Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

ШЕВЦОВА Ирина Геннадьевна

Оптимизация структуры моментных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор **Королев Виктор Юрьевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры Высшей математики Санкт-Петербургской государственной химико-фармацевтической академии **Розовский Леонид Викторович**
	доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ **Сенатов Владимир Васильевич**
	доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией приближённых методов и функционального анализа Вычислительного центра ДВО РАН **Чеботарёв Владимир Иванович**
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 4 октября 2013 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://cs.msu.su в разделе «Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «____» ____________ 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета В. А. Костенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Задача изучения скорости сходимости распределений сумм независимых случайных величин с нормальным законом, возможность которой предоставляется центральной предельной теоремой (ЦПТ) теории вероятностей, является одной из ключевых проблем теории вероятностей, имеет солидную историю и богата многими, в том числе выдающимися, именами. В разное время в этой области работали А. М. Ляпунов, А. Я. Хинчин, П. Леви, А. Н. Колмогоров, Г. Крамер, С. Н. Бернштейн, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоров, К.-Г. Эссеен, И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Я. Линдеберг, В. Феллер, С. В. Нагаев, В. М. Золотарев, В. В. Сазонов, В. В. Петров, Л. В. Осипов, К. Хейди, Х. Правитц, Р. Михель, П. Холл и другие выдающиеся математики. Оценкам точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин уделено большое внимание в основополагающей книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [2], в ставших классическими монографиях И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [5], В. В. Петрова [18, 19] и В. М. Золотарева [4]. Более того, этой проблематике посвящены специальные глубокие монографии Р. Н. Бхаттачария и Р. Ранга Рао [1], П. Холла [47], В. В. Сенатова [24, 57].

В 1901 г. А. М. Ляпунов [9] доказал современный вариант ЦПТ для сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих *условию Ляпунова* и установил первую оценку скорости сходимости. Оценка Ляпунова была дана в терминах специальной функции (называемой *ляпуновской дробью*) числа случайных слагаемых в сумме и их первых *моментов*. Подобные оценки в дальнейшем будут называться *моментными*. С тех пор моментные оценки скорости сходимости в ЦПТ стали традиционными, а в наше время их можно смело называть классическими. Однако, моментные оценки не безупречны. Современная критика моментных оценок основана на том, что моменты распределений слагаемых игнорируют информацию о близости исходного распределения к предельному закону, и потому в некоторых случаях такие оценки могут быть довольно грубыми. Безусловно, оценки в терминах псевдомоментов (см., например, работы В. М. Золотарёва [3], В. И. Паулаускаса [16], В. В. Ульянова [31], С. В. Нагаева и В. И. Ротаря [11]), или, скажем, «хвостов» распределения слагаемых (см., например, работы К.-Ч. Хейди [49], Л. В. Осипова [14], Л. В. Розовского [20, 21], П. Холла и А. Д. Барбура [46, 48]) могут быть точнее моментных, более того, самой точной и неулучшаемой оценкой рассматриваемой величины является сама эта величина. Однако оценка, по своему смыслу, должна иметь более простой вид по сравнению с оцениваемой величиной и эффективно вычисляться, требуя лишь наиболее доступную информацию об исходном распределении. Как правило, альтернативы моментным оценкам, изучаемые в литературе, такими свойствами не обладают, что затрудняет их практическое применение. Моменты же, являясь интегральными характеристиками, могут быть эффективно оценены по выборке при помощи стандартных статистических процедур, особенно, в случае одинаково распределённых слагаемых. Другими словами, моменты являются наиболее простыми, удобными, доступными и потому наиболее привлекательными характеристиками распределения слагаемых, позволяющими делать выводы о точности нормальной аппроксимации для распределения их суммы. Однако при этом естественно возникает задача о наиболее эффективном использовании информации, содержащейся в первых моментах распределений слагаемых, с целью повышения точности итоговых оценок. Данная диссертация посвящена исследованию именно этой задачи — задачи оптимизации структуры *моментных* оценок. При этом основное внимание уделено оценкам *равномерной* метрики, не такой удобной с математической точки зрения, как, например, идеальные метрики, но очень популярной в разнообразных приложениях.

Наиболее простая и общая равномерная оценка скорости сходимости распределений нормированных сумм

$$\overline{F}_n(x) = \mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_n < xB_n), \quad x \in \mathbf{R},$$

независимых центрированных случайных величин (с.в.) $X_1, \ldots, X_n$ с $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 > 0$, $\sigma_j^2 = \mathsf{E}X_j^2$, $\beta_{2+\delta,j} \equiv \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$, устанавливается неравенством Эссеена [40] (при $\delta = 1$ — Берри–Эссеена [38, 39]), согласно которому

$$\Delta_n \equiv \sup_x |\overline{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_0(\delta)\ell_n,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения (ф.р.) стандартного нормального закона, $\ell_n = B_n^{-2-\delta} \sum_{j=1}^n \beta_{2+\delta,j}$, $C_0(\delta)$ зависит только от δ. Отметим, что в случае одинаково распределённых (о.р.) с.в.

$$\ell_n = \frac{\beta_{2+\delta,1}}{\sigma_1^{2+\delta} n^{\delta/2}} = O(n^{-\delta/2}),$$

и, согласно оценке Эссеена, скорость сходимости в ЦПТ возрастает с ростом δ. Однако так происходит только до тех пор, пока $\delta \leqslant 1$: при $\delta \geqslant 1$ скорость сходимости остаётся в общем случае такой же, как и при $\delta = 1$, а именно, имеет порядок $O(n^{-1/2})$, поэтому случай $\delta = 1$ представляет наибольший интерес. Более того, при $\delta = 1$ известна [41] положительная нижняя оценка абсолютной константы $C_0(1)$:

$$C_0(1) \geqslant \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097\ldots\ .$$

Для случая $\delta < 1$ и о.р.с.в. в 1966 г. Л. В. Осипов и В. В. Петров [15] доказали, что если распределение слагаемых *фиксировано* (не зависит от n), то $\Delta_n = o(n^{-\delta/2})$, что ставит под сомнение «правильность» (точность) оценок типа $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$, в т.ч. оценки Эссеена, и вызывает вопрос об эффективности и целесообразности их использования. В диссертации же впервые показано, что неравенство Эссеена устанавливает точный порядок для специальной схемы серий, т.е. оно не может быть улучшено *равномерно* в классе рассматриваемых распределений. Кроме того, в диссертационной работе впервые найдены положительные нижние оценки абсолютных констант $C_0(\delta)$, а также нижние оценки аналогичных асимптотических констант (когда в оценке допускается наличие дополнительного слагаемого порядка $o(\ell_n)$, $\ell_n \to 0$), справедливые и для бесконечно малых значений ляпуновской дроби ℓ_n.

В случае $\delta = 1$, как отмечалось многими исследователями, неравенство Берри–Эссеена даже с теоретически наилучшим возможным значением $(\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi})$ абсолютной константы $C_0(1)$ зачастую устанавливает довольно грубую оценку скорости сходимости в ЦПТ. Известные к настоящему времени способы устранения этого недостатка, сохраняющие моментную форму итоговой оценки, можно условно разделить на три группы:

- на распределения слагаемых накладываются дополнительные ограничения моментного и/или структурного типа в виде требований конечности моментов четвёртого порядка и выше и/или предположения о «гладкости» или, наоборот, решётчатости исходного распределения. В таком случае выписываются асимптотические разложения типа Эджворта–Крамера или Грама–Шарлье и др., позволяющие получить оценку скорости сходимости порядка $O(n^{-1})$ и выше, определяемого максимальным порядком абсолютного момента, существующего у слагаемых (см., например, работы В. В. Сенатова [24–27]);

- происходит замена изучаемого объекта (равномерной метрики) более «удобным»: так, например, в случае решётчатого распределения слагаемых вместо равномерной метрики более эффективно удаётся оценить максимальное расстояние в точках решётки, сдвинутой на половину её шага (грубо говоря, в серединках интервалов постоянства допредельной решётчатой функции распределения) [24], а для средней и дзета-метрик в работах Л. Гольдстейна [43] и И. С. Тюрина [59] недавно были найдены точные оценки;

- рассматриваются довольно конкретные частные случаи: так, например, в работе К. Хиппа и Л. Маттнера [32] для симметричных слагаемых с одинаковым распределением Бернулли найдена точная оценка, в работах С. В. Нагаева и В. И. Чеботарёва [12, 13] изучается точность нормальной аппроксимации для сумм независимых одинаково распределённых бернуллиевских случайных величин (не обязательно симметричных) и получены оценки, более точные по сравнению с общими.

Возникает естественный вопрос: можно ли уточнить неравенство Берри–Эссеена, не накладывая *никаких дополнительных* ограничений на распределения слагаемых. Результаты, полученные в диссертации, позволяют дать конструктивный положительный ответ на этот вопрос. А именно, в диссертации показано, что если использовать не только информацию *ограничительного* характера о моментах максимального порядка распределения слагаемых, аккумулируемую в ляпуновской дроби ℓ_n, но и дополнительную информацию неограничительного характера о моментах младшего порядка, аккумулируемую в таких функциях, как, например,

$$\tau_n = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2+\delta} \leqslant \ell_n \quad \text{или} \quad \tau_n = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \beta_{\delta,j}\sigma_j^2 \leqslant \ell_n,$$

где $\beta_{\delta,j} = \mathsf{E}|X_j|^\delta$, $j = 1, \ldots, n$, — абсолютные моменты порядка δ (существование которых вытекает из существования моментов более старшего порядка $2+\delta$), то оценки вида

$$\Delta_n \leqslant C\ell_n + K\tau_n \tag{$*$}$$

и

$$\Delta_n \leqslant C\ell_n + K\tau_n + o(\ell_n), \quad \ell_n \to 0, \tag{$**$}$$

с некоторыми (вообще говоря, различными) $C > 0$ и $K = K(C) \in \mathbf{R}$ могут быть существенно точнее оценок, не содержащих второго слагаемого с τ_n. Дело в том, что величина τ_n в ряде случаев оказывается существенно меньше ляпуновской дроби ℓ_n и даже может быть величиной более высокого порядка малости, чем ℓ_n, при $\ell_n \to 0$. Оценки типа $(*)$ и $(**)$ будем называть *моментными оценками с уточнённой структурой*, при этом оценки типа $(*)$, не содержащие остаточного члена $o(\ell_n)$, будем называть *абсолютными*, а оценки типа $(**)$ — *асимптотическими*, даже если остаточный член $o(\ell_n)$ указан в явном виде вплоть до значений абсолютных констант и формально такая оценка верна при любых значениях ляпуновской дроби ℓ_n. Если при этом доказана неулучшаемость коэффициента $K \neq 0$ при некотором C, то соответствующую оценку будем называть *моментной оценкой с оптимальной структурой*. Процесс минимизации правой части по C будем называть *оптимизацией структуры моментных оценок*. Если $K = 0$, т.е. в оценке участвует только ляпуновская дробь ℓ_n, то такие оценки будем называть оценками с *простой* структурой (соответственно абсолютными и асимптотическими), даже если доказана неулучшаемость константы C.

На практике часто возникает ситуация, когда количество n слагаемых в сумме заранее не известно. Такая ситуация характерна, например, для медицинской статистики или страховой практики, когда фиксируется не число наблюдений (страховых случаев), а период времени для сбора информации. В таком случае естественно предположить, что индекс суммирования (число слагаемых в сумме) является целочисленной случайной величиной. В диссертации также изучается точность нормальной аппроксимации для распределений *пуассоновских случайных сумм* (*обобщённых пуассоновских распределений*), т.е. сумм независимых одинаково распределённых случайных величин, в которых индекс суммирования не зависит от слагаемых и имеет распределение Пуассона. Выбор именно пуассоновского распределения для числа слагаемых в сумме обусловлен тем, что, во-первых, пуассоновский процесс является математической моделью потока событий, абсолютно хаотично рассредоточенных во времени (т.е. характеризует максимальную неопределённость исследователя в отношении моментов наступления наблюдаемых событий), а, во-вторых, на основе оценок скорости сходимости пуассоновских случайных сумм по известному алгоритму можно конструировать оценки скорости сходимости случайных сумм с произвольным безгранично делимым асимптотически вырожденным индексом и смешанных пуассоновских случайных сумм, в частности, обобщённых процессов Кокса, способных отразить дополнительную информацию о характеристиках процесса наступления наблюдаемых событий (см., например, работу В. Ю. Королева и автора [27]).

