Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

МОИСЕЕВ Тихон Евгеньевич

О разрешимости краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со смешанными граничными условиями

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена *на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.*

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор *Зарубин Александр Николаевич*

доктор физико-математических наук,
профессор *Макин Александр Сергеевич*

доктор физико-математических наук,
профессор *Репин Олег Александрович*

Ведущая организация: *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН*

Защита состоится " 05" июня 2013 г. в 15часов 30 минут на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 2-й учебный корпус, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
профессор, доктор физико-математических наук Е.В. ЗАХАРОВ

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Работа посвящена изучению разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа. Одним из первых, кто поставил и решил корректную задачу для уравнений смешанного типа был Трикоми, чье имя и название получило уравнение

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Задача Трикоми — найти регулярное решение уравнения (1), когда задаются условия первого рода на границе области эллиптичности и на одной из характеристик уравнения (1). При определенных требованиях на градиент решения уравнения на линии изменения типа, Трикоми удалось решить эту задачу. Метод решения этого уравнения — это сведение уравнения (1) к сингулярному интегральному уравнению с последующей его регуляризацией. Этот метод остается и сейчас одним из основных при решении уравнений смешанного типа. Трикоми также сформулировал еще одну задачу для уравнения (1), когда носителем данных является не вся характеристика, а только ее часть. Соответствующая задача получила название "задача с отходом от характеристики". Эта задача существенно трудней, чем просто задача Трикоми.

Геллерстедт в докторской диссертации (1935 г.) поставил новые задачи для уравнения Трикоми, которые называются теперь задачами Геллерстедта.

Отметим еще работу С. А. Чаплыгина "о газовых струях", написанную им в 1909 г., но получившую признание после 1945 г.

Новым толчком к изучению задач смешанного типа и уравнений, вырождающихся на границе области послужила статья М. В. Келдыша, опубликованная в 1951 г., в которой он показал, что задача Дирихле для вырождающихся на границе области уравнений, вообще говоря, некорректно поставлена. Подробные результаты об уравнениях, вырождающихся на границе и об уравнениях смешанного типа, можно найти в книгах М. М. Смирнова (1966, 1970, 1985 гг.) и книге А. В. Бицадзе “Некоторые классы уравнений в частных производных” (1981 г.) , а также в монографии О. И. Маричева, А. А. Килбаса, О. А. Репина “Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами” (2006 г.). В этой монографии на современном уровне изложена часть наиболее важных результатов, взятая из книг М. М. Смирнова , А. В. Бицадзе, Е. И. Моисеева и научных статей других авторов, вышедших с 1950 г . по 2006 г. В этой же книге приведено уравнение Лаврентьева–Бицадзе, которое появилось в 1950 г.

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Для этого уравнения, М. А. Лаврентьевым был предложен аналог задачи Трикоми, которая формулируется следующим образом: введем область $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1 = \{\, 0 < r < 1,\ 0 < \Theta < \pi \,\}$ — полукруг в верхней полуплоскости. На границе полукруга задано условие

$$u(1, \Theta) = f(\Theta), \tag{3}$$

где функция $f(\Theta)$ — функция из класса Гельдера с некоторым показателем $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{D}_2$ — это область в нижней полуплоскости, ограниченная отрезком линии изменения типа и характеристиками уравнениями (2). Для простоты будем считать, что

$$u(x, -x - 1) = 0, x \in (-1, 0). \tag{4}$$

Кроме этого, на линии изменения типа должны выполняться условия сопряжения

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, -0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, +0), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0). \tag{6}$$

В этих предположениях А. В. Бицадзе доказал принцип экстремума для задачи (2)–(6). Экстремум не может достигаться на линии изменения типа уравнения. Из этого сразу следует единственность задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

А. В. Бицадзе получил изящное представление задачи Трикоми в эллиптической части области в виде контурного интеграла

$$u(z) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\nu} f(t)\,\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz}\right]\,dt, \tag{7}$$

используя формулу Келдыша–Седова. Этот метод приведен в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата “Методы теории функций комплексного переменного”. Е. И. Моисеев получил эту формулу спектральным методом, выписав решение задачи Трикоми в виде биортогонального ряда, а затем просуммировав этот ряд. Большой вклад в развитие спектральной теории решения краевых задач дифференциальных уравнений внес академик В. А. Ильин.

В общем случае можно показать, что все предыдущие рассуждения верны и для кривой Ляпунова (существование и единственность решения задачи (2)–(6), но выписать решение для кривой Ляпунова в явном виде, вообще говоря, невозможно.

Отметим, что А. В. Бицадзе вывел своеобразную формулу среднего значения для гармонической функции

$$u(0,0) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi} u(r,\Theta)\,\left(\mathrm{tg}\,\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\,d\Theta.$$

А. В. Бицадзе исследовал также случай, когда в области эллиптичности задана нормальная производная. Он также доказал, что решение задачи Трикоми с отходом от характеристики при определенных ограничениях существует и единственно. Впоследствии эти ограничения были сняты. А. В. Бицадзе показал, что задача Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе некорректно поставлена и указал те области, для которых эта задача может быть корректна.

Ф. И. Франкль обнаружил ряд важных приложений уравнений смешанного типа к задачам трансзвуковой газовой динамики и теории сопел Лаваля. Им была поставлена новая задача, известная теперь, как задача Франкля.

Следующим этапом стало рассмотрение уравнение Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda^2 u = 0, \tag{8}$$

или

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) исследовал С. М. Пономарев, а уравнение (9) — Е. И. Моисеев. С. М. Пономарев выписал собственные функции для уравнения (8) и исследовал их на полноту.

