, А. С. Быков, В. С. Петров, А. А. Голиков, А. В. Голубева, П. Р. Гончаров, М. П. Грязневич, Г. С. Кирнев, А. В. Клищенко, В. В. Лукьянов, А. В. Спицын, Д. Ю. Сычугов, Ю. С. Шпанский. Концепция дивертора термоядерного источника на основе сферического токамака (ТИН-СТ). ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2012, том 38, № 7, с. 571–590.
32А. Д.Ю. Сычугов, Ю.Н. Днестровский, Д.П.Костомаров, В.В. Амелин, Н.А.Гасилов. Математические свойства модели вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке. Математическое моделирование, 23:4 (2011), с. 69–82.
33А. Д.П.Костомаров, Ф.С.Зайцев, А.Г.Шишкин, Д.Ю.Сычугов, С.В.Степанов, Е.П.Сучков. Программное обеспечение библиотеки «Виртуальный токамак». Вестник МГУ, Сер. 15 «Вычислительная математика и кибернетика», 2011, № 4, стр. 48-54.

международные конференции

34А. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Попов А.М., Сычугов Д.Ю. Стабилизация аксиально-симметричной неустойчивости в ИНТОРе. Параметры плазмы в ИНТОРе, вклад СССР, материалы 3-й сессии, фаза 2-А. Брюссель, 1981, стр. 29-44.

35А. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Пистунович В.И., Попов А.М., Попков Н.Г., Сычугов Д.Ю. Оптимизация стабилизирующей системы проводников для ИНТОРа. Параметры плазмы в ИНТОРе, вклад СССР, материалы 4-й сессии. Брюссель, 1982, стр. 55-65.
36A. Kovriznykh L.M., Kostomarov D.P., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Magnetic Islands in high-β plasmas. Proc. of Int. Stellarator-Heliotron Workshop. IAEA, Technical Committee Meeting, November 1986, Kyoto, Japan.
37A. Kovrizhnykh L.M., Kostomarov D.P., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Magnetic islands in high-β plasmas. 7th Int. Conf. on Plasma Theory and 7th Int. Congress and Instabilities in Plasmas. Kiev, USSR, Apr. 1987, pp. 86-89.
38A. Kovrizhnykh L.M., Kostomarov D.P., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Topology of magnetic surfaces in toroidal plasmas. 14th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Madrid, June 1987, vol.11-D, part 3, pp.1172-1175.
39A. Kovrizhnykh L.M., Kostomarov D.P., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. High-β Equilibrium in a Stellarator. 14th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Madrid, June 1987, vol.11-D, part 1, pp. 406-409.
40A. Sychugov D.Yu., Schepetov S.V. Plasma equilibria with large scale islands (method of basic coordinates). VIII Stellarator Workshop. Kharkov, USSR, 27-31.05.1991. IAEA, Vienna, Austria, July 1991, pp. 313-316.
41A. Kuznetsov A.B., Kuznetsov Yu.K., Sychugov D.Yu., Shchepetov S.V. Free boundary stellarator equilibria and destruction of external magnetic surfaces. VIII Stellarator Workshop. Kharkov, USSR, 27-31.05.1991. IAEA, Vienna, Austria, July 1991, pp. 499-502.
42А. Бондарчук Э.Н., Вознесенский В.А., Днестровский Ю.Н., Леонов В.М., Максимова И.И., Сычугов Д.Ю., Цаун С.В. Вертикальная МГД устойчивость плазмы в Т-15М. Седьмая Международная Конференция по Инженерным Проблемам Термоядерных Реакторов. Санкт-Петербург, 28-31.10.2002, стр. 197.
43A. H.R.Wilson, G.M.Voss, R.J.Akers, L.Appel, J.P.Christiansen, A.Dnestrovskij, O.Keating, T.C.Hender, M.J.Hole, G.Huysmans, A.Kirk, P.J.Knight, M.Louglin, K.G.McClemens, M.R.O'Brien, D.Yu.Sychugov and M.Valovic. The Physics Basis of a Spherical Tokamak Components Test Facility. 31st EPS Conference on Plasma Physics. London, 28 June -2 July ECA Vol. **28G**, P-4.196 (2004).
44A. H.R. Wilson, G.M. Voss, R.J. Akers, L. Appel, I. Chapman, J.P. Christiansen, A. Dnestrovskij[1], O. Keating[2], T.C. Hender, M.J. Hole[3] G.T.A. Huysmans[4], A. Kirk, P.J. Knight, M. Loughlin, K.G. McClements, A.W. Morris, M.R. O'Brien, D.Yu Sychugov[5] and M. Valovic. A Steady State Spherical Tokamak for Components Testing. 20th IAEA Fusion Energy Conference, Vilamoura, Portugal, 1 - 6 November 2004, FT/3-1Ra.
45A. A. Dnestrovskij, G.Voss, D.Sychugov, V. Lukash, R. Khayrutdinov. Non-inductive current ramp up scenario and steady state regime optimization for Component Test Facility, presented at 34 EPS PPCF Conference, Warsaw (2007),