Асимптотической теории случайного суммирования посвящены монографии А. Гута [45], В. М. Круглова и В. Ю. Королева [8], Б. В. Гнеденко и В. Ю. Королева [42], В. В. Калашникова [50], В. Ю. Королева, В. Е. Бенинга и С. Я. Шоргина [7, 35] и другие. Полученные в данной диссертации оценки скорости сходимости дополняют результаты, приведённые в указанных источниках.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью работы является разработка нового направления в области предельных теорем теории вероятностей для сумм независимых случайных величин — построение моментных оценок скорости сходимости, имеющих оптимальную структуру. Для достижения указанной цели были решены следующие задачи:

- усовершенствованы аналитические методы теории вероятностей: доказаны новые точные моментные неравенства и оценки для характеристических функций;
- построены новые асимптотические равномерные оценки скорости сходимости распределений сумм детерминированного числа независимых случайных величин, имеющие оптимальную структуру главного члена, а также их абсолютные аналоги с уточнённой структурой, которые явились основой нового метода построения неравномерных оценок скорости сходимости в ЦПТ и точных моментных оценок скорости сходимости обобщённых пуассоновских распределений;
- предложена детальная классификация асимптотически правильных констант в ЦПТ и впервые найдены нижние асимптотические моментные оценки скорости сходимости для распределений с тяжёлыми «хвостами».

Методы исследования. В работе используются современные методы теории вероятностей (метод характеристических функций, методы сглаживания), различные численные методы, методы оптимизации и выпуклого анализа, методы математического и функционального анализа, а также оригинальные методы и инструменты, разработанные в диссертации:

- новые точные моментные оценки для характеристических функций;
- новые неулучшаемые моментные неравенства, в частности, оптимальным образом реструктуризированное моментное неравенство Эссеена;
- метод вычисления абсолютных констант в неравенствах типа Берри–Эссеена и их структурных уточнениях;
- метод сглаживания, основанный на расширении класса ядер в неравенствах сглаживания;
- метод получения неравномерных оценок с помощью оптимально реструктуризированных равномерных оценок;
- метод построения оценок скорости сходимости для сопровождающих безгранично делимых распределений, основанный на оптимально реструктуризированных оценках скорости сходимости исходных распределений.

Научная новизна. В диссертации предложено и разработано новое направление в области предельных теорем теории вероятностей — оптимизация структуры моментных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин. В рамках этого нового направления получены следующие основные результаты:

1. Построены равномерные оценки с оптимальной структурой, учитывающие не только информацию о моментах старшего порядка, но и дополнительную информацию неограничительного характера о моментах младших порядков, для чего установлены новые точные оценки для характеристических функций и неулучшаемые моментные неравенства.
2. На основе полученных результатов предложен новый метод построения оценок скорости сходимости в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин, позволивший получить:
   - неравномерные моментные оценки скорости сходимости в классической ЦПТ, существенно уточняющие известные;
   - точные моментные оценки скорости сходимости обобщённых пуассоновских распределений.
3. Впервые поставлена и решена задача о нахождении асимптотически правильной константы в ЦПТ для пуассоновских случайных сумм. Построены асимптотические равномерные оценки в явном виде, эквивалентные верхней грани нижних оценок, а также абсолютные равномерные и неравномерные оценки. Впервые показано, что скорость сходимости сопровождающих безгранично делимых распределений выше, чем исходных.

4. Предложена детальная классификация асимптотически правильных констант в ЦПТ. Введены понятия верхней, условной верхней и нижней асимптотически правильных констант. Найдены их точные значения и/или двусторонние оценки, получены соотношения между новыми и ранее введёнными константами. Впервые найдены нижние асимптотические моментные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для распределений с тяжёлыми «хвостами».

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер и одновременно допускают удобное применение к решению различных практических задач, связанных с использованием нормальной аппроксимации, например, в страховании, финансовой математике, теории управления запасами, шифровании, при прогнозировании надёжности сложных инфотелекоммуникационных систем и других областях. Конкретные примеры задач вместе со ссылками на соответствующие работы приведены в тексте диссертации в разделе 2.4 на с. 226–227.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах «Теория риска и смежные вопросы» кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ, Международных семинарах по проблемам устойчивости стохастических моделей (2005, 2006, 2007, 2009, 2011, 2012 гг.), Международном конгрессе по прикладной и промышленной математике (Цюрих, 16–20 июля 2007 г.), Барселонской конференции по асимптотической статистике «BAS–2008» (Беллатерра, Барселона, 1–5 сентября 2008 г.), Международной конференции «European Meeting of Statisticians» (Тулуза, Франция France, 20—24 июля 2009 г.), Российско-японском симпозиуме «Стохастический анализ сложных статистических моделей» (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 16 сентября 2009 г.), Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» НИИ математики и механики Казанского университета (Казань, 9 октября 2009 г.), Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН А. Н. Ширяева (21 октября 2009 г. и 18 ноября 2009 г.), 10-й Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 28 июня – 02 июля 2010 г.), Международной конференции «Prague Stochastics–2010» (Прага, 30 августа – 2 сентября 2010 г.), 2-м Международном конгрессе «Ультрасовременные телекоммуникации и системы управления ICUMT-2010» (2010), научной конференции «Тихоновские чтения» (ВМК МГУ, Москва, 25–29 октября 2010), 14-й Международной конференции «Applied Stochastic Models and Data Analysis» (Рим, 7–10 июня 2011 г.), Международной конференции по стохастическим моделям и их применению, посвящённой 80-летнему юбилею М. Арато (Дебрецен, Венгрия, 22–24 августа 2011 г.), научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 24 апреля 2012 г.), Международной конференции «Теория вероятностей и её приложения» в честь 100-летия со дня рождения Б. В. Гнеденко (МГУ, Москва, 26–30 июня 2012 г.), 8-м Всемирном конгрессе по вероятности и статистике (Стамбул, 9–14 июля 2012 г.), Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ РАН под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт–Петербург, 16 ноября 2012 г.), семинаре «Oberseminar Math. Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie» под руководством Ф. Гётце в Университете г. Билефельд (Билефельд, Германия, 3 декабря 2012 г.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 32 работы, из которых 27 ([1–8, 10–14, 16–28, 30]) — в центральных математических журналах (Доклады Академии наук, Теория вероятностей и её применения, Scandinavian Actuarial Journal) и журналах из перечня ВАК «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук». Список публикаций автора по теме диссертации помещён в конце автореферата.

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из оглавления, перечня сокращений и условных обозначений, введения, трёх глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 238 наименований. Используется двойная нумерация формул, теорем, лемм, следствий и замечаний: через точку указывается номер главы и номер объекта внутри главы. Общий объём работы составляет 354 страницы. Нумерация теорем и следствий в автореферате проводится независимо от диссертации, при этом в скобках справа от номера приводится ссылка на соответствующее утверждение в основном тексте диссертации.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность профессору В. Ю. Королеву за поддержку и постоянное внимание к работе и академику РАН Ю. В. Прохорову за всестороннюю поддержку.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи диссертационной работы.

В **первой главе** разработаны новые и усовершенствованы некоторые известные аналитические методы теории вероятностей, с помощью которых в последующих главах решены задачи и достигнуты цели данной диссертационной работы. Кроме того, разработанные методы можно использовать при построении моментных оценок скорости сходимости в разнообразных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. А именно, в первой главе доказаны новые точные моментные оценки для характеристических функций, в т.ч. числе оценки близости к характеристической функции рассматриваемого в данной работе предельного нормального закона, получены некоторые точные моментные неравенства, а также доказано новое неравенство сглаживания.

Востребованность оценок для характеристических функций при изучении скорости сходимости в предельных теоремах связана с теоремой непрерывности, формализованной в виде разнообразных неравенств сглаживания, с помощью которых остаточный член в предельной теореме удаётся оценить в терминах интегралов от модуля разности допредельной и предельной характеристических функций, а также их абсолютных значений. Поэтому основное внимание в первой главе уделено моментным оценкам для характеристических функций: оценкам абсолютного значения характеристической функции и оценкам точности аппроксимации характеристической функции полиномами (первыми членами разложения в ряд Тейлора) и её производными. С помощью и на основе последних можно получать оценки близости допредельной и (известной) предельной характеристических функций, поскольку поведение их разности в окрестности нуля, как правило, определяется поведением допредельной функции. В диссертации отдельное внимание уделено оценкам близости к характеристической функции нормального закона, занимающего здесь центральное место.

Пусть X — случайная величина (с.в.), заданная на некотором вероятностном пространстве (в.п.) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и такая, что $\mathsf{E}|X|^r < \infty$ для некоторого вещественного $r > 0$. Обозначим

$$\alpha_k = \mathsf{E}X^k,\ k = 1, 2, \ldots, \lfloor r \rfloor, \quad \beta_s = \mathsf{E}|X|^s,\ 0 < s \leqslant r, \quad \alpha_0 \equiv \beta_0 \equiv 1.$$

Пусть $F(x) = \mathsf{P}(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$, — функция распределения (ф.р.), $f(t) = \mathsf{E}e^{itX}$, $t \in \mathbf{R}$, — характеристическая функция (х.ф.) с.в. X.

Основные идеи, лежащие в основе новых и усовершенствованных аналитических методов, заключаются в следующем.

1. Улучшение типа зависимости моментных оценок для х.ф. от аргумента t. В диссертации предложен метод построения оценок для характеристических функций и их производных, позволяющий заменить традиционно используемые функции степенного вида более естественными для этой задачи ограниченными тригонометрическими функциями, имеющими «правильную» асимптотику при $t \to 0$. Отдельное внимание уделено оценкам остаточного члена

$$R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{(it)^k}{k!}, \quad t \in \mathbf{R},$$

и его производных в формуле Тейлора для х.ф.

Теорема 1 (теорема 1.13). *Если $\beta_n < \infty$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, то при всех $t \in \mathbf{R}$*

$$|f^{(n-1)}(t) - i^{n-1}\alpha_{n-1}| \leqslant 2\beta_{n-1} \sin\Big(\frac{\beta_n|t|}{2\beta_{n-1}} \wedge \frac{\pi}{2}\Big),$$

$$|f^{(n-1)}(t)| \leqslant \sqrt{\beta_n\beta_{n-2}}\sin\left(\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}}\right)^{1/2}|t|\wedge\frac{\pi}{2}\right),\ \textit{если } n \textit{ чётно и } \alpha_{n-1}=0,$$

$$|R_n(t)| \leqslant 2\beta_{n-1}\int_0^{|t|}\int_0^{t_{n-1}}\cdots\int_0^{t_2}\sin\left(\frac{\beta_n t_1}{2\beta_{n-1}}\wedge\frac{\pi}{2}\right)dt_1\cdots dt_{n-2}\,dt_{n-1}, \qquad (1)$$

где интеграл берётся повторный, в частности, при $|t| \leqslant \pi\beta_{n-1}/\beta_n$

$$R_n(t) \leqslant \frac{(2\beta_{n-1})^n}{\beta_n^{n-1}}\Re(-i)^n\left[\exp\left\{i\frac{\beta_n|t|}{2\beta_{n-1}}\right\} - \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\beta_n}{2\beta_{n-1}}\right)^k\frac{(i|t|)^k}{k!}\right],$$

где $\sum_{k=0}^{-1}(\cdot) \equiv 0$*. Если* n *чётно и* $\alpha_{n-1} = 0$*, то неравенство* (1) *также справедливо с заменой* $2\beta_{n-1}$ *на* $\sqrt{\beta_n\beta_{n-2}}$*.*
Если $n \geqslant 3$ *— нечётно и* $\alpha_{n-2} = 0$*, то для всех* $t \in \mathbf{R}$

$$\left|f^{(n-1)}(t) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-3}}f^{(n-3)}(t)\right| \leqslant 2\beta_{n-1}\sin\left(\frac{\beta_n|t|}{2\beta_{n-1}}\wedge\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

$$\left|f^{(n-2)}(t) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-3}}\,tf^{(n-3)}(t)\right| \leqslant 2|t|\beta_{n-1}\sin\left(\frac{\beta_n|t|}{4\beta_{n-1}}\wedge\frac{\pi}{2}\right). \qquad (3)$$

Неравенство (1) уточняет популярную оценку $|R_n(t)| \leqslant \beta_n|t|^n/n!$, традиционно используемую при построении оценок скорости сходимости в предельных теоремах, для всех значений аргумента $t \in \mathbf{R}$.