Е. И. Моисеев для уравнения (9) получил априорные оценки решения задачи Трикоми, а при $\lambda = 0$ построил явно функцию Грина для задачи Трикоми. Он впервые установил области на комплексной плоскости, в которых нет точек спектра задачи Трикоми для таких уравнений, как уравнение Лаврентьева–Бицадзе и уравнение Трикоми со спектральным параметром. Е. И. Моисеев исследовал также уравнение Трикоми и получил результаты, аналогичные результатам уравнения Лаврентьева–Бицадзе, то есть нашел сектора на комплексной плоскости, где не лежит спектр задачи Трикоми. Эти результаты изложены в книге Е. И. Моисеева “Уравнения смешанного типа со спектральным параметром”. В 1984 и 1987 гг. он находит точные условия полноты, минимальности и базисности неортогональных систем синусов и косинусов с нецелочисленным индексом. Основываясь на этих результатах, он публикует цикл статьей в 1990–1992 гг., в которых был предложен спектральный метод решения задач Трикоми и Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, а также для уравнения Трикоми и вырождающихся уравнений через биортогональные ряды. Однако вопрос о разрешимости задач со смешанными краевыми условиями в эллиптической части области практически не был исследован. Настоящая диссертация и призвана восполнить этот пробел.

Задачи со смешанными краевыми условиями возникают при рассмотрении нелокальных краевых задач типа Бицадзе–Самарского или при сведении нелокальной задачи Геллерстедта к двум локальным задачам. Кроме упомянутых авторов вопросами разрешимости уравнений смешанного типа занимались следующие ученые: В. Ф. Волкодавов, В. Н. Врагов, Т. Д. Джураев, В. Н. Диденко, В. И. Жегалов , А. Н. Зарубин , Т. Ш. Кальменов, Г. Д. Каратопраклиев, Н. Ю. Капустин, И. Л. Кароль, А. Г. Кузьмин, О. А. Ладыженская, А. М. Нахушев, О. А. Репин, С. П. Пулькин , К. Б. Сабитов, М. С. Салахитдинов, А. П. Солдатов, А. А. Полосин, А. В. Псху, Р. С. Хайлурин.

Эти авторы и их ученики развивали как традиционные направления, так и ставили новые задачи для уравнений смешанного типа.

Цель диссертационной работы. Изучение разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа со смешанными краевыми условиями в эллиптической части области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Изучение разрешимости задачи Геллерстедта с условиями склеивания Франкля на линии изменения типа уравнения.

Представление решений указанных задач в виде биортогональных рядов и изучение их сходимости.

Получение эффективных интегральных представлений решений указанных задач.

Выяснение условий разрешимости соответствующих задач и единственности их решений .

Получение формул среднего значения гармонической функции для выяснения применимости принципа экстремума .

Нахождение функции Грина в явном аналитическом виде для некоторых задач.

Научная новизна.

1. Впервые получена формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе, когда на радиусах этого сектора наклонные производные с постоянным углом наклона равны нулю. Доказано, что эта формула справедлива, если сумма углов наклона производных не отрицательна, и не справедлива в противоположном случае. Эта формула совпадает с формулой среднего значения А. В. Бицадзе при сумме углов наклона производных равной нулю. Полученная в диссертации формула необходима при применении принципа экстремума для гармонической функции.

2. Впервые исследована разрешимость краевой задачи для гармонической функции в круговом секторе, когда на дуге сектора задано условие первого рода, а на радиусах сектора наклонные производные равны нулю. Доказано, что такая задача однозначно разрешима, если сумма углов наклона производных неотрицательна. Когда эта сумма меньше нуля, однородная задача имеет нетривиальное решение, а неоднородная задача всегда разрешима при любых данных Дирихле на дуге сектора. Полученные решения выписаны в виде биортогональных рядов. Эти же решения выписаны в виде восьми интегралов типа Коши. Одним из частных случаев этих решений является изящная интегральная формула А. В. Бицадзе. Все результаты справедливы для любой области, которая является образом конформного отображения кругового сектора.

3. Впервые изучена разрешимость двух задач Трикоми со смешанными краевыми условиями (на одной части границы эллиптической области задано краевое условие первого рода, а на другой — наклонная производная). Для

одной из них доказано существование нетривиального решения однородной задачи при определенном угле наклона производной и однозначная разрешимость неоднородной задачи при других углах. Для сопряженной задачи Трикоми доказано, что в зависимости от угла наклона производной, задача либо условно разрешима, либо однозначно. Решения этих задач выписаны в виде биортогональных рядов.

4. Впервые рассмотрены задачи Трикоми со смешанными краевыми условиями и с условием склеивания Франкля на линии изменения типа уравнения. Доказано, что в зависимости от значения параметра склеивания и угла наклона производной задачи либо однозначно разрешимы, либо однородная задача имеет нетривиальное решение и при этом неоднородная всегда разрешима, либо неоднородная задача условно разрешима. Для решений этих задач получены интегральные представления в виде интегралов типа Коши.

5. Впервые изучены задачи Геллерстедта с условиями склеивания Франкля на линии изменения типа уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Доказано, что в зависимости от значений параметров склеивания задачи Геллерстедта либо однозначно разрешимы, либо однородная задача имеет нетривиальное решение и при этом неоднородная всегда разрешима, либо неоднородная задача условно разрешима. Для решений этих задач получены интегральные представления в виде интегралов типа Коши.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Предложенные методы могут быть использованы для дальнейшего изучения и развития теории уравнений смешанного типа. Полученные результаты могут применяться для решения прикладных математических задач. Например, для ряда важных приложений уравнений смешанного типа к задачам трансзвуковой газовой динамики и теории сопел Лаваля.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на международных конференциях: “Тихонов и современная математика”

(Москва, 2006), посвященной 100-летию академика А. Н. Тихонова; “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (Москва, 2007 и 2011), посвященных памяти академика И. Г. Петровского ; “Дифференциальные уравнения и топология” (Москва, 2008), посвященной 100-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина; “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, (Москва, 2009), посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего; “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики” (Москва, 2009), посвященной 90- летию со дня рождения академика А. А. Самарского.

Доклады также были сделаны на конференции факультета ВМК МГУ “Тихоновские чтения” (Москва, 2010) и на конференции МГУ “Ломоносовские чтения” (Москва, 2011), посвященной 300-летию со дня рождения М. В. Ломоносова.