P.-1.101.
46A. G.M.Voss, S.Davis, A.Dnestrovskij, A.Kirk, P.J.Knight, M.Loughlin, M.O'Brien, D.Yu. Sychugov, A.Tabasso, H.R.Wilson. Conceptual Design of a Component Test Facility Based on the Spherical Tokamak. ISFNT-8 Conference, Heidelberg, Germany, October 2007.
47A. Сычугов Д.Ю., Шишкин А.Г., Зайцев Ф.С., Лукаш В.Э., Семенов И.Б., Хайрутдинов Р.Р., Зотов И.В., Нефедов В.В. Библиотека программ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК». XI Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 5-9 октября 2009 года, с. 101-102.
48A. Шишкин А.Г., Зайцев Ф.С., Сычугов Д.Ю., Зотов И.В., Нефедов В.В. Графический интерфейс пользователя библиотеки программ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК». XI Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 5-9 октября 2009 года, с. 113-114.
49A. Костомаров Д.П., Сычугов Д.Ю. Модель подавления вертикальной неустойчивости плазмы в токамаке. Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 1-5 июля 2011г., с. 113-114.
50A. Днестровский А.Ю., Кутеев Б.В., Лукаш В.Э., Сычугов Д.Ю., Хайрутдинов Р.Р. Подъем тока в ТИН. XXXVIII Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Звенигород, 14-18 февраля 2011 г. http://www.fpl.gpi.ru/Zvenigorod/XXXVIII/M.html#Sekcija%20MU

СПИСОК ЦИТИРУМОЙ В АВТОРЕФЕРАТЕ ЛИТЕРАТУРЫ

1C. В.Д.Шафранов. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. ЖЭТФ, 1957, **33**, вып.3, с. 710-722.
2C. В.Д. Шафранов − Равновесие плазмы в магнитном поле. В кн.: Вопросы теории плазмы. М., Госатомиздат., 1963, вып.2, с. 92 − 131.
3C. Л.Е.Захаров, В.Д.Шафранов − Равновесие плазмы с токов в тороидальных системах. Вопросы теории плазмы. М., Энергоиздат, 1982, выпуск 11. с.118.
4C. Ю.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров − Математическое моделирование плазмы. М., Издательская фирма «Физико-математическая литература», ВО «Наука», 1993, с. 125−147.
5C. Л.М.Коврижных, С.В.Щепетов. Описание плазмы в стеллараторе с помощью усредненных МГД уравнений. Физика плазмы, Т.6, 1980, с. 976.
6C. J.M.Greene, J.L.Johnson. Determination of hydromagnetic equilibria. Physics of Fluids, 1961, vol. 4, pp.875-890.
7C. Ф.С.Зайцев. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. «Макс-Пресс», Москва. 2011, 639 с.

8C. С.И.Похожаев. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. ДАН СССР. 1965. т.165. с.36-39.
9C. H.Keller, D.J.Cohen. − Some positone problems suggested by nonlinear heat generation. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, vol. 19, No 12, pp. 1361-1376.
10C. P.L.Lions. − On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. SIAM Reviev, 1982, V.24, N4. P. 441-467.
11C. D.A. De Feguiriedo. − Positive solutions of semilinear elliptic problems. Lect. Notes in Math. 1982, Vol. 957. P. 34-87.
12C. R.P.Sperb.− Extension of two theorems of Payne to some nonlinear Dirichlet problems. Z. angew. Math. and Phys. (ZAMP). 1975. Vol. **26**, No 6, pp. 721−726.
13C. L.M.Degtyarev, V.V.Drozdov. An inverse variable technique in the MHD-equilibrium problem. Computer Physics Reports 2 (1985), 341-387.
14C. S.P.Hirshman, W.I.Van Rij, P.Merkel. Three-dimensional free boundary calculations using a spectral green's function method. Computer Physics Communications, 43 (1986), 143-155.

15C. А.Б.Кузнецов, С.В.Щепетов и Х.А.Хименец. Реальная и мнимая точность метода усреднения для стеллараторов. Краткие сообщения по физике, 2003, № 1, с.16-22.

16C. R.R. Khayrutdinov and V.E. Lukash. Studies of Plasma Equilibrium and Transport in a Tokamak Fusion Device with the Inverse-Variable Technique // J. Comput. Physics, **109** (1993), pp. 193-201.