Отметим, что в левых частях неравенств (2), (3) фигурирует разность некоторых характеристических функций — при $n = 3$ это разность исходной х.ф. $f(t)$ и х.ф. так называемых преобразований нулевого смещения и смещения квадрата.

Определение 1 (также см. [44]). Пусть X — с.в. с х.ф. $f(t)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \in (0,\infty)$. Распределение, задаваемое х.ф.

$$f^{(z)}(t) \equiv \frac{f'(t)}{tf''(0)} = -\frac{f'(t)}{t\alpha_2}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad (4)$$

называется распределением X*-нулевого смещения* (X-zero biased distribution).

Определение 2 (также см. (Goldstein, 2007)). Пусть X — с.в. с х.ф. $f(t)$ и $\alpha_2 \in (0,\infty)$. Распределение, задаваемое х.ф.

$$f^{\square}(t) \equiv \frac{f''(t)}{f''(0)} = -\frac{f''(t)}{\alpha_2}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad (5)$$

называется распределением *смещения квадрата* X.

Сформулированные определения были даны в указанных в скобках работах в эквивалентной форме.

Преобразование нулевого смещения было исследовано в упомянутой работе [44], в которой с помощью результата работы Ч. Стейна [58] было, в частности, показано, что единственной неподвижной точкой преобразования нулевого смещения является нормальное распределение с нулевым средним, чем и обусловлена популярность этого преобразования при построении оценок точности нормальной аппроксимации.

В диссертационной работе изучены свойства преобразования смещения квадрата, в частности, показано, что неподвижными точками этого преобразования являются двухточечные распределения с симметричными атомами и только они, а также получена следующая фундаментальная для доказательства неравенства (2) оценка L_1-расстояния

$$L_1(X,Y)=\inf\{\mathsf{E}|X'-Y'|\colon X'\stackrel{d}{=}X,\ Y'\stackrel{d}{=}Y\},\quad \mathsf{E}|X|\vee\mathsf{E}|Y|<\infty,$$

между преобразованным распределением и исходным.

Теорема 2 (теорема 1.7). *Пусть X — с.в. с $\alpha_1=0$, $\beta_3<\infty$. Тогда для любой с.в. $X^{\square}$ с х.ф. $f^{\square}(t)$*

$$L_1(X,X^{\square})\leqslant\beta_3/\beta_2,$$

причём для любого $\varepsilon>0$ найдется двухточечное распределение с.в. X, такое что $\alpha_1=0$, $\beta_3<\infty$ и $L_1(X,X^{\square})>(1-\varepsilon)\beta_3/\beta_2$.

Аналогичная оценка $L_1(X,X^{(z)})\leqslant\beta_3/(2\beta_2)$, справедливая для любой с.в. $X^{(z)}$ с х.ф. $f^{(z)}(t)$, была доказана независимо Л. Гольдстейном [43] и И. С. Тюриным [28, 29] в 2009 г.

Вторая группа оценок для х.ф., в которых улучшен тип зависимости от аргумента, — это моментные оценки действительной части и абсолютного значения х.ф. Традиционно оценки абсолютного значения конструируются на основе оценок действительной части с использованием представления $|f(t)|^2=\mathsf{E}\cos t(X-X')$, где X' — независимая копия с.в. X, и пересчитыванием моментов с.в. $(X-X')$ в терминах моментов X.

Теорема 3 (теоремы 1.9, 1.10). *Если $\beta_{2+\delta}<\infty$ при некотором $0<\delta\leqslant1$, то при всех $t\in\mathbf{R}$*

$$\Re f(t)\equiv\mathsf{E}\cos(tX)\leqslant1-\psi_\delta\big(\beta_2^{1/2}t,\beta_{2+\delta}/\beta_2^{1+\delta/2}\big)\leqslant1-\frac{\beta_2t^2}{2}+\varkappa_{2+\delta}\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta},\qquad(6)$$

$$|f(t)|\leqslant\sqrt{1-2\psi_\delta\big(\beta_2^{1/2}t,\beta_{2+\delta}/\beta_2^{1+\delta/2}+\beta_\delta/\beta_2^{\delta/2}\big)},\quad \textit{если}\ \ \alpha_1=0,\qquad(7)$$

где

$$\psi_\delta(t,y)=\begin{cases}t^2/2-\varkappa_{2+\delta}y|t|^{2+\delta}, & y^{1/\delta}|t|<\theta^*_{2+\delta},\\ y^{-2/\delta}\big(1-\cos\big(y^{1/\delta}t\big)\big), & \theta^*_{2+\delta}\leqslant y^{1/\delta}|t|\leqslant2\pi,\\ 0, & y^{1/\delta}|t|>2\pi,\end{cases}\qquad t\in\mathbf{R},\ y>0,$$

$\theta^*_{2+\delta}$ — единственный корень уравнения $\delta\theta^2+2\theta\sin\theta=2(2+\delta)(1-\cos\theta)$ на интервале $\theta\in(\pi,2\pi)$,

$$\varkappa_{2+\delta}=\sup_{x>0}\frac{\cos x-1+x^2/2}{x^{2+\delta}}=\frac{\cos\theta^*_{2+\delta}-1+(\theta^*_{2+\delta})^2/2}{(\theta^*_{2+\delta})^{2+\delta}}.$$

Равенство в первом неравенстве в (6) достигается при каждом $t\in\mathbf{R}$ на распределении вида $\mathsf{P}(|X|=b)=b^{-2}=1-\mathsf{P}(X=0)$ с $b=\theta^*_{2+\delta}/|t|\vee(\beta_{2+\delta}^{1/\delta}\wedge$ $\wedge\,2\pi/|t|)$.

Теорема 3 впервые была доказана Х. Правитцем [54] для $\delta = 1$. Неравенство $\Re f(t) \leqslant 1 - \beta_2 t^2/2 + \varkappa_{2+\delta}\beta_{2+\delta}|t|^{2+\delta}$, $t \in \mathbf{R}$, было доказано Н. Г. Ушаковым в [60], таким образом, теорема 3 уточняет для значений аргумента $|t|$, отделённых от нуля, степенной вид известной оценки тригонометрическим, при этом неравенство (7) устанавливает для $0 < |t| < 2\pi(\beta_{2+\delta}/\beta_2+\beta_\delta)^{-1/\delta}$ мажоранту абсолютного значения характеристической функции, строго меньшую единицы. Особая роль точки $|t| = 2\pi(\beta_{2+\delta} + \beta_\delta)^{-1/\delta}$ связана с тем фактом, что это наименьший возможный период характеристической функции с.в. с фиксированными тремя абсолютными моментами β_δ, β_2 и $\beta_{2+\delta}$. Этот факт также позволяет улучшить известное моментное неравенство Мизеса для решётчатых распределений (см. теорему 4 ниже).

2. Улучшение типа зависимости различных моментных оценок от используемых моментов. В диссертации предложено вместо традиционно аффинного типа зависимости рассмотреть линейный, а вместо традиционно линейного — более эффективный нелинейный. Эта идея реализована как в различных моментных неравенствах, так и в оценках для характеристических функций.

Так, в известном точном моментном неравенстве Мизеса
$$h \leqslant 2\beta_3,$$
справедливом для любого решётчатого распределения с шагом h и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, мажоранта $g(\beta_3) = 2\beta_3$ является аффинной функцией β_3. В диссертации показано, что эту аффинную функцию можно уточнить линейной $g(\beta_3) = \beta_3 + \beta_1$, совпадающей с первоначальной только в экстремальном случае (на симметричном двухточечном распределении). Кроме того, улучшенное неравенство Мизеса в диссертации обобщено на моменты дробного порядка.

Теорема 4 (теорема 1.12). *Если распределение с.в. X является решётчатым с шагом h и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{2+\delta} < \infty$ для некоторого $0 < \delta \leqslant 1$, то*
$$h \leqslant (\beta_{2+\delta}/\beta_2 + \beta_\delta)^{1/\delta},$$
причём при $\delta = 1$ равенство достигается на симметричном распределении Бернулли: $\mathsf{P}(X = \pm h/2) = 1/2$, а при $\delta \leqslant 1$ отношение левой и правой части этого неравенства стремится к единице при
$$\mathsf{P}\left(X = \frac{h}{1+u}\right) = \frac{u}{1+u} = 1 - \mathsf{P}\left(X = -\frac{uh}{1+u}\right), \quad u \to \infty,$$
Если вдобавок распределение с.в. X симметрично, то
$$h \leqslant \max\left\{(\beta_{2+\delta}/\beta_2)^{1/\delta},\, 2\sqrt{\beta_2}\right\},$$
причём равенство $h = (\beta_{2+\delta}/\beta_2)^{1/\delta}$ доставляет распределение вида $\mathsf{P}\left(|X| = (\beta_{2+\delta}/\beta_2)^{1/\delta}\right) = (\beta_2^{1+\delta/2}/\beta_{2+\delta})^{2/\delta} = 1 - \mathsf{P}(X = 0)$, а равенство $h = 2\sqrt{\beta_2}$ — симметричное распределение Бернулли: $\mathsf{P}(X = \pm h/2) = 1/2$.

При решении задачи об асимптотически наилучшей постоянной в ЦПТ в 1956 г. К.-Г. Эссеен [41] доказал фундаментальное для этой задачи точное моментное неравенство

$$|\alpha_3| + 3h \leqslant (\sqrt{10}+3)\beta_3,$$

справедливое для любого решётчатого распределения с шагом h и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Равенство в неравенстве Эссеена достигается на специальном двухточечном распределении, называемом распределением Эссеена, для которого $\beta_3 = \sqrt{20(\sqrt{10}-3)/3} = 1.0401\ldots$. Как вытекает из теоремы 4, $h \leqslant \beta_3+\beta_1$, и задачу оценивания левой части неравенства Эссеена можно свести к построению оценок выражения $|\alpha_3|+3\beta_1$ в терминах третьего абсолютного момента β_3. Следующая теорема улучшает линейную мажоранту Эссеена $g(\beta_3) = (\sqrt{10}+3)\beta_3$ функцией нелинейной (вогнутой), учитывающей каждое конкретное значение β_3. Эта функция и определяет структуру «главного» члена в оценках точности нормальной аппроксимации, полученных во второй главе диссертационной работы.

Теорема 5 (теорема 1.4). *Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, то при всех $\lambda \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$|\alpha_3| + 3\beta_1 \leqslant \lambda\beta_3 + M(p(\lambda),\lambda),$$

где

$$p(\lambda) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+3}}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan\sqrt{\lambda^2+2\frac{\lambda-1}{\lambda+3}}\right),$$

$$M(p,\lambda) = \frac{1-\lambda+2(\lambda+2)p-2(\lambda+3)p^2}{\sqrt{p(1-p)}}, \quad 0<p\leqslant\frac{1}{2},\ \lambda\geqslant 1,$$

причём равенство достигается при каждом $\lambda \geqslant 1$ на двухточечном распределении вида

$$\mathsf{P}\big(X=\sqrt{q/p}\big) = p = 1-\mathsf{P}\big(X=-\sqrt{p/q}\big), \quad \text{где } p=p(\lambda),\ q=1-p(\lambda).$$

Неравенство Эссеена является частным случаем теоремы 5, если положить $\lambda = \sqrt{10}$, однако указанное значение λ является оптимальным (минимизирует правую часть) для единственного значения $\beta_3 = \sqrt{20(\sqrt{10}-3)/3}$, совпадающего с третьим абсолютным моментом распределения Эссеена.

Следующая теорема даёт ещё одно улучшение степенной оценки остаточного члена $R_n(t)$ и его производных в формуле Тейлора для х.ф., сохраняющее степенной вид зависимости от аргумента t, но имеющее более эффективную зависимость от моментов максимального порядка.

Теорема 6 (теорема 1.8). *Если $\beta_n<\infty$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$, то при всех $t\in\mathbf{R}$ справедливы оценки*

$$\left|\frac{d^mR_n(t)}{dt^m}\right| \leqslant \inf_{\lambda\geqslant 0}\left(\lambda|\alpha_n| + q_{n-m}(\lambda)\beta_n\right)\frac{|t|^{n-m}}{(n-m)!}, \quad m=0,1,\ldots,n-1, \qquad (8)$$

где

$$q_n(\lambda) = \sup_{x>0} \frac{n!}{x^n}\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(ix)^k}{k!} - \lambda\frac{(ix)^n}{n!}\right|, \quad \lambda \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

причём равенства в (8) *при* $n = 3$ *достигаются при каждом* $|t| \leqslant \theta^*_{3-m}$, *где* $\theta^*_1 = 2.3311\ldots$, $\theta^*_2 = \pi = 3.1415\ldots$, $\theta^*_3 = 3.9958\ldots$ (*в тексте диссертации определены строго*), *на симметричных трёхточечных распределениях вида* $\mathsf{P}(|X| = \theta^*_{3-m}/|t|) = t^2/(\theta^*_{3-m})^2 = 1 - \mathsf{P}(X = 0)$, $m = 0, 1, 2$.