Результаты работы неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах кафедры вычислительных методов, а также кафедры функционального анализа и его применений.

Публикации. Основное содержание и результаты диссертации представлены в 15 работах автора, опубликованных в журналах, входящих в перечень ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разделенных на 15 параграфов и списка литературы из 45 наименований. Общий объем диссертации 160 страниц.

Содержание работы

Во введении приведены основные исторические этапы развития теории уравнений смешанного типа, на основании чего ставятся цели данной работы и обосновывается ее актуальность. Кроме того, формулируется научная новизна и значимость полученных результатов, а также излагается краткое содержание работы.

В первой и второй главах получены предварительные результаты, необходимые для решения дальнейших задач. **В первой главе** диссертации рассматриваются два нелокальных аналога задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, в эллиптической части области которого заданы нелокальные условия Бицадзе–Самарского. Доказано, что каждая из этих задач сводится к двум локальным задачам и формулируются две теоремы о единственности и существовании решений этих локальных задач. Кроме того, получено решение краевой задачи для уравнения Пуассона со смешанными краевыми условиями и нелокальным условием четности в области, ограниченной полукругом. Для этой задачи построена в явном аналитическом виде функция Грина, определяемая формулой

$$
\begin{aligned}
G_j(\alpha,\beta,\zeta,\eta) = \frac{1}{2\pi}\Bigg[\ln\left(\frac{(\alpha-\zeta)^2+(\beta-\eta)^2}{(\alpha+\zeta)^2+(\beta+\eta)^2}\right)^{1/2} &+ \\
+\ (-1)^j \ln\left(\frac{(\alpha-\zeta)^2+(\beta+\eta)^2}{(\alpha+\zeta)^2+(\beta-\eta)^2}\right)^{1/2} &+ \\
+\ \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\eta}{\beta-\zeta} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha+\eta}{\beta+\zeta} &+ \\
+\ (-1)^j \operatorname{arctg}\frac{\alpha+\eta}{\beta-\zeta} + (-1)^{j-1}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\eta}{\beta+\zeta}\Bigg]&, \quad j=1,2. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Во второй главе изучается разрешимость краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями трех видов. Краевые условия – это заданная нормальная производная на части границы и наклонная производная на другой ее части. Решение выписано в виде биортогонального ряда. В качестве примера приведем один из основных результатов этой главы из третьего параграфа.

2.3. Построение нетривиального решения однородной задачи при $k < 0$.

2.3.3. Постановка задачи. В области

$$D = \{(r, \Theta) : \; 0 < r < 1, \; 0 < \Theta < \pi/2\},$$

$\overline{D}$ — замыкание области D, рассмотрим смешанную краевую задачу. Найти в области D функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{11}$$

и следующим краевым условиям: неоднородное условие первого рода

$$u(1, \Theta) = f(\Theta), \quad \Theta \in [0, \pi/2], \tag{12}$$

где $f(\Theta)$ – функция из класса Гёльдера, при $y = 0$ наклонная производная с постоянным углом наклона k

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)\bigg|_{y=0} = 0, \quad x \in (0, 1), \tag{13}$$

а при $x = 0$ условие второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad y \in (0, 1). \tag{14}$$

Под регулярным решением задачи (11)–(14) будем понимать функцию, принадлежащую классу $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^2(D)$, непрерывно дифференцируемую вплоть до границы, за исключением точек $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, в которых $\operatorname{grad} u$ может иметь особенности ниже первой степени.

Теорема 0.1. *[2.6] Если $k < 0$ и $u(0, 0) \neq 0$, то нетривиальное решение однородной задачи (11)–(14) существует и выписывается в виде ряда*

$$u(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{\alpha_n} \cos \alpha_n \left(\frac{\pi}{2} - \Theta \right) - C, \tag{15}$$

где C – произвольная постоянная, не равная нулю. Ряд (15) сходится равномерно и других линейно независимых решений задача (11)–(14) не имеет. Коэффициент α_n определяется равенством $\alpha_n = -(2/\pi)\operatorname{arctg} k + 2n$, а B_n – коэффициенты биортогонального разложения.

В третьей главе впервые получена формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе, когда на радиусах этого сектора наклонные производные с постоянным углом наклона равны нулю. Доказано, что эта формула справедлива, если сумма углов наклона производных не отрицательна, и не справедлива в противоположном случае. Эта формула совпадает с формулой среднего значения А.В. Бицадзе при сумме углов наклона производных равной нулю.

Получен критерий однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для гармонической функции в секторе круга, на дуге которого задано первое краевое условие, а на радиусах задаются наклонные производные с постоянным углом наклона на каждом из радиусов. Решение этой задачи выписано в виде биортогонального ряда. Построено нетривиальное решение однородной задачи. На основе полученных результатов изучена разрешимость двух задач Трикоми со смешанными краевыми условиями. Для одной из этих задач доказано существование нетривиального решения однородной задачи при определенном угле наклона производной, а при других углах — однозначная разрешимость неоднородной задачи. Для другой задачи Трикоми доказано, что в зависимости от угла наклона производной задача либо условно разрешима, либо однозначно разрешима. Условие разрешимости явно выписано в виде интеграла с помощью формулы среднего значения.

3.1. О единственности решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа

3.1.1. Постановка задачи

В области $\mathcal{D} = [\{r, \vartheta\} : \ 0 < r < 1, \ 0 < \vartheta < \pi/2]$ требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{16}$$

которое удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \tag{17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + k\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{\vartheta=0} = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{18}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \varkappa\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \quad 0 < r < 1. \tag{19}$$

При условии $k + \varkappa < 0$ и $u(0,0) \neq 0$ построено явно нетривиальное решение однородной задачи (16)–(19) в области $\mathcal{D}$ и доказана единственность решения при условии $k + \varkappa \geq 0$.