17C. В.Э.Лукаш, В.Н. Докука, Р.Р. Хайрутдинов. Программно-вычислительный комплекс ДИНА в системе MATLAB для решения задач управления плазмой токамака // ВАНТ, сер. Термоядерный синтез, вып. 1, 2004, с. 40-49.
18C. ITER Physics Basis. — Nuclear Fusion, 1999, v.39, no.12.
19C. Technical Basis for the ITER-FEAT Outline Design. — ITER EDA Documentation Series, no.19, IAEA, Vienna, 2000.
20C. JET Team. Fusion Energy Production from a Deuterium-Tritium Plasma in the JET Tokamak. Nuclear Fusion, 1992, vol. 32, n. 2, pp. 187-203.
21C. H. Yamada. Overview of results from the Large Helical Device. Nuclear Fusion, **v. 51**, 2011, 094021 (12pp).
22C. S.Inagaki, N.Tamura, et al. Fluctuations with long-distance correlation in quasi-stationary and transient plasmas of LHD. Nuclear Fusion, **v. 52**, 2012, 023022 (7pp).
23C. M.Wanner, V. Erckmann, J.-H. Feist, W. Gardebrecht, D. Hartmann, R. Krampitz, H. Niedermeyer, H. Renne1,Th. Rummel, F. Schauer, L. Wegener, F. Wesner, G.A. Muller, W. Kasparek, M. Thumm and G. Dammertz. Status of WENDELSTEIN 7-X construction. Nuclear Fusion, **v.43**, 2003, pp. 416–424.

24C. Вабищевич П.Н., Дегтярев Л.М., Дроздов В.В. Квазиполярные потоковые координаты в задачах МГД равновесия. Препринт ИПМ АН СССР № 112, 1981.
25C. Jardin S.C., Larrabee D.A. Feedback stabilization of rigid axisymmetric modes in tokamaks. // Nuclear fusion, 1982, v. 22, No.8, pp. 1095-1098.
26C. Емельянов С.В., Коровин С.К., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Задачи и теоремы по теории линейной обратной связи. Москва, Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004 г.
27C. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. Москва, «Наука», 1997 г.
28C. M.A. Abdou, S.E. Berk, A. Ying, Y.K.M. Peng, S. Sharafat, J.D. Galambos, et al. Results of an international study on a high volume plasma-based neutron source for fusion blanket development. Fusion Technol., 1996, vol. 29.
29C. I. Tazhibayeva, O. Pivovarov, G. Shapovalov, E. Azizov «Tokamak KTM Progress Activity for Preparation on First Plasma Start-up», abstract and report for 23–th Fusion Energy Conference, FEC-23, Dajeon, Korea, p. 11-17, 2010.
30C. Азизов Э.А., Докука В.Н., Хайрутдинов Р.Р., Минеев А.Б. Разработка и анализ программных сценариев разрядов в плазме Казахстанского материаловедческого токамака (КТМ). — ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез, 2009, вып. 4, с. 37—53.
31C. Докука В.Н., Хайрутдинов Р.Р. Расчет основных сценариев разряда на токамаке КТМ. — Технический отчет. ТРИНИТИ, г. Троицк, 2005 г.
32C. Б. В. Кутеев, П. Р. Гончаров, В. Ю. Сергеев, В. И. Хрипунов. Мощные нейтронные источники на основе реакций ядерного синтеза. Физика плазмы, 2010, том 36, № 4, с. 307–346.
33C. Голиков А.А., Кутеев Б.В. Выбор параметров режима стационарного разряда в компактном токамаке. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, 2010, выпуск 2, с. 50-58.
34C. Кутеев Б.В., Лукаш В.Э., Петров В.С., Шпанский Ю.С. Магнитная система нейтронного источника ТИН-СТ. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, 2010, выпуск 4, с. 40-47.
34C. П.Р. Гончаров, Б.В. Кутеев, А.А. Голиков, В.Э. Лукаш, Р.Р.Хайрутдинов, Ю.С. Шпанский, В.Ю. Сергеев, А.С. Быков,М.П. Грязневич. Сопоставление нейтронного выхода классических и сферических токамаков. Вопросы Атомной Науки и Техники. Серия Термоядерный Синтез, 2011, выпуск 2, с. 3-10.
35C. B.V. Kuteev, E.A. Azizov, A.S. Bykov, A.Yu. Dnestrovsky,V.N. Dokuka, G.G. Gladush, A.A. Golikov, P.R. Goncharov, M. Gryaznevic, M.I. Gurevich, A.A. Ivanov, R.R. Khairutdinov, V.I. Khripunov, D. Kingham, A.V. Klishchenko, V.A. Kurnaev, V.E. Lukash, S.Yu. Medvedev, P.V. Savrukhin, V.Yu. Sergeev, Yu.S. Shpansky, A. Sykes, G. Voss and A.V. Zhirkin. Steady-state operation in compact tokamaks with copper coils. Nuclear Fusion, **v. 51**, 2011, 073013 (6 pp).
36C. Ivanov A.A., Khayrutdinov R.R., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu. New adaptive grid plasma evolution code SPIDER. // 32nd EPS Conference on Plasma Phys. Tarragona, 27 June - 1 July 2005 ECA Vol.29C, P-5.063 (2005).

37C. Degtyarev L., Martynov A., Medvedev S., Troyon F., Villard L., Gruber R. The KINX ideal MHD stability code for axisymmetric plasmas. // Computer Physics Communications 103 (1997) 10-27.
38C. Galkin S.A., Ivanov A.A., Medvedev S.Yu., Poshekhonov Yu.Yu. Comparison of tokamak axisymmetric mode growth rates from linear MHD and equilibrium evolution approaches. — Nuclear Fusion, 1997, vol. 37, № 10, p. 1455.