В работе Х. Правитца [56] показано, что

$$q_n\left(\frac{n}{2(n+1)}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}, \quad n \geqslant 1,$$

и для этого значения λ доказано неравенство (8) при $m = 0$, т.е. для указанного значения λ сумма коэффициентов $\lambda + q_n(\lambda)$ при $|\alpha_n|$ и β_n в правой части (8) с $m = 0$ равняется единице. С точки зрения скорости сходимости к нормальному закону наибольший интерес представляет случай $n = 3$. Из результата работы Правитца вытекает, что $\lambda + q_n(\lambda) \equiv 1$ для всех $\lambda \leqslant \frac{n}{2(n+1)} \equiv \lambda_*(n)$. В диссертации же доказано для $n = 1, 2, 3$, что значение $\lambda = \lambda_*(n)$, указанное Правитцем, есть максимальное значение λ, при котором сумма $\lambda + q_n(\lambda)$ все ещё равняется единице. При $\lambda > \lambda_*(n)$ сумма $\lambda + q_n(\lambda)$ начинает расти, однако коэффициент $q_n(\lambda)$ при β_n продолжает уменьшаться, и так происходит до тех пор, пока значение $q_n(\lambda)$ не совпадёт со значением максимума в (9), если заменить в нём выражение под знаком модуля на его действительную (для нечётных n) или мнимую (для нечётных n) часть, при этом максимальное значение получившегося выражения достигается в точке $x = \theta^*_n$, а оптимальные значения $\lambda = \lambda^*(n)$, доставляющие минимум $q_n(\lambda)$, «обнуляют» оставшуюся мнимую (для нечётных n) или действительную (для чётных n) часть и имеют вид $\lambda^*(1) = 0.3108\ldots$, $\lambda^*(2) = 4\pi^{-2} = 0.4052\ldots$, $\lambda^*(3) = 0.4466\ldots$ (в тексте диссертации определены строго), т.е. оказываются строго больше соответствующих значений $\lambda_*(n)$.

Следующая теорема позволяет избавиться от использования алгебраического момента α_3 в (8) при $n = 3$.

Теорема 7 (теорема 1.5). *Если* $\alpha_1 = 0$ *и* $\beta_3 < \infty$, *то*

$$|\alpha_3| \leqslant A\big(\beta_3/\beta_2^{3/2}\big)\beta_3, \quad \text{где } A(b) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1 + 8b^{-2}} + \frac{1}{2} - 2b^{-2}} < 1, \quad b \geqslant 1,$$

причём равенство достигается при любом значении $\beta_3/\beta_2^{3/2} \equiv b$ *на двухточечном распределении вида*

$$\mathsf{P}\left(X = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2+4}\right)\right) = \frac{2 + \frac{b}{2}\left(b \mp \sqrt{b^2+4}\right)}{b^2+4}.$$

Теорема 7 улучшает неравенство Йенсена, согласно которому $|\alpha_3|/\beta_3 \leqslant 1$: в действительности это отношение для центрированных распределений строго меньше единицы и лишь стремится к единице при неограниченном возрастании $\beta_3/\beta_2^{3/2}$. Кроме того, из теоремы 7 вытекает, что если $\beta_3 = \beta_2^{3/2}$, то $\alpha_3 = 0$.

Из теорем 6, 7 и неравенства (1) вытекает

Следствие 1 (следствие 1.2, теорема 1.13). *Если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_3 < \infty$, то при всех $t \in \mathbf{R}$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
|f(t) - 1 + \alpha_2 t^2/2| &\leqslant \gamma_3\big(\beta_3/\beta_2^{3/2}\big) \cdot \beta_3|t|^3 \wedge \left[\frac{(2\beta_2)^3}{\beta_3^2}\left(\frac{\beta_3|t|}{2\beta_2} - \sin\left(\frac{\beta_3|t|}{2\beta_2} \wedge \frac{\pi}{2}\right)\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\beta_2^2}{\beta_3}\left(\left(\frac{\beta_3|t|}{\beta_2} - \pi\right)^+\right)^2\right],\\
|f(t) - 1 + \alpha_2 t^2/2| &\leqslant \varkappa_3 \beta_3 |t|^3 \leqslant 0.0992 \cdot \beta_3|t|^3, \text{ если } \alpha_3 = 0,\\
|f'(t) + \alpha_2 t| &\leqslant \gamma_2\big(\beta_3/\beta_2^{3/2}\big) \cdot \beta_3 t^2 \wedge \left[\frac{8\beta_2^2}{\beta_3}\sin^2\left(\frac{\beta_3|t|}{4\beta_2} \wedge \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\beta_2^2}{\beta_3}\left(\frac{\beta_3|t|}{\beta_2} - \pi\right)^+\right],\\
|f'(t) + \alpha_2 t| &\leqslant \pi^{-1}\beta_3 t^2 \leqslant 0.3184 \cdot \beta_3 t^2, \quad \text{если } \alpha_3 = 0,\\
|f''(t) + \alpha_2| &\leqslant \gamma_1\big(\beta_3/\beta_2^{3/2}\big) \cdot \beta_3|t| \wedge 2\beta_2 \sin\left(\frac{\beta_3|t|}{2\beta_2} \wedge \frac{\pi}{2}\right),\\
|f''(t) + \alpha_2| &\leqslant \varkappa_1 \beta_3|t| \leqslant 0.7247 \cdot \beta_3|t|, \quad \text{если } \alpha_3 = 0,
\end{aligned}$$

где $\varkappa_3$ определена в формулировке теоремы 3:

$$\varkappa_3 \equiv \sup_{x>0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^3} = 0.0991\ldots, \quad \varkappa_1 \equiv \sup_{x>0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.7246\ldots,$$

$$\gamma_n(b) = \inf_{\lambda \geqslant 0} \frac{\lambda A(b) + q_n(\lambda)}{n!} = \min_{\lambda_*(n) \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*(n)} \frac{\lambda A(b) + q_n(\lambda)}{n!}, \quad n = 1, 2, 3,$$

причём $\gamma_n(1) \cdot n! = \varkappa_n$, $n = 1, 3$, $\gamma_2(1) = \pi^{-1}$.

С помощью приведённых теорем в диссертации получены новые оценки близости характеристических функций к х.ф. нормального закона, улучшающие известные. Для с.в. X с $\beta_2 < \infty$ положим

$$r(t) \equiv \left|f(t) - e^{it\alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_1^2)t^2/2}\right|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Для упрощения обозначений будем считать, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Пусть $\beta_3 < \infty$ Поскольку третий момент стандартного нормального распределения обращается в нуль, асимптотика $r(t)$ при $t \to 0$ определяется функцией $|R_3(t)| = |f(t) - 1 + t^2/2|$. Однако даже в случае $\alpha_3 = 0$, оценить эту функцию величиной порядка $o(|t|^3)$ при $t \to 0$ *равномерно* в классе распределений с $\beta_3 < \infty$ нельзя, так как коэффициент γ в неравенстве $|R_3(t)| \leqslant \gamma\beta_3|t|^3$ не может быть меньше, чем $\varkappa_3 = 0.0991\ldots$ (см. [56]). Следствие 1 устанавливает в этом смысле «правильную» оценку: оно позволяет получить нелинейную (вогнутую) мажоранту $\gamma \leqslant \gamma_3(\beta_3)$, непрерывно возрастающую от $\varkappa_3$ до $1/6$ с ростом β_3, с одной стороны, а с другой, — уточнить при больших значениях β_3 степенную функцию $|t|^3$ двойным интегралом от более естественной тригонометрической функции. Таким образом, с помощью теоремы 1 и следствия 1 в диссертации доказана оценка

$$r(t) \leqslant g(t, \beta_3) + o(|t|^3), \quad t \to 0,$$

где

$$g(t,\beta_3) = \min\left\{\gamma_3(\beta_3)\beta_3|t|^3,\ \frac{8}{\beta_3^2}\Big(\frac{\beta_3|t|}{2} - \sin\Big(\frac{\beta_3|t| \wedge \pi}{2}\Big)\Big) + \beta_3\Big(\Big(|t| - \frac{\pi}{\beta_3}\Big)^+\Big)^2\right\},$$

а остаточный член $o(|t|^3)$ указан в явном виде (см. теорему 1.14 в основном тексте диссертации).

Следующая теорема, устанавливающая точную оценку третьего абсолютного центрального момента в терминах нецентрального, полезна для метода урезаний и в диссертации используется при построении неравномерных оценок скорости сходимости.

Теорема 8 (теорема 1.6). *Если $\beta_3 < \infty$, то*

$$\mathsf{E}|X - \alpha_1|^3 \leqslant \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27}\,\mathsf{E}|X|^3 < 1.3156 \cdot \mathsf{E}|X|^3,$$

причём равенство достигается на двухточечном распределении вида

$$\mathsf{P}\bigg(X = \frac{6\alpha_1}{4 - \sqrt{7} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}\bigg) = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}{6}.$$

Теорема 8 была позже и независимо доказана И. Пинелисом [53].

Завершает первую главу новое неравенство сглаживания, обобщающее (а значит, уточняющее) неравенства сглаживания Берри [38], Эссеена [39], Золотарёва [3], Ван Бика [61] и Паулаускаса [17] на более широкий класс «ядер».

Для вещественной интегрируемой функции p обозначим $||p|| = \int_{-\infty}^{\infty}|p(x)|\,dx$, $\widehat{p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(x)\,dx$, $t \in \mathbf{R}$. Положим $V_p(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} p^+(x)\,dx$, $\alpha \geqslant 0$, где $p^+(x) = \max\{p(x), 0\}$. Обозначим через Λ класс всех вещественных интегрируемых функций $p(x)$, $x \in \mathbf{R}$, таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx > 0$. Для любого $p \in \Lambda$ уравнение $2V_p(\alpha) - ||p|| = 0$, $\alpha \geqslant 0$, имеет хотя бы один конечный корень; точную верхнюю грань всех корней указанного уравнения обозначим α_p. Тогда $\alpha_p < \infty$, и для всех $\alpha > \alpha_p$ имеем $2V_p(\alpha) - ||p|| > 0$.

Теорема 9 (теорема 1.16). *Пусть $F(x)$ — ограниченная неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации, $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(+\infty) = G(+\infty)$. Тогда для любых $p \in \Lambda$ и $\alpha > \alpha_p$*

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \frac{\Delta_p + \sup_u \int_{-\alpha}^{\alpha} |G(\alpha - y + u) - G(u)| p^+(y)\,dy}{2V_p(\alpha) - ||p||},$$

где

$$\Delta_p = \sup_x \left|\int_{-\infty}^{\infty} (F(y) - G(y))p(x - y)\,dy\right|.$$

Во **второй главе** рассматривается задача оптимизации структуры моментных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм детерминированного числа независимых случайных величин.

Для $0 < \delta \leqslant 1$ обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$ множество всех ф.р. с.в. X с $\mathsf{E}X = 0$ и $\mathsf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$. Пусть $\mathcal{F}_{2+\delta,\,s}$ — множество всех симметричных ф.р. (т.е. при всех $x \in \mathbf{R}$ удовлетворяющих соотношению $F(-x) = 1 - F(x+0)$) из $\mathcal{F}_{2+\delta}$. При $\delta = 0$ под $\mathcal{F}_2$ подразумеваем класс всех ф.р. с нулевым средним и конечным вторым моментом.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые с.в., заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ и имеющие функции распределения $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, $j = \overline{1, n}$. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\sigma_j^2 = \mathsf{E}X_j^2, \quad \beta_{2+\delta,\,j} = \mathsf{E}|X_j|^{2+\delta}, \quad \beta_{\delta,\,j} = \mathsf{E}|X_j|^{\delta}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 > 0, \quad \ell_n = B_n^{-2-\delta} \sum_{j=1}^n \beta_{2+\delta,\,j}, \quad \tau_n = B_n^{-2-\delta} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2+\delta},$$

$$\overline{F}_n(x) = \mathsf{P}(S_n < xB_n) = (F_1 * \ldots * F_n)(xB_n), \quad x \in \mathbf{R},$$

где символ $*$ означает свёртку. Пусть $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — соответственно плотность и ф.р. стандартного нормального закона. Положим

$$\Delta_n = \Delta_n(F_1, \ldots, F_n) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\overline{F}_n(x) - \Phi(x)|, \ n \geqslant 1.$$

Несложно убедиться, что в сделанных выше предположениях для всех $n \geqslant 1$

$$\ell_n \geqslant \tau_n \geqslant n^{-\delta/2},$$

причём последнее неравенство выполняется со знаком равенства, если с.в. $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены (о.р.).