Решение $u \in C^2(\mathcal{D}) \cap C(\bar{\mathcal{D}})$ ($\bar{\mathcal{D}}$ – замыкание области $\mathcal{D}$) непрерывно дифференцируемо до границы, за исключением точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\pi/2)$, и $\operatorname{grad} u$ может иметь особенности ниже первой степени в этих точках.

Отметим, что при $\varkappa = 0$ задача (16)–(19) переходит в задачу, которая рассматривалась в работе [6]; функция $f(\vartheta)$ принадлежит классу Гёльдера.

Теорема 0.2. *[3.1] Однородная задача (16)–(19) имеет только нулевое решение в двух случаях:*

1) $k + \varkappa \geq 0$;

2) $k + \varkappa < 0$ *и* $u(0,0) = 0$.

Теорема 0.3. *[3.2] При* $k + \varkappa < 0$ *и* $u(0,0) \neq 0$ *существует только одно линейно независимое нетривиальное решение однородной задачи (16)–(19) и оно определяется формулой (20).*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{2n-2(\vartheta_0+\vartheta_1)/\pi} \sin\left[\left(2n - \frac{2(\vartheta_0+\vartheta_1)}{\pi}\right)\vartheta + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right] - C. \tag{20}$$

Здесь $\operatorname{tg}\vartheta_0 = k$, $\operatorname{tg}\vartheta_1 = \varkappa$, причем $\vartheta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\vartheta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

В случае $k + \varkappa \geq 0$ будем искать решение неоднородной задачи (16)–(19) в виде

$$u = C + \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{2n-2(\vartheta_0+\vartheta_1)/\pi} \sin\left[\left(2n - \frac{2(\vartheta_0+\vartheta_1)}{\pi}\right)\vartheta + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}\right].$$

3.2. О разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со смешанными краевыми условиями

3.2.1. Постановка задачи

В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$, где $\mathcal{D}_+ = (0 < r < 1,\ 0 < \vartheta < \pi/2)$, (r, ϑ) – полярные координаты, а $\mathcal{D}_-$ – область, ограниченная отрезком $[0,1]$ оси Ox и отрезками прямых $y = -x$, $x \in [0, 1/2]$, $y = x - 1$, $x \in [1/2, 1]$, требуется найти регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0, \tag{21}$$

с краевыми условиями, записанными в полярной системе координат в области $\mathcal{D}_+$ и в декартовой системе координат в области $\mathcal{D}_-$:

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \tag{22}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \gamma \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_+ \tag{23}$$

и

$$u(x, x-1) = 0, \quad x \in [1/2, 1] \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_-. \tag{24}$$

Регулярное решение задачи (21)–(24) изучается в классе функций

$$u \in C^0(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D}_+) \cap C^2(\mathcal{D}_-)$$

($\bar{\mathcal{D}}$ – замыкание области $\mathcal{D}$).Предполагается непрерывность частных производных уравнения (21) при переходе через линию изменения типа $y = 0$ и $\operatorname{grad} u$ может иметь особенности ниже первой степени в угловых точках области $\mathcal{D}_+$. Функция $f(\vartheta)$ принадлежит $C^\alpha[0, \pi/2]$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$.

Задача (21)–(24) сводится в области $\mathcal{D}_+$ к следующей задаче: найти гармоническую функцию $u(r, \vartheta)$ в области $\mathcal{D}_+$, удовлетворяющую краевым условиям (22) и (23), заданным в $\mathcal{D}_+$, и условию, заданному на линии изменения типа уравнения:

$$\left.\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{\vartheta=0} = 0, \quad 0 < r < 1. \tag{25}$$

Теорема 0.4. *[3.3] Решение однородной задачи (21)–(24) имеет только нулевое решение при условии* $1 + \gamma \geq 0$.

Теорема 0.5. *[3.4] При условии* $1+\gamma < 0$ *однородная задача (21)–(24) имеет только одно линейно независимое решение вида*

$$u = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{2n-m(\gamma)} \sin\left[(2n - m(\gamma))\vartheta + \frac{3\pi}{4}\right] - C, \\ \displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-y)^{2n-m(\gamma)} - C. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь и ниже $m(\gamma) \equiv 1/2 + 2\pi^{-1}\operatorname{arctg}\gamma$, C *– произвольная ненулевая константа,*

$$A_n = C\int\limits_0^{\pi/2} H_n(\vartheta)\, d\vartheta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

– коэффициенты биортогонального разложения, где H_n *– биортогональная система.*

Теорема 0.6. *[3.5] При условии* $1+\gamma<0$ *решение неоднородной задачи имеет вид*

$$u=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^{2n-m(\gamma)}\sin\left[(2n-m(\gamma))\vartheta+\frac{3\pi}{4}\right],\\ \displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-y)^{2n-m(\gamma)}.\end{cases}\tag{27}$$

В случае $1+\gamma<0$ *решение определяется с точностью до решения однородной задачи (21)–(24), заданного равенством (26).*

В формулах (27) $C_n=\int_0^{\pi/2}f(\vartheta)H_n(\vartheta)\,d\vartheta$, $n=0,1,2,\dots,$ – коэффициенты биортогонального разложения, H_n – биортогональная система.

Теорема 0.7. *[3.6] При условии* $1+\gamma\geq 0$ *неоднородная задача (21)–(24) имеет единственное решение и оно может быть записано в виде*

$$u=\begin{cases}\displaystyle D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n r^{2n-m(\gamma)}\sin\left[(2n-m(\gamma))\vartheta+\frac{3\pi}{4}\right],\\ \displaystyle D_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}D_n(x-y)^{2n-m(\gamma)}.\end{cases}\tag{28}$$

3.3. Формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе

Исчерпывающим образом решен вопрос о справедливости формулы среднего значения для гармонической в круговом секторе функции, удовлетворяющей на прямолинейных участках границы этого сектора однородным краевым условиям типа наклонной производной с коэффициентами k и $\varkappa$ соответственно. Доказана справедливость этой формулы при $k+\varkappa\geq 0$, и установлено, что при $k+\varkappa<0$ эта формула, вообще говоря, не справедлива.

3.3.1. Постановка задачи

Введем область

$$\mathcal{D} = \big[\{ r, \theta \} : \; 0 < r < r_0, \; 0 < \theta < \alpha_0, \text{ где } \; \alpha_0 \in (0, 2\pi) \big],$$

представляющую круговой сектор. Здесь r_0 — радиус окружности, α_0 — фиксированное число. В секторе задана гармоническая функция $u(r,\theta)$, т. е. в $\mathcal{D}$

$$\Delta u = 0, \tag{29}$$

а на границе сектора заданы граничные условия

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + k\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\theta=0} = 0, \quad 0 < r < r_0, \tag{30}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \varkappa\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\theta=\alpha_0} = 0, \quad 0 < r < r_0. \tag{31}$$

Для гармонической функции $u(r,\theta)$ (функция дважды-непрерывно-дифференцируема в области $\mathcal{D}$ и непрерывна в замыкании области $\mathcal{D}$) установлена формула среднего значения

$$\int\limits_0^{\alpha_0} \frac{u(r,\theta)\,d\theta}{\left[\sin\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha_0}\right)\right]^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \left[\cos\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha_0}\right)\right]^{\frac{2\theta_1}{\pi}}} = \frac{u(0,0)}{\pi}\,\alpha_0\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta_0}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta_1}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\theta_0+\theta_1}{\pi}\right)} \tag{32}$$

В формуле (32) $\theta_0 = \operatorname{arctg} k$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}\varkappa$, поэтому интегралы в левой части существуют. $\Gamma(x)$ — Гамма-функция Эйлера.

Теорема 0.8. *[3.7] Формула среднего значения (32) справедлива при* $k+\varkappa \geq 0$ *и, вообще говоря, несправедлива при* $k+\varkappa < 0$*.*

Формула (32) неверна при $k+\varkappa < 0$. В этом случае однородная задача имеет нетривиальное решение

$$u \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(n-\frac{\theta_0+\theta_1}{\pi}\right)\frac{\pi}{\alpha_0}} \sin\left[\left(n - \frac{(\theta_0+\theta_1)}{\pi}\right)\frac{\pi}{\alpha_0}\,\theta + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right] \;-\; C,$$

в котором постоянная C не обращается в нуль.

Отметим, что в начале координат достигается один из экстремумов, следовательно, для этой функции не выполняется формула среднего значения (32).

Ранее установленные формулы среднего значения

$$u(0,0) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int\limits_0^{\pi} u(r,\theta) \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{1/2},$$

$$u(0,0) = \frac{1}{\pi\sqrt{k^2+1}} \int\limits_0^{\pi} u(r,\theta) \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\frac{2\operatorname{arcctg} k}{\pi}},$$

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{u(r,\theta)}{\sqrt{\sin\theta}} = u(0,0)\, \frac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}$$

вытекают из установленной нами формулы (32) при выборе соответствующих значений θ_0 и θ_1.

Первые две из этих формул использовались для доказательства единственности задачи Трикоми, а последняя — при доказательстве единственности “внешней” задачи Геллерстедта.

3.4. Об условной разрешимости задачи Трикоми со смешанными краевыми условиями

В этом случае краевое условие задачи Трикоми задается на характеристике, выходящей из начала координат в отличие от п.2. Доказано, что в зависимости от угла наклона производной, задача либо имеет единственное решение, либо условно разрешима с условием разрешимости

$$\int\limits_0^{\alpha_0} f(\vartheta)\, \frac{\sqrt{\sin\left(\pi\vartheta/2\alpha_0\right)}}{\left[\cos\left(\pi\vartheta/2\alpha_0\right)\right]^{\frac{2\operatorname{arctg}\varkappa}{\pi}}}\, d\vartheta = 0. \qquad (33)$$

В четвертой главе получено интегральное представление решения для уравнения Лапласа с тремя различными краевыми условиями. Это интегральное представление в частном случае совпадает с изящной формулой А. В. Бицадзе. Решение выписывается в виде интегралов типа Коши для восьми различных значений параметров.

Приведено эффективное интегральное представление решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со смешанными краевыми условиями в эллиптической части области и с условием склеивания Франкля

4.1. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями

Получено интегральное представление решения для уравнения Лапласа с тремя различными краевыми условиями. В зависимости от постановки задачи однородная краевая задача может иметь нетривиальные решение, в других случаях решение однородной задачи равно нулю. Отметим, что неоднородная задача всегда разрешима.

4.1.1. Постановка задачи

В области $\mathcal{D} = \{(r, \vartheta) : \ 0 < r < 1, \ 0 < \vartheta < \pi\}$, (r, ϑ) – полярные координаты, требуется найти регулярное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{34}$$

которое удовлетворяет смешанным краевым условиям

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \tag{35}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{\vartheta=0} = 0, \tag{36}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \operatorname{tg}\vartheta_1 \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{\vartheta=\pi} = 0. \tag{37}$$

Условия (36) и (37) – это задание наклонных производных с постоянными углами наклона. Кроме того, будем предполагать, что $\vartheta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\vartheta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$, а в условии (35) $f(\vartheta)$ принадлежит классу Гёльдера.

Задача (34)–(37) тесно связана с уравнением Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0,$$

которое при $y > 0$ является уравнением Лапласа. Ранее в работах подробно рассматривался ряд постановок, например: задача Трикоми, задача Геллерстедта и другие задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

Вернемся к задаче (34)–(37). Регулярное решение будем искать в классе функций $u \in C^2(\mathcal{D}) \cap C^0(\bar{\mathcal{D}})$, непрерывно дифференцируемых до границы, за исключением точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, в которых $\operatorname{grad} u$ может иметь особенность ниже первой степени.