Следующие две теоремы дают исчерпывающее решение задачи оптимизации структуры главного члена асимптотических моментных оценок равномерной метрики для случая, когда слагаемые обладают конечными третьими моментами.

Теорема 10 (теорема 2.1, следствие 2.1). *Для любого $0 < \delta \leqslant 1$ при всех $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ справедливы оценки: при $\delta = 1$*

$$\Delta_n \leqslant \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{1,j}\,\sigma_j^2}{B_n^3} + \begin{cases} 5.4527\ell_n^{5/3}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 2.4606\ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3; \end{cases} \tag{10}$$

при $\delta < 1$

$$\Delta_n \leqslant C(\delta)\ell_n + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\ell_n + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{\delta,\,j}\,\sigma_j^2}{B_n^{2+\delta}} \right)^{1/\delta} + \begin{cases} \widetilde{C}_\delta \ell_n^{4/(2+\delta)}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ \widehat{C}_\delta \ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases}$$

где $C(\delta) = \pi^{-1} 2^{\delta/2} \Gamma(1 + \delta/2) \sup_{x>0} \left| e^{ix} - 1 - ix - (ix)^2/2 \right| / x^{2+\delta}$, а константы $\widetilde{C}_\delta$, $\widehat{C}_\delta$ указаны в диссертации в явном виде. При этом значения коэффициентов $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\ldots$ в первом слагаемом (при ляпуновской дроби ℓ_n) и

$(2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\ldots$ *во втором слагаемом в правой части неравенства* (10) *не могут быть уменьшены.*

Теорема 11 (теоремы 2.3, 2.4). *Для любых $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$ при всех $c \geqslant 2/(3\sqrt{2\pi})$ справедливы оценки*

$$\Delta_n \leqslant c\ell_n + K(c)\tau_n + \begin{cases} 2.7176 \cdot \ell_n^{7/6} \wedge A_1(c)\ell_n^{4/3}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 1.7002 \cdot \ell_n^{3/2} \wedge A_2(c)\ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases} \tag{11}$$

где $A_j(c)$ — монотонно убывающие функции с $\lim\limits_{c\to 2/(3\sqrt{2\pi})} A_j(c) = \infty$, $j = 1, 2$, но принимающие конечные значения при всех $c > 2/(3\sqrt{2\pi})$ и указанные в диссертации в явном виде,

$$K(c) = \frac{M(p(\lambda), \lambda)}{6\sqrt{2\pi}}\bigg|_{\lambda = 6\sqrt{2\pi}c - 3},$$

функция $M(p, \lambda)$ определена в формулировке теоремы 5. *При этом значение $K(c)$ не может быть улучшено ни при каком $c \geqslant 2/(3\sqrt{2\pi})$, и нижняя граница $2/(3\sqrt{2\pi})$ значений c не может быть уменьшена.*

Для доказательства неулучшаемости нижней границы $2/(3\sqrt{2\pi})$ значений коэффициента при ляпуновской дроби ℓ_n в оценках из теорем 10, 11 в диссертации было введено понятие *нижней асимптотически правильной* постоянной

$$\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_3) = \limsup_{\ell\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3 \colon \ell_n = \ell} \Delta_n(F)/\ell,$$

минорирующей этот коэффициент, и доказана

Теорема 12 (следствие 2.12). *Для нижней асимптотически правильной константы справедливо соотношение*

$$\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_3) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659\ldots\ .$$

Отметим, что оптимальная функция $K(c)$ в (11) непрерывна, строго монотонно убывает, изменяясь в пределах

$$0.1569\ldots = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\pi}} = K\left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\right) \geqslant K(c) > \lim_{c\to\infty} K(c) = -\infty, \ c \geqslant \frac{2}{3\sqrt{2\pi}},$$

и обращается в нуль в единственной точке $c = (\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097\ldots$. При разных значениях c из теоремы 11 вытекает несколько следствий.

Следствие 2 (следствие 2.3). *Для всех $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$*

$$\Delta_n \leqslant \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\pi}}\,\tau_n + \begin{cases} 2.7176 \cdot \ell_n^{7/6}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 1.7002 \cdot \ell_n^{3/2}, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3. \end{cases} \tag{12}$$

Неравенство (10) теоремы 10 и следствие 2 уточняют неравенство

$$\Delta_n \leqslant \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} + C_P\cdot\ell_n^2,\quad n\geqslant 1,\ F_1=\ldots=F_n\in\mathcal{F}_3, \tag{13}$$

где C_P — некоторая абсолютная константа, анонсированное без доказательства Х. Правитцем [55], и неравенство В. Бенткуса [36, 37]

$$\Delta_n \leqslant \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{\tau_n}{2\sqrt{2\pi}} + C_B\cdot\ell_n^{4/3},\quad n\geqslant 1,\ F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_3, \tag{14}$$

где C_B — некоторая абсолютная константа, в отношении второго слагаемого: неравенство (10) улучшает моментную функцию τ_n до $B_n^{-3}\sum_{j=1}^n\beta_{1,j}\sigma_j^2\leqslant\tau_n$, а следствие 2 — коэффициент $(2\sqrt{2\pi})^{-1}=0.1994\ldots$ до $\sqrt{(2\sqrt{3}-3)/(6\pi)}=$ $=0.1569\ldots$, при этом остаточные члены в оценках из теоремы 10 и следствия 2 указаны в явном виде вплоть до значений абсолютных констант, что позволяет использовать эти результаты при практических расчётах.

Следствие 3 (следствие 2.4). *Для всех $n\geqslant 1$ и $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_3$*

$$\Delta_n \leqslant \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}\cdot\ell_n + \begin{cases} 3.4314\cdot\ell_n^{4/3}, & F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_3,\\ 2.5786\cdot\ell_n^2, & F_1=\ldots=F_n\in\mathcal{F}_3.\end{cases}$$

Из оценки (11) теоремы 11 также вытекает, что неравенство $\Delta_n\leqslant$ $\leqslant 0.4098\cdot\ell_n$ имеет место при $\ell_n\leqslant 10^{-11}$ в общем случае и $\ell_n\leqslant 10^{-5}$ в случае одинаково распределённых слагаемых. Следствие 3 уточняет неравенство Чистякова [34]:

$$\Delta_n \leqslant \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}\,\ell_n + \widetilde{C}\cdot\ell_n^{40/39}|\ln\ell_n|^{7/6},\quad n\geqslant 1,\ F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_3, \tag{15}$$

где $\widetilde{C}$ — некоторая абсолютная константа $\big($в более ранее работе [33] Чистяков анонсировал аналогичную оценку с более «тяжёлым» остаточным членом $O\big(\ell_n^{56/55}|\ln\ell_n|^{3/2}\big)\big)$ в отношении остаточного члена: уточнен порядок, указана константа. Сравнивая же «главные» члены $\psi_1=\inf\limits_{c\geqslant 2/(3\sqrt{2\pi})}(c\ell_n+K(c)\tau_n)$ оценки (11) и $\psi_2=\dfrac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}\,\ell_n$ оценки Чистякова (15) легко убедиться, что их значения совпадают в единственной точке $\ell_n/\tau_n=\sqrt{20(\sqrt{10}-3)/3}=$ $=1.0401\ldots$, характерной для распределения Эссеена (отметим, что в случае о.р.с.в. отношение $\ell_n/\tau_n=\beta_{3,1}/\sigma_1^3$ есть нормированное значение третьего абсолютного момента распределения слагаемых); для всех же остальных возможных значений отношения $\ell_n/\tau_n\geqslant 1$ выполняется строгое неравенство $\psi_1<\psi_2$, т.е. оценка (11) точнее и в отношении «главного» члена.

Заметим, что второе слагаемое в (11) отрицательно при $c>(\sqrt{10}+$ $+3)/(6\sqrt{2\pi})$. Наличие отрицательного слагаемого в главной части довольно необычно для оценок точности нормальной аппроксимации, но позволяет в качестве простого следствия получать асимптотически правильные оценки даже для симметричных слагаемых, имеющих распределения Бернулли.

Следствие 4 (следствие 2.5). *Для любых $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$ таких, что $\beta_{3,j} = \sigma_j^3$ при всех $j = 1, \ldots, n$, справедлива оценка*

$$\Delta_n \leqslant \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + \begin{cases} 3.4106 \cdot \ell_n^{4/3}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 2.5475 \cdot \ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3. \end{cases} \tag{16}$$

Однако используя методы, специально предназначенные для симметричного случая, представленные выше оценки можно улучшить.

Теорема 13 (теоремы 2.7, 2.8). *Для любого $c \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}$*

$$\Delta_n \leqslant \frac{1/2 + \varkappa_3 + c}{\sqrt{2\pi}}\, \ell_n + \frac{1/2 - \varkappa_3 - c}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{1,j}\, \sigma_j^2}{B_n^3} + R_c(\ell_n), \tag{17}$$

где

$$R_c(\ell_n) = \begin{cases} 3.4418 \cdot \ell_n^{7/6} \wedge \widetilde{A}_1(c) \ell_n^{4/3}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}, \\ 1.8528 \cdot \ell_n^{3/2} \wedge \widetilde{A}_2(c) \ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_{3,s}, \end{cases}$$

$\varkappa_3 = 0.0991\ldots$ *определена в теореме* 3, *а функции $\widetilde{A}_j(c)$, монотонно убывают с $\lim\limits_{c \to 0} \widetilde{A}_j(c) = \infty$, $j = 1, 2$, но принимают конечные значения при всех $c > 0$ и указаны в диссертации в явном виде.*

Аналогичные оценки для случая $0 < \delta < 1$ получены в диссертации в теореме 2.5.

Оценка (17) оптимальна в том смысле, что ни при каком $c \geqslant 0$ коэффициент $(1/2 - \varkappa_3 - c)/\sqrt{2\pi}$ во втором слагаемом не может быть уменьшен. Поскольку $B_n^{-3} \sum_{j=1}^n \beta_{1,j}\, \sigma_j^2 \leqslant \tau_n \leqslant \ell_n$, следствиями (17) являются: при $c = \varkappa_3$ — недоказанная оценка Бенткуса, анонсированная им в работе [37]:

$$\Delta_n \leqslant \frac{1/2 + 2\varkappa_3}{\sqrt{2\pi}}\, \ell_n + \frac{1/2 - 2\varkappa_3}{\sqrt{2\pi}}\, \tau_n + C_B \cdot \ell_n^{4/3}, \quad n \geqslant 1,\ F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}, \tag{18}$$

а при $c = 1/2 - \varkappa_3 = 0.4008\ldots$ — оценка Чистякова [34]:

$$\Delta_n \leqslant \frac{\ell_n}{\sqrt{2\pi}} + \widetilde{C} \cdot \ell_n^{40/39} |\ln \ell_n|^{7/6}, \quad n \geqslant 1,\ F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{3,s}. \tag{19}$$

При этом неравенство (17) уточняет оценки (18), (19) как в отношении главного члена, так и в отношении остаточного (уточнён порядок, указана константа).

Задаваясь вопросом об оптимальности минимально допустимого теоремой 13 коэффициента $(1 + 2\varkappa_3)/(2\sqrt{2\pi})$ при ℓ_n, можно по аналогии с общим случаем определить нижнюю асимптотически правильную константу

$$\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{3,s}) = \limsup_{\ell \to 0} \limsup_{n \to \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{3,s}\colon \ell_n = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell}$$

в классе симметричных распределений, минорирующую этот коэффициент.

Теорема 14 (следствие 2.12). *Для нижней асимптотически правильной постоянной* $\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{3,\,s})$ *справедливы двусторонние оценки*

$$0.1994\ldots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \leqslant \underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{\varkappa_3}{\sqrt{2\pi}} = 0.2390\ldots\ .$$

Таким образом, вопрос о точном значении минимально возможного коэффициента при ляпуновской дроби ℓ_n в оценках типа (17), (18) на данный момент остаётся открытым.