4.1.2. Основная теорема

Теорема 0.9. *[4.1] Решение задачи (34)–(37) можно записать в виде контурного интеграла*

$$u(z) = A_0 + \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\pi} [f(\arg t) - A_0] \left(\frac{z}{t}\right)^{\beta/2+1} \left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{\gamma/\pi} \times$$

$$\times \left(\frac{1+t}{1+z}\right)^{\beta+\gamma/\pi+1} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz}\right) dt, \quad (38)$$

в котором $z = r\exp(i\vartheta)$, $t = \exp(i\varphi)$ – комплексные числа; γ – полуокружность, которая начинается в точке $(+1,0)$ и заканчивается в точке $(-1,0)$, а параметры β и γ определяются равенствами

$$\beta = -2 - \frac{2(\vartheta_0 + \vartheta_1)}{\pi}, \quad \gamma = 2\vartheta_0 + \pi. \quad (39)$$

Замечание 0.1 (о выборе константы A_0) *При условии* $\vartheta_0+\vartheta_1<0$ *константа* A_0 *– произвольное вещественное число, при* $\vartheta_0+\vartheta_1=0$ *полагаем* $A_0=0$, *а при условии* $\vartheta_0+\vartheta_1>0$ *константа* A_0 *определяется из соотношения*

$$\int\limits_0^\pi (f(\varphi)-A_0)h_1(\varphi)\,d\varphi=0,$$

где $h_1(\varphi)$ *– первая биортогональная функция к системе* $\sin[(n+\beta/2)\vartheta+\gamma/2]$, $n=1,2,\ldots$

4.2. Эффективное интегральное представление одной краевой задачи со смешанными краевыми условиями

Получено интегральное представление регулярного решения краевой задачи для уравнения Лапласа с тремя различными краевыми условиями.

Приведем один случай $\theta_0+\theta_1=0$.

Для случая $\theta_0<0$ и $\theta_1>0$ решение задачи (34)–(37) выписывается в виде интеграла типа Коши

$$u(z)=\\ =\operatorname{Re}\frac{1}{i\pi}\int\limits_\gamma f(\arg t)\cdot\left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}+1}\left(\frac{1+z}{1+t}\right)^{\frac{2\theta_1}{\pi}}\cdot\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right]dt. \quad (40)$$

$$u(z)=\\ =\operatorname{Re}\frac{1}{i\pi}\int\limits_\gamma f(\arg t)\cdot\left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}}\left(\frac{1+z}{1+t}\right)^{\frac{2\theta_1}{\pi}+1}\cdot\left[\frac{1}{t-z}+\frac{1}{1-tz}\right]dt. \quad (41)$$

Формула (41) дает решение задачи (34)–(37) в случае $\theta_0+\theta_1=0$. При $\theta_0=-\pi/4$ и $\theta_1=\pi/4$ получаем из формулы (40) формулу, которую установил

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{i\pi} \int\limits_{\gamma} f(\arg t) \cdot \left(\frac{1-z^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{1-tz} \right] dt.$$

Теорема 0.10. *[4.4] В случае $\theta_0 + \theta_1 = 0$ решение краевой задачи (34)–(37) выписывается в виде интеграла типа Коши по формулам (40) или (41) и решение в этом случае единственно.*

4.3. О разрешимости задачи Трикоми с обобщенным условием склеивания Франкля

В настоящей работе изучается разрешимость задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со смешанными краевыми условиями в эллиптической части области. На линии изменения типа уравнения градиент решения подчиняется некоторому условию. Это условие обычно называют “обобщенным условием склеивания Франкля”. Доказано, что неоднородная задача Трикоми либо имеет единственное решение, либо условно разрешима, а однородная задача имеет только тривиальное решение. Приведено эффективное интегральное представление решения данной задачи.

4.3.1. Постановка задачи

В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1 = \big\{ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi \big\}$, (r, θ) — полярные координаты, а $\mathcal{D}_2$ — треугольник в нижней полуплоскости, который ограничен отрезками прямых $y = 0$, $x \in [0,1]$, $y = -x$, $x \in [0, 1/2]$, $y = x - 1$, $x \in [1/2, 1]$, требуется найти регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0. \tag{42}$$

В области эллиптичности уравнения заданы смешанные краевые условия

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \tag{43}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \varkappa \frac{\partial u}{\partial r}\right)\Bigg|_{\theta=\pi} = 0. \tag{44}$$

Будем предполагать, что функция $f(\theta)$ удовлетворяет условию Гельдера с некоторым показателем α. Условие (44) — это задание наклонной производной с постоянным углом наклона.

В гиперболической части области уравнения Лаврентьева–Бицадзе данные заданы на одной из характеристик этого уравнения

$$u(x,-x) = 0, \quad x \in [\,0,\, \tfrac{1}{2}\,]. \tag{45}$$

Решение задачи (42)–(45) будем искать в классе функций:

$$u \in C^0(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D}_1) \cap C^2(\mathcal{D}_2).$$

На линии изменения типа уравнения будем требовать выполнение условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,-0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,+0), \\ k\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,+0). \end{aligned} \tag{46}$$

Условие (46) будем называть “обобщенным условием склеивания по Франклю”.

Введем обозначения $k = \operatorname{tg} theta_0$, $\varkappa = \operatorname{tg} theta_1$.

Замечание 0.2. *При $\varkappa = 0$ получаем важный результат, что задачи Трикоми с условием сшивания по Франклю (46) и с заданием первого краевого условия (43) и нормальной производной (в нее переходит наклонная производная при $\varkappa = 0$) могут стать условно разрешимыми.*

Теорема 0.11. *[4.6] В случае $\theta_0 - \theta_1 = 0$ краевая задача (42)–(46) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие (47), а решение выписывается в виде интеграла типа Коши.*

Необходимое и достаточное условие разрешимости задач имеет вид

$$\int\limits_0^\pi \frac{f(\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\theta_0/\pi}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\theta_1/\pi}}\, d\theta = 0. \tag{47}$$

Теорема 0.12. *[4.7] В случае $\theta_0 - \theta_1 > 0$ краевая задача (42)–(46) имеет единственное решение, которое выписывается в виде интеграла типа Коши.*

Теорема 0.13. *[4.8] В случае $\theta_0 - \theta_1 < 0$ краевая задача (42)–(46) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие (47), и решение выписывается в виде интеграла типа Коши.*

4.4. О неединственности решения задачи Трикоми с обобщенным условием склеивания Франкля

Доказано, что решение неоднородной задачи Трикоми либо имеет единственное решение, либо определено с точностью до решения однородной задачи. Неоднородная задача всегда разрешима при любых входных данных, вне зависимости от того, имеет ли однородная задача Трикоми нетривиальное решение или нет. Приведено эффективное интегральное представление решения данной задачи как в эллиптической, так и в гиперболической части области уравнения.

4.4.1. Постановка задачи

Отличается от постановки **4.3.1** тем, что в гиперболической части области уравнения Лаврентьева–Бицадзе данные заданы на одной из характеристик этого уравнения

$$u(x, x-1) = 0, \quad x \in [\tfrac{1}{2},\, 1]. \tag{48}$$

Пятая глава посвящена изучению разрешимости задач типа Геллерстедта, для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неклассическим условием склеивания градиента решения. Такие условия обычно называют “обобщенным условием склеивания по Франклю”. Будет изучена разрешимость задачи Геллерстедта, когда данные задаются на внешних и внутренних характеристиках уравнения. Отметим, что только неоднородная задача Геллерстедта с данными на внешних характеристиках уравнения или однозначна разрешима или определена с точностью до нетривиального решения однородной задачи. Все остальные варианты задания данных на других характеристиках уравнения приводят либо к однозначной разрешимости неоднородной задачи либо к условной разрешимости. В каждом параграфе выписаны интегральные представления решения задачи как в эллиптической, так и в гиперболической части уравнения. Решение при этом является регулярным. В начале каждого параграфа, дается краткая постановка задачи и затем приводится интегральные формулы для решения.

5.1. Задача Геллерстедта с неклассическими условиями склеивания градиента решения на линии изменения типа с данными на внешних характеристиках

5.1.1. Постановка задачи

Введем область $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, где $\mathcal{D}_1 = \{0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi\}$ — открытый полукруг единичного радиуса, область $\mathcal{D}_2$ — это область в нижней части полуплоскости, ограниченная отрезками прямых $y = 0$, $y = -x$, $y = x - 1$. Область $\mathcal{D}_3$ — это область, ограниченная отрезками прямых $y = 0$, $y = x$, $y = -x-1$. Нетрудно видеть, что это область является прямоугольным треугольником.

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0. \tag{49}$$

Уравнение (49) определено в области $\mathcal{D}_1$ и в открытых областях $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$, (граница этих областей не включается). В эллиптической части уравнения (49) на границе единичного полукруга задано краевое условие:

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \tag{50}$$

где функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию Гёльдера на отрезке$[0, \pi]$ с некоторым показателем α.

В гиперболической части уравнения данные задаются на характеристиках уравнения $y = x - 1$, $y = -x - 1$. Именно,

$$\begin{aligned} &u(x, x-1) = 0, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ &u(x, -x-1) = 0, \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{51}$$

Кроме того, предполагается, что на линии изменения типа уравнения (49) $y = 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(x, -0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, +0), \quad -1 < x < 1,\ 0 < x < 1, \\ &\kappa \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0), \quad -1 < x < 0, \\ &k \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{52}$$

где и κ и k — постоянные числа, и, кроме того, ни одно из них не обращается в ноль. Отметим, что при $\kappa = k = 1$, задача переходит в классическую задачу Геллерстедта.

Решение задачи (49)–(52) уравнения мы будем искать в классе функций:

$$u \in C(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D}_1) \cap C^2(\mathcal{D}_2) \cap C^2(\mathcal{D}_3).$$

Тот факт, что градиент решения задачи (49)–(52) не является непрерывной функцией на линии изменения типа уравнения, приводит к тому, что при условии $\kappa + k < 0$ у однородной задачи (49)–(52) ($f(\theta) = 0$) есть нетривиальные решения. Отметим, что неоднородная задача ($f(\theta) \neq 0$) при $\kappa + k \geq 0$ однозначно разрешима.

Введем обозначения $k = \operatorname{tg}\theta_0$, $\kappa = \operatorname{tg}\theta_1$. Будем предполагать, что $\theta_0 \in \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$, угол $\theta_1 \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$.

Задача (49)–(52) сводится в области эллиптичности к следующей задаче:

$$\Delta u = 0, \tag{53}$$

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \tag{54}$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{\vartheta=0} = 0, \tag{55}$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \operatorname{tg}\vartheta_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{\vartheta=\pi} = 0. \tag{56}$$

Итак , справедлива

Теорема 0.14. *[5.1] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 = 0$ решение краевой задачи (49)–(52) выписывается в виде интеграла типа Коши и решение в этом случае единственно.*

Теорема 0.15. *[5.2] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 < 0$ решение краевой задачи (49)–(52) выписывается в виде интеграла типа Коши.*

Замечание 0.3. *Если положить $f(\arg t) = 0$, то получим нетривиальное решение задачи (49)–(52).*

Теорема 0.16. *[5.3] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 > 0$ решение краевой задачи (49)–(52) выписывается в виде интеграла типа Коши и решение в этом случае единственно.*

Замечание 0.4. *При $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \pi/4$ получаем важные формулы для классического варианта внешней задачи Геллерстедта*

$$u(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\big(f(\arg t) - B_0\big)\cdot\sqrt{\frac{z(1-z^2)}{t(1-t^2)}}\cdot\left[\frac{1}{t-z}+\frac{t}{1-tz}\right]dt + B_0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{D}_1, \tag{57}$$