Абсолютные аналоги представленных выше асимптотических оценок получены в разделе 2.4, где впервые поставлена задача и предложен метод вычисления констант $C_k(\delta)$ в неравенстве

$$\Delta_n \leqslant \inf_{k\geqslant 0} C_k(\delta)(\ell_n + k\tau_n), \quad F_1,\ldots,F_n \in \mathcal{F}_{2+\delta},\ n\geqslant 1. \tag{20}$$

В рамках предложенного вычислительного метода предлагается рассмотреть два «универсальных» значения параметра $0\leqslant k\leqslant 1$ в (20): максимальное значение, минимизирующее сумму коэффициентов при ℓ_n и τ_n:

$$k_0(\delta) = \max\{k\in[0,\,1]\colon (1+k)C_k(\delta) = C_0(\delta)\}$$

и минимальное значение, минимизирующее коэффициент при ℓ_n:

$$k_1(\delta) = \min\{k\in[0,\,1]\colon C_k(\delta)\leqslant C_1(\delta)\}.$$

При этом в ряде случаев оказывается $k_0(\delta)>0$ и $k_1(\delta)<1$. Неравенство (20) с $k=k_0(\delta)$ даёт безусловно более точную оценку, чем классическое неравенство Эссеена

$$\Delta_n \leqslant C_0(\delta)\ell_n, \quad F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_{2+\delta},\ n\geqslant 1, \tag{21}$$

с наилучшим известным значением константы $C_0(\delta)$, но оно уточняется неравенством (20) с $k=k_1(\delta)$ при достаточно больших значениях отношения ℓ_n/τ_n, что играет ключевую роль, например, при конструировании неравномерных оценок, где это отношение составляет десятки, или оценок скорости сходимости обобщённых пуассоновских распределений, где это отношение неограниченно велико. Для $\delta=1$ справедлива следующая

Теорема 15 (теорема 2.13). *Для всех* $n\geqslant 1$ *и* $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_3$

$$\Delta_n \leqslant \min\{0.5583\cdot\ell_n,\ 0.3723(\ell_n+0.5\tau_n),\ 0.3057(\ell_n+\tau_n)\}.$$

Для всех $n\geqslant 1$ *и* $F_1=\ldots=F_n\in\mathcal{F}_3$

$$\Delta_n \leqslant \min\{0.4690\cdot\ell_n,\ 0.3322(\ell_n+0.429\tau_n),\ 0.3031(\ell_n+0.646\tau_n)\}.$$

Для всех $n\geqslant 1$ *и* $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}_{3,\,s}$

$$\Delta_n \leqslant \min\{0.34245(\ell_n+0.63\tau_n),\ 0.2873(\ell_n+\tau_n)\}.$$

Для всех $n\geqslant 1$ *и* $F_1=\ldots=F_n\in\mathcal{F}_{3,\,s}$

$$\Delta_n \leqslant \min\{0.29353(\ell_n+0.593\tau_n),\ 0.2730(\ell_n+0.729\tau_n)\}.$$

Теорема 15 устанавливает значения:
• $k_0(1) = 0$, $k_1(1) = 1$ для общего случая, $k_0(1) = 0.646$ для о.р.с.в. из $\mathcal{F}_3$;
• $k_0(1) = 0.63$, $k_1(1) = 1$ для разнораспределённых, $k_0(1) = 0.593$, $k_0(1) = 0.729$ для о.р.с.в. из $\mathcal{F}_{3,\,s}$. Отсюда, в частности, вытекает, что неравенство Берри–Эссеена (21) справедливо при всех $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{3,\,s}$ с $C_0(1) \leqslant 0.5582$, а при $F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_{3,\,s}$ — с $C_0(1) \leqslant 0.4676$.

Теорема 15 также уточняет наилучшие известные на данный момент верхние оценки абсолютной константы $C_0(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена, полученные И. С. Тюриным [30] для общего случая ($C_0(1) \leqslant 0.5591$) и автором [29] для о.р.с.в. ($C_0(1) \leqslant 0.4748$).

В разделе 2.4 диссертации также получен аналог теоремы 15 для случая произвольного $0 < \delta < 1$.

Отличительной особенностью вычисления константы $C_0(1)$ в (21) с помощью метода, предложенного в данной работе, является тот факт, что за всю более чем сорокалетнюю историю вычисления абсолютной константы $C_0(1)$ с помощью неравенств сглаживания и последующего оценивания характеристических функций, берущую начало ещё с работ Золотарёва 1966–1967 гг., здесь за счёт использования новых оценок точности аппроксимации х.ф. первыми членами её разложения в ряд Тейлора из следствия 1 впервые удалось «сдвинуть» экстремальное значение отношения ℓ_n/τ_n с единицы и приблизить его к теоретически «правильному» значению $\sqrt{20(\sqrt{10}-3)/3} = 1.0401\ldots$ распределения Эссеена, на котором достигается нижняя оценка $C_0(1) \geqslant (\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi})$. Для симметричного же случая экстремальным при $0 \leqslant k \leqslant k_0$ оказывается отношение $\ell_n/\tau_n = 1$, что полностью согласуется с предположением об экстремальности характера симметричного распределения Бернулли, для которого это отношение в точности равняется единице и на котором достигается нижняя оценка $C_0(1) \geqslant 1/\sqrt{2\pi}$ [40]. Этими замечаниями объясняется возможность выбора положительного k_0 в симметричном случае, и невозможность — в «несимметричном». Более того, именно так же ведут себя и асимптотические оценки с оптимальной структурой, представленные выше.

Несмотря на то что нижние оценки константы $C_0(1)$ известны давно, о нижних оценках констант $C_0(\delta)$ при $0 < \delta < 1$ до проведения диссертационного исследования ничего известно не было. С целью получения разнообразных нижних оценок асимптотических и абсолютных констант в равномерных оценках с уточнённой структурой типа (20) в разделе 2.1 предложена уточнённая классификация асимптотически правильных констант:

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F}) = \sup_{F\in\mathcal{F}} \limsup_{n\to\infty} \Delta_n(F)/\ell_n \tag{22}$$

$$\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{F}\colon\, \ell_n=\ell} \Delta_n(F)/\ell, \tag{23}$$

$$C_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell\to 0} \sup_{n,\,F\in\mathcal{F}\colon\, \ell_n=\ell} \Delta_n(F)/\ell, \tag{24}$$

$$C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \sup_{\ell>0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{F\in\mathcal{F}\colon \ell_n=\ell}\Delta_n(F)/\ell, \tag{25}$$

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty}\sup_{F\in\mathcal{F}}\Delta_n(F)/\ell_n, \tag{26}$$

где $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{2+\delta},\mathcal{F}_{2+\delta,\,s}$ с $0<\delta\leqslant 1$. Для $\mathcal{F}=\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_{3,\,s}$ константы $C_{\text{АН}}(\mathcal{F})$ впервые рассмотрел К.-Г. Эссеен [40, 41], а константы $C_{\text{АП}}(\mathcal{F})$ предложил изучать А. Н. Колмогоров [6]. Выражение, определяющее $\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$, формально встречается в монографии И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [5], но фактически в указанной работе под ним подразумевалась константа Эссеена $C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_3)$. Константы $\underline{C}_{\text{АП}}$, $C^*_{\text{АП}}$ в литературе ранее не встречались. В диссертации константы $C_{\text{АН}}$ называются *асимптотически наилучшими*, $C_{\text{АП}}$ — *асимптотически правильными*, $C^*_{\text{АП}}$ — *условными верхними асимптотически правильными*, $\overline{C}_{\text{АП}}$ — *верхними асимптотически правильными.*

Из результата работы Л. В. Осипова и В. В. Петрова вытекает, что $C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_{2+\delta})\equiv 0$ для всех $0<\delta<1$, что ставит под сомнение «правильность» оценки Эссена (21). С другой стороны, по определению, при всех $0<\delta\leqslant 1$

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F})\vee\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F})\leqslant C_{\text{АП}}(\mathcal{F})\wedge C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F})\leqslant C_{\text{АП}}(\mathcal{F})\vee C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F})\leqslant\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F})\leqslant C_0(\delta),$$

а для констант $C_k(\delta)$ в неравенстве (20) при всех $0\leqslant\delta\leqslant 1$ справедливы нижние оценки

$$\inf_{k\geqslant 0}C_k(\delta)\geqslant C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}).$$

В диссертации найдена положительная миноранта для $\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,\,s})$ при всех $0<\delta\leqslant 1$ и тем самым впервые продемонстрировано, что даже в случае о.р.с.в. порядок оценок $\Delta_n(F)\leqslant O(n^{-\delta/2})$, $n\to\infty$, в т.ч. оценки Эссеена (21), не может быть улучшен *равномерно* в классе рассматриваемых ф.р. $F\in\mathcal{F}_{2+\delta}$.

Теорема 16 (теорема 2.12). *Для всех* $0\leqslant\delta\leqslant 1$

$$\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})\geqslant\underline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,\,s})\geqslant$$
$$\geqslant\sup_{h\geqslant 0,\,s>0}\frac{\dfrac{4}{\sqrt{2+s^2}}\exp\Big\{-\dfrac{h^2}{2(2+s^2)}\Big\}+\dfrac{s^2+h^2}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}}{8M_{2+\delta}s^{2+\delta}e^{-h^2/(2s^2)}{}_1F_1\Big(\dfrac{3+\delta}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{h^2}{2s^2}\Big)}, \tag{27}$$

где ${}_1F_1$ *— обобщённая гипергеометрическая функция (вырожденная функция Мейера),* $M_{2+\delta}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2+\delta}\,d\Phi(x)=(1+\delta)\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right)2^{\delta/2}/\sqrt{\pi}$.

Следующая теорема устанавливает нижние оценки *абсолютных* констант $C_k(\delta)$ при любых $k\geqslant 0$ в терминах верхних условных асимптотически правильных констант.

Теорема 17 (теорема 2.9). *Для всех* $0<\delta\leqslant 1$

$$C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})\geqslant\sup_{\gamma>0,\,x\geqslant 0}\gamma^{\delta/2}\Big(e^{-\gamma}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\gamma^k}{k!}-\Phi\Big(\frac{x-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\Big)\Big), \tag{28}$$

$$C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta,\,s})\geqslant\frac{1}{2}\sup_{\gamma>0}\gamma^{\delta/2}e^{-\gamma}I_0(\gamma), \tag{29}$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка: $I_0(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}(\gamma/2)^{2k}/(k!)^2$, а при $\delta = 0$ полагаем $\gamma^{\delta/2} \equiv 1$. В частности,

$$C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) \geqslant \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} > 0.2659, \qquad C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) > 0.2344.$$

Теорема 18 (теорема 2.10). *Для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_{3,\,s}$ справедливо соотношение*

$$\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = C_{\text{АП}}(\mathcal{F}).$$

Следствие 5 (следствие 2.11). *Справедливы соотношения*

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_3) = C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097\ldots,$$

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) = C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) = C^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) = \overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,\,s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989\ldots\ .$$

Интересно отметить, что в формулировке теоремы 3.5.2 монографии И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [5] процитирован результат Эссеена [41]

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_3) \equiv \sup_{F\in\mathcal{F}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n(F)}{\ell_n} = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}},$$

с изменённым порядком следования верхнего предела и верхней грани, т.е. объявлено точное значение $\overline{C}_{\text{АП}}(\mathcal{F})$, но доказан именно результат Эссеена. Следствие 5 доказывает законность этой перестановки для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_{3,\,s}$. Однако для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2+\delta}$ с $\delta < 1$ такая перестановка уже приводит к изменению результата.

Таким образом, между асимптотическими константами имеют место следующие соотношения (для краткости опустим общий аргумент $\mathcal{F}$ у асимптотических констант, вынося и расшифровывая его в начале строки):

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} = \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_{3,\,s}\colon & \underline{C_{\text{АП}}} < C_{\text{АН}} = C_{\text{АП}} = C^*_{\text{АП}} = \overline{C}_{\text{АП}}, \\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_{2+\delta}, \mathcal{F}_{2+\delta,\,s},\ 0 < \delta < 1\colon & C_{\text{АН}} < \underline{C_{\text{АП}}} \leqslant C_{\text{АП}} < C^*_{\text{АП}} \leqslant \overline{C}_{\text{АП}} \end{array}$$

(следствия 2.11, 2.12, 2.13, теорема 2.12), а следовательно,

• $C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ как функция $\delta \in (0, 1]$ имеет ровно одну точку разрыва: $\delta = 1$, поскольку

$$C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \equiv 0,\ \delta \in [0,\,1), \quad C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_3) = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}};$$

• $\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ как функция $\delta \in (0, 1]$ имеет как минимум одну точку разрыва: $\delta = 1$, поскольку

$$\lim_{\delta\to1-} \underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leqslant \lim_{\delta\to1-} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leqslant \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = \underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_3);$$

• $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ как функция $\delta \in (0, 1]$ имеет как минимум одну точку разрыва: $\delta = 1$, поскольку

$$\lim_{\delta\to1-} C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \leqslant \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} < 0.0665 < 0.4097 < \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} = C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3).$$

Разрывы асимптотических констант $C_{\text{АН}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$, $\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$, $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ как функций $\delta \in (0,1]$ в точке $\delta = 1$ связаны с тем, что асимптотические константы аккумулируют информацию как о «хвостах», так и о структуре («гладкости») распределения слагаемых. Для бо́льшей ясности предполагая, что случайные слагаемые распределены одинаково, заметим, что порядок итоговой оценки скорости сходимости $O(n^{-\delta/2})$ определяется «тяжелохвостостью» распределения слагаемых. Что касается гладкости, поскольку нормировка рассматриваемой суммы случайных величин происходит величиной порядка $O(\sqrt{n})$, то свёртка даже разрывной исходной функции распределения при соответствующей нормировке аппроксимируется непрерывной предельной нормальной с точностью $O(n^{-1/2})$, и поэтому вклад параметра гладкости в итоговую асимптотическую константу имеет порядок не выше $O(n^{-1/2})$, т.е. является бесконечно малым по сравнению с вкладом $O(n^{-\delta/2})$ параметра «тяжелохвостости» при $\delta < 1$, но эквивалентным (причём с гораздо бо́льшей константой) вкладу $O(n^{-1/2})$ параметра «тяжелохвостости» при $\delta = 1$, что приводит к резкому увеличению суммарного вклада обоих параметров и, как следствие, значений соответствующих асимптотических констант.

Завершают вторую главу неравномерные оценки, полученные с помощью новых равномерных оценок с уточнённой структурой.

Теорема 19 (следствие 2.15). *Для всех $n \geqslant 1$ и $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|^3)|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \min\{21.82 \cdot \ell_n,\, 18.19(\ell_n + \tau_n)\}.$$

Для всех $n \geqslant 1$ и $F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|^3)|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \min\{17.36\ell_n, 15.70(\ell_n + 0.646\tau_n)\}.$$

Теорема 20 (теорема 2.17, следствие 2.17). *Существуют невозрастающие функции $C(t)$, $Q_k(t)$, $k \in [0,1]$, $t \geqslant 0$, (в тексте диссертации функции $C(t)$ и $Q_k(t)$ выписаны в явном виде) такие, что*

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \lim_{t\to\infty} Q_k(t) = 1 + e = 3.7182\ldots, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1,$$

и для всех $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$, $n \geqslant 1$ справедливы оценки

$$\sup_{|x|\geqslant t} |x|^3|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C(t)\ell_n, \quad t \geqslant 0,$$

$$\sup_{|x|\geqslant t} |x|^3|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \min_{0\leqslant k\leqslant 1} Q_k(t)(\ell_n + k\tau_n), \quad t \geqslant 0.$$

Для $C(t)$, $Q_k(t)$, в частности, справедливы следующие верхние оценки:

- $C(0) \leqslant 21.26$, $C(4) \leqslant 17.19$, $C(5) \leqslant 12.35$, $C(10) \leqslant 7.36$, $Q_1(0) \leqslant 17.88$ *для любых $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$;*
- $C(0) \leqslant 16.90$, $C(4) \leqslant 14.58$, $C(5) \leqslant 11.56$, $C(10) \leqslant 5.85$, $Q_{0.646}(0) \leqslant 15.40$, *если $F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3$.*

Также получены аналоги неравномерных оценок, представленных в теоремах 19, 20, для распределений из $\mathcal{F}_{2+\delta}$ с $\delta < 1$.

В **третьей главе** изучается точность нормальной аппроксимации для обобщённых пуассоновских распределений.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в. с общей ф.р. $F(x) = \mathsf{P}(X < x)$, $x \in \mathbf{R}$. Предположим, что $\mathsf{E}X^2 > 0$, $\beta_{2+\delta} \equiv \mathsf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta \in [0, 1]$ ($\beta_2 = \sigma^2$). Множество всех ф.р. с.в. X, удовлетворяющих указанным условиям, обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Пусть $F_{2+\delta,\, s}$ — множество всех симметричных ф.р. из $\mathcal{F}_{2+\delta}$.

Пусть N_λ — с.в., имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0:$

$$\mathsf{P}(N_\lambda = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и такая, что при каждом $\lambda > 0$ с.в. $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы. С.в. $S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$ называется *пуассоновской случайной суммой* (для определённости полагаем $\sum_{k=1}^{0}(\cdot) = 0$), а её распределение — *обобщённым пуассоновским.* Пуассоновские случайные суммы S_λ являются весьма популярными математическими моделями многих реальных объектов. В частности, в страховой математике с.в. S_λ описывает суммарное страховое требование в классическом процессе риска в «динамическом» случае. Многие примеры прикладных задач из самых разнообразных областей, в которых используются пуассоновские случайные суммы, можно найти, например, в книгах [35, 42].

Ф.р. стандартизованной пуассоновской случайной суммы $\widetilde{S}_\lambda = (S_\lambda - \mathsf{E}S_\lambda)/\sqrt{\mathsf{D}S_\lambda} = (S_\lambda - \lambda\mathsf{E}X)/\sqrt{\lambda\mathsf{E}X^2}$, обозначим $F_\lambda(x) \equiv \mathsf{P}(\widetilde{S}_\lambda < x)$. Положим

$$\Delta_\lambda = \Delta_\lambda(F) = \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)|, \quad \lambda > 0,$$

$$\ell_\lambda = \ell_\lambda(F) = \frac{\mathsf{E}|X|^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2}(\mathsf{E}X^2)^{1+\delta/2}}.$$

Величина ℓ_λ называется *нецентральной* ляпуновской дробью.

Если $\delta = 0$, то справедливо следующее утверждение, аналогичное результату работы В. К. Мацкявичюса [10] для классической схемы суммирования, демонстрирующее, что разумных моментных оценок скорости сходимости, стремящихся к нулю с ростом λ, в данном случае построить нельзя.

Теорема 21 (теорема 3.7). *Пусть $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$ — неотрицательная функция, такая что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) \to 0$. Тогда найдется такая ф.р. $F \in \mathcal{F}_2$ и такое положительное число λ_1, что $\Delta_\lambda(F) \geqslant \psi(\lambda)$ при всех $\lambda \geqslant \lambda_1$.*

Следующая теорема, устанавливающая положительную миноранту верхней асимптотически правильной константы

$$\overline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,\, s}) \equiv \limsup_{\lambda\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{F}_{2,\, s}} \Delta_\lambda(F),$$

дополняет этот результат.

Теорема 22 (теорема 3.5). *Для верхней асимптотически правильной константы справедлива нижняя оценка* $\overline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2,s}) \geqslant 1/2$.

С другой стороны, если для некоторого $0 < \delta \leqslant 1$ известно, что $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, то скорость сходимости в ЦПТ уже представляется возможным оценить в терминах соответствующих моментов, например, при помощи неравенства типа Берри–Эссеена

$$\Delta_\lambda \leqslant M_{\text{BE}}(\delta)\ell_\lambda, \tag{30}$$

где $M_{\text{BE}}(\delta)$ зависит только от δ (см., например, [7]). Данное неравенство впервые было получено, по-видимому, в работах Г. В. Ротарь [22, 23] для случая $\delta = 1$, которому традиционно уделялось наибольшее внимание. Первые оценки константы $M_{\text{BE}}(1)$ выписывались напрямую с использованием неравенства сглаживания Эссеена и превосходили верхнюю оценку абсолютной константы $C_0(1)$ в классическом неравенстве Берри–Эссеена (21). Затем, в 1993 г. Р. Михель [52] и независимо в 1997 г. В. Ю. Королев и С. Я. Шоргин [51] с использованием свойства безграничной делимости обобщённых пуассоновских распределений показали, что $M_{\text{BE}}(1) \leqslant C_0(1)$. В диссертационном же исследовании впервые продемонстрировано, что связь констант $M_{\text{BE}}(1)$ и $C_0(1)$ менее жёсткая, в частности, имеет место строгое неравенство $M_{\text{BE}}(1) < C_0(1)$. Аналогичное неравенство справедливо и для асимптотически правильных констант, которые для схемы случайного суммирования ранее в литературе не изучались.

По аналогии с классической схемой суммирования в диссертации определены соответственно нижняя асимптотически правильная, асимптотически правильная, условная верхняя асимптотически правильная и верхняя асимптотически правильная константы для схемы суммирования н.о.р.с.в с пуассоновским случайным индексом:

$$\underline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell\to 0}\limsup_{\lambda\to\infty}\sup_{F\in\mathcal{F}\colon \ell_\lambda=\ell}\Delta_\lambda(F)/\ell, \tag{31}$$

$$M_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\ell\to 0}\sup_{\lambda,F\in\mathcal{F}\colon \ell_\lambda=\ell}\Delta_\lambda(F)/\ell. \tag{32}$$

$$M^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \sup_{\ell>0}\limsup_{\lambda\to\infty}\sup_{F\in\mathcal{F}\colon \ell_\lambda=\ell}\Delta_\lambda(F)/\ell, \tag{33}$$

$$\overline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}) = \limsup_{\lambda\to\infty}\sup_{F\in\mathcal{F}}\Delta_\lambda(F)/\ell_\lambda(F), \tag{34}$$

в классах функций распределения $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2+\delta}, \mathcal{F}_{2+\delta,s}$, $0 < \delta \leqslant 1$. Для введённых асимптотических констант в диссертации найдены двусторонние оценки и/или точные значения.

Асимптотически правильная $M_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ и нижняя асимптотически правильная константы $\underline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ являются наилучшими (наименьшими) возможными значениями коэффициента M соответственно в асимптотических оценках

$$\Delta_\lambda \leqslant M\ell_\lambda + o(\ell_\lambda), \tag{35}$$

$$\Delta_\lambda \leqslant M\ell_\lambda + K\lambda^{-\delta/2} + o(\ell_\lambda) \quad \text{для некоторого} \quad K \in \mathbf{R}, \tag{36}$$

справедливых для любой ф.р. $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ такой, что $\ell_\lambda(F) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следующая теорема устанавливает точные значения этих констант в классе $\mathcal{F}_3$.

Теорема 23 (следствие 3.4). *Для нижней асимптотически правильной и асимптотически правильной констант справедливы соотношения*

$$\underline{M_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_3) = M_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659\ldots .$$

Отметим, что для классической схемы суммирования аналогичные константы $\underline{C_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_3)$, $C_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$ связаны строгим знаком неравенства.

Теорема 23 означает, что при $\delta = 1$ асимптотическая оценка (36) не может улучшить оценку (35) в отношении множителя при ляпуновской дроби ℓ_λ ни при каком выборе $K \in \mathbf{R}$, т.е. оценки простой структуры в терминах нецентральной ляпуновской дроби ℓ_λ являются оценками оптимальной структуры для обобщённых пуассоновских распределений. Кроме того, в диссертации построены асимптотически точные оценки (т.е. оценки типа (35) с $M = M_{\text{АП}}(\mathcal{F}_3)$) с остаточным членом, указанным в явном виде, а также оценки типа (35) для случая $\delta < 1$ и симметричного случая с произвольным $\delta \in (0, 1]$.

Теорема 24 (теоремы 3.1, 3.2, следствия 3.1, 3.2). *Для любых* $0 < \delta \leqslant 1$ *при всех* $\lambda > 0$ *справедливы оценки*

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant C(\delta) \cdot \ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + \widehat{C}_\delta^* \cdot \ell_\lambda^2, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta},$$

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant C_{\text{sym}}(\delta) \cdot \ell_\lambda + \frac{\ell_\lambda^{1/\delta}}{2\sqrt{2\pi}} + \widetilde{C}_\delta^* \cdot \ell_\lambda^2, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta,\, s},$$

где $C_{\text{sym}}(\delta) = \pi^{-1}\varkappa_{2+\delta}2^{\delta/2}\,\Gamma(1+\delta/2)$, $C(\delta)$ *и* $\varkappa_{2+\delta}$ *определены в формулировках теорем* 10 *и* 3 *соответственно, константы* $\widehat{C}_\delta^*, \widetilde{C}_\delta^*$ *указаны в диссертации в явном виде. В частности, при* $\delta = 1$

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{2\ell_\lambda}{3\sqrt{2\pi}} + 0.4679 \cdot \ell_\lambda^2, \quad F \in \mathcal{F}_3, \tag{37}$$

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant \frac{1 + 2\varkappa_3}{2\sqrt{2\pi}}\,\ell_\lambda + 0.3442 \cdot \ell_\lambda^2, \quad F \in \mathcal{F}_{3,\, s}. \tag{38}$$

Теорема 23 означает, что множитель $2/(3\sqrt{2\pi})$ при ℓ_λ в (37) не может быть улучшен, а из следующего утверждения вытекает, что в (38) коэффициент $(1 + 2\varkappa_3)/(2\sqrt{2\pi})$ при ℓ_λ не может быть выбран меньшим $(2\sqrt{2\pi})^{-1}$.

Утверждение 1 (неравенство (3.10) и теорема 3.4). *Для нижней асимптотически правильной и асимптотически правильной констант справедливы двусторонние оценки*

$$0.1994\ldots = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \leqslant \underline{M_{\text{АП}}}(\mathcal{F}_{3,\, s}) \leqslant M_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{3,s}) \leqslant \frac{1 + 2\varkappa_3}{2\sqrt{2\pi}} = 0.2390\ldots .$$

Абсолютные оценки, не содержащие остаточного члена $o(\ell_\lambda)$, приведены в следующей теореме.

Теорема 25 (теорема 3.8). *Неравенство* (30) *справедливо при всех* $0 < \delta \leqslant 1$ *с* $M_{\text{BE}}(\delta) \leqslant \inf_{k \geqslant 0} C_k(\delta)$, *где* $C_k(\delta)$ *— константы, входящие в равномерную оценку с уточнённой структурой* (20). *В частности, для всех* $\lambda > 0$

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant 0.3031 \cdot \ell_\lambda, \quad \mathcal{F} \in \mathcal{F}_3,$$

$$\Delta_\lambda(F) \leqslant 0.2730 \cdot \ell_\lambda, \quad \mathcal{F} \in \mathcal{F}_{3,\,s}.$$

Как видно из теоремы 25, ценой за отсутствие остаточного члена является увеличение коэффициента при ляпуновской дроби по сравнению с асимптотическими оценками, представленными в теореме 24. Тем не менее, полученная верхняя оценка абсолютной константы $M_{\text{BE}}(1) \leqslant 0.3031$ в аналоге неравенства Берри–Эссеена (30) для пуассоновских случайных сумм оказывается строго меньше теоретически минимально возможного значения $(\sqrt{10}+$ $+3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097\ldots$ аналогичной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена, откуда вытекает, что скорость сходимости сопровождающих безгранично делимых распределений может быть выше, чем исходных.

Следующая теорема устанавливает нижние оценки $M_{\text{BE}}(\delta)$ в терминах условных верхних асимптотически правильных констант.

Теорема 26 (теорема 3.5). *При всех* $0 \leqslant \delta \leqslant 1$

$$\overline{M}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geqslant \overline{M}^{\,*}_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) \geqslant \sup_{\gamma>0,\, x\in\mathbf{R}} \gamma^{\delta/2}\biggl(e^{-\gamma}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\gamma^k}{k!} - \Phi\Bigl(\frac{x-\gamma}{\sqrt{\gamma}}\Bigr)\biggr). \qquad (39)$$

Из неравенства (39) и теоремы 24 вытекает, что асимптотически правильная и условная верхняя асимптотически правильная константы связаны строгим знаком неравенства $M_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta}) < M^*_{\text{АП}}(\mathcal{F}_{2+\delta})$ для всех $\delta \in (0, 1)$.

С помощью неравномерных оценок с уточнённой структурой, полученных во второй главе, в диссертации также построены неравномерные оценки для пуассоновских случайных сумм н.о.р.с.в с ф.р. из $\mathcal{F}_{2+\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. Формулировку соответствующей теоремы для краткости приведём лишь для случая $F \in \mathcal{F}_3$.

Теорема 27 (теоремы 3.9, 3.10). *Для любых* $\lambda > 0$ *и* $F \in \mathcal{F}_3$

$$\sup_x (1+|x|^3)|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant 15.70\ell_\lambda,$$

$$\sup_{|x|\geqslant t} |x|^3|F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant Q(t)\cdot\ell_\lambda, \quad t \geqslant 0,$$

где $Q(t) = \min\limits_{0\leqslant k\leqslant 1} Q_k(t)$, *функции* $Q_k(t)$ *определены в теореме* 20. *В частности,* $Q(0) \leqslant 15.40$, $Q(4) \leqslant 14.51$, $Q(10) \leqslant 5.85$, $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 1+e = 3.7182\ldots$.

В **Заключении** приведены основные результаты, выносимые на защиту, и перспективы дальнейших исследований.

Цитированная литература

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. Москва: Наука, 1982.

2. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1949.

3. Золотарёв В. М. О близости распределений двух сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. примен. 1965. Т. 10, № 3. С. 519–526.

4. Золотарёв В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. Москва: Наука, 1986.

5. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. Москва: Наука, 1965.

6. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей // Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук. 1953. Т. 10, № 7. С. 29–38.

7. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. 2 изд. Москва: Физматлит, 2011.

8. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. Москва: МГУ, 1990.

9. Ляпунов А. М. Новая форма теоремы о пределе вероятности // Записки Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия. 1901. Т. 12, № 5. С. 1–24.

10. Мацкявичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 1983. Т. 28, № 3. С. 565–569.

11. Нагаев С. В., Ротарь В. И. Об усилении оценок типа Ляпунова (случай близости распределений слагаемых к нормальному) // Теория вероятн. примен. 1973. Т. 18, № 1. С. 109–121.

12. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Об оценке близости биномиального распределения к нормальному // ДАН. 2011. Т. 436, № 1. С. 26–28.

13. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Об оценке близости биномиального распределения к нормальному // Теория вероятн. примен. 2011. Т. 56, № 2. С. 248–278.

14. Осипов Л. В. О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 5. С. 1013–1016.

15. Осипов Л. В., Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 1967. Т. 12, № 2. С. 322–329.

16. Паулаускас В. И. Об одном усилении теоремы Ляпунова // Лит. матем. сб. 1969. Т. 9, № 4. С. 323–328.

17. Паулаускас В. И. О неравенстве сглаживания // Лит. матем. сб. 1971. Т. 11, № 4. С. 861–866.

18. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. Москва: Наука, 1972.

19. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Москва: Наука, 1987.

20. Розовский Л. В. О точности оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 1978. Т. 23, № 4. С. 744–761.

21. Розовский Л. В. Об оценке снизу остаточного члена в центральной предельной теореме // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 3. С. 403–410.

22. Ротарь Г. В. Некоторые задачи планирования резерва: Дисс. канд. физ.-мат. наук / Центральный экономико-математический институт. Москва, 1972.

23. Ротарь Г. В. Об одной задаче управления резервами // Эконом. матем. методы. 1976. Т. 12, № 4. С. 733–739.

24. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. Москва: УРСС, Книжный дом Либроком, 2009.

25. Сенатов В. В. О реальной точности аппроксимаций в центральной предельной теореме // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 913–935.

26. Сенатов В. В. Об одном асимптотическом разложении в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 2011. Т. 56, № 2. С. 384–391.

27. Сенатов В. В. О неулучшаемых оценках для асимптотических разложений в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 2012. Т. 57, № 4. С. 649–666.

28. Тюрин И. С. О точности гауссовской аппроксимации // ДАН. 2009. Т. 429, № 3. С. 312–316.

29. Тюрин И. С. О скорости сходимости в теореме Ляпунова // Теория вероятн. примен. 2010. Т. 55, № 2. С. 250–270.

30. Тюрин И. С. Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова // Теория вероятн. примен. 2011. Т. 56, № 4. С. 808–811.

31. Ульянов В. В. К уточнению оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 1978. Т. 23, № 3. С. 684–688.

32. Хипп К., Маттнер Л. On the normal approximation to symmetric binomial distributions // Теория вероятн. примен. 2007. Т. 52, № 3. С. 610–617.

33. Чистяков Г. П. Асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1996. Т. 228. С. 349–355.

34. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. // Теория вероятн. примен. 2001. Т. 46. № 2. С. 326–344. 2001. Т. 46. № 3. С. 573–579. 2002. Т. 47. № 3. С. 475–497.

35. Bening V. E., Korolev V. Y. Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance. Utrecht, The Netherlands: VSP, 2002.

36. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality: Preprint 91-078. Bielefeld: Universität Bielefeld, 1991.

37. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality // J. Theoret. Probab. 1994. Vol. 7, no. 2. P. 211–224.

38. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 49. P. 122–136.

39. Esseen C.-G. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability // Ark. Mat. Astron. Fys. 1942. Vol. A28, no. 9. P. 1–19.

40. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law // Acta Math. 1945. Vol. 77, no. 1. P. 1–125.

41. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem // Skand. Aktuarietidskr. 1956. Vol. 39. P. 160–170.

42. Gnedenko B. V., Korolev V. Y. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton: CRC Press, 1996.

43. Goldstein L. Bounds on the constant in the mean central limit theorem // Ann. Probab. 2010. Vol. 38, no. 4. P. 1672–1689. arXiv:0912.0726, 2009.

44. Goldstein L., Reinert G. Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling // Ann. Appl. Probab. 1997. Vol. 7, no. 4. P. 935–952.

45. Gut A. Stopped Random Walks. New York: Springer, 1988.

46. Hall P. Characterizing the rate of convergence in the central limit theorem // Ann. Probab. 1980. Vol. 8, no. 6. P. 1037–1048.

47. Hall P. Rates of Convergence in the Central Limit Theorem. Boston–London–Melbourne: Pitman, 1982. Vol. 62 of Res. Notes Math.

48. Hall P., Barbour A. D. Reversing the Berry–Esseen inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 90, no. 1. P. 107–110.

49. Heyde C. C. A nonuniform bound on convergence to normality // Ann. Probab. 1975. Vol. 3, no. 5. P. 903–907.

50. Kalashnikov V. V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

51. Korolev V. Y., Shorgin S. Y. On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics, Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference. VSP, Utrecht, 1997. P. 305–308.

52. Michel R. On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution // Insurance: Mathematics and Economics. 1993. Vol. 13, no. 1. P. 35–37.

53. Pinelis I. Optimal re-centering bounds, with applications to Rosenthal-type concentration of measure inequalities // arXiv:1111.2622. 2011.

54. Prawitz H. Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charackteristischen Funktion // Skand. Aktuarietidskr. 1973. no. 1. P. 11–16.

55. Prawitz H. On the remainder in the central limit theorem. I: One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order // Scand. Actuar. J. 1975. no. 3. P. 145–156.

56. Prawitz H. Noch einige Ungleichungen für charakteristische Funktionen // Scand. Actuar. J. 1991. no. 1. P. 49–73.

57. Senatov V. V. Normal Approximation: New Results, Methods and Problems. Utrecht, Netherlands: VSP, 1998.

58. Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. 1981. Vol. 99, no. 6. P. 1135–1151.

59. Tyurin I. S. Some optimal bounds in CLT using zero biasing // Stat. Prob. Letters. 2012. Vol. 82, no. 3. P. 514–518.

60. Ushakov N. G. Selected Topics in Characteristic Functions. Utrecht: VSP, 1999.

61. van Beek P. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1972. Vol. 23. P. 187–196.

Публикации автора по теме диссертации:

1. Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента // Информ. и её примен. 2009. Т. 3, № 4. С. 41–56.

2. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена // Информ. и её примен. 2010. Т. 4, № 2. С. 78–85.

3. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации. I. // Теория вероятн. примен. 2005. Т. 50, № 2. С. 353–366.

4. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации. II. // Теория вероятн. примен. 2005. Т. 50, № 3. С. 555–564.

5. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена // Теория вероятн. примен. 2009. Т. 54, № 4. С. 671–695.

6. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова // Теория вероятн. примен. 2010. Т. 55, № 3. С. 577–582.

7. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм // ДАН. 2010. Т. 431, № 1. С. 16–19.

8. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена // ДАН. 2010. Т. 430, № 6. С. 738–742.

9. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2010. Т. 17, № 1. С. 25–56.

10. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Информ. и её примен. 2011. Т. 5, № 1. С. 39–45.

11. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. Уточнение структуры неравномерных