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\big(f(\arg t) - B_0\big)\cdot\sqrt{\frac{(x-y)(1-(x-y)^2)}{t(1-t^2)}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{t-(x-y)}+\frac{t}{1-t(x-y)}\right]dt + B_0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{D}_2, \tag{58}$$

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\big(f(\arg t) - B_0\big)\cdot\sqrt{\frac{(x+y)(1-(x+y)^2)}{t(1-t^2)}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{t-(x+y)}+\frac{t}{1-t(x+y)}\right]dt + B_0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{D}_3. \tag{59}$$

Константа B_0 во всех формулах вычисляется по формуле среднего значения гармонической функции, которую с учетом условия (50) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{f(\theta)}{\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{2\theta_0}{\pi}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{2\theta_1}{\pi}}} = B_0\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta_0}{\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta_1}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\theta_0+\theta_1}{\pi}\right)}. \tag{60}$$

5.2. Задача Геллерстедта с неклассическими условиями склеивания градиента решения на линии изменения типа с данными на внутренних характеристиках

В данном параграфе исследована на разрешимость задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. В области эллиптичности уравнения на границе единичной полуокружности с центром в начале координат задана функция. В области гиперболичности уравнения на характеристиках уравнения заданы нулевые условия. Отметим, что обе характеристики приходят в начало координат. Такие характеристики принято называть внутренними. На линии изменения типа уравнения задаются "условия типа Франкля". Доказано, что задача либо условно разрешима, либо однозначно разрешима. В случае условной разрешимости явно выписывается условие разрешимости. Выписано интегральное представление решения во всех случаях.

5.2.1. Постановка задачи

Постановка задачи отличается от постановки задачи (49)–(52) условием (61).

В гиперболической части уравнения данные задаются на характеристиках уравнения $y = -x$, $y = x$. Именно,

$$\begin{aligned} &u(x, -x) = 0, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ &u(x, x) = 0, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Тогда задача (49)–(52) сводится в области эллиптичности к следующей задаче:

$$\Delta u = 0, \tag{62}$$

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta), \tag{63}$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{\vartheta=0} = 0, \tag{64}$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \operatorname{tg} \vartheta_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{\vartheta=\pi} = 0, \quad u(0,0) = 0. \tag{65}$$

Теорема 0.17. *[5.4] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 = 0$ решение задачи Геллерстедта существует тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (70). При выполнении условия разрешимости решение задачи выписывается в виде интеграла типа Коши и решение в этом случае единственно.*

Замечание 0.5. *При $\theta_0 = \pi/4$ и $\theta_1 = -\pi/4$, получаем формулу, которую установил А. В. Бицадзе для задачи Трикоми:*

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\arg t) \left(\frac{1 - z^2}{1 - t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{1 - tz} \right) dt. \tag{66}$$

Теорема 0.18. *[5.5] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 > 0$ решение краевой задачи Геллерстедта представимо в виде интеграла типа Коши и в этом случае единственно.*

Замечание 0.6. *При $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \pi/4$ получаем решение классического варианта задачи Геллерстедта*

$$u(z) \;=\; \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\arg t) \cdot \sqrt{\frac{z(1 - z^2)}{t(1 - t^2)}} \cdot \left[\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 - tz} \right] dt \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}_1, \tag{67}$$

$$u(x,y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\arg t) \cdot \sqrt{\frac{(x+y)(1-(x+y)^2)}{t(1-t^2)}} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{t-(x+y)} - \frac{t}{1-t(x+y)} \right] dt \quad \text{в} \ \mathcal{D}_2, \quad (68)$$

$$u(x,y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\arg t) \cdot \sqrt{\frac{(x-y)(1-(x-y)^2)}{t(1-t^2)}} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{t-(x-y)} - \frac{t}{1-t(x-y)} \right] dt + B_0 \quad \text{в} \ \mathcal{D}_3. \quad (69)$$

Теорема 0.19. *[5.6] В случае $\vartheta_0 + \vartheta_1 < 0$ решение краевой задачи Геллерстедта существует тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости. При выполнении условия разрешимости решение задачи выписывается в виде интеграла типа Коши.*

Условие разрешимости задачи может быть записано в виде

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{f(\theta)}{\left[\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{2\theta_0}{\pi}} \left[\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{2\theta_1}{\pi}}} = 0. \quad (70)$$

Основные публикации по теме диссертации.

1. Ионкин Н. И., Моисеев Т. Е. Решение задачи Геллерстедта с нелокальными краевыми условиями //ДАН. 2005. Т. 400, № 5. С. 592–595.

2. Моисеев Т. Е. О теоремах единственности решений нелокальных краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 710–712.

3. Моисеев Т. Е. Решение нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона со смешанными краевыми условиями с помощью функции Грина //Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1423–1425.

4. Моисеев Т. Е. О решении уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями. //Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 4. С. 563–566.

5. Моисеев Т. Е. Об одном варианте задачи с наклонной производной //Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 10. С. 1434–1436.

6. Моисеев Т. Е. Разрешимость краевых задач с наклонной производной //Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 7. С. 995–997.

7. Моисеев Т. Е. О неединственности решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа //Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 712–714.

8. Моисеев Т. Е. О разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со смешанными краевыми условиями //Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 10. С. 1512–1514.

9. Моисеев Т. Е. Формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе //ДАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 592–593.

10. Моисеев Т. Е. Об условной разрешимости задачи Трикоми со смешанными краевыми условиями //Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1513–1515.

11. Моисеев Т. Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями //Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1446–1451.

12. Моисеев Т. Е. Эффективное интегральное представление одной краевой задачи со смешанными краевыми условиями //ДАН. 2012. Т. 444, № 2. С. 150–152.

13. Моисеев Т. Е. О решении задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе //Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 10. С. 1454–1456.

14. Моисеев Т. Е. О разрешимости одного нелокального варианта задачи Геллерстедта //Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1404–1408.

15. Моисеев Т. Е. О полноте собственных функций одной нелокальной краевой задачи Геллерстедта //Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1568–1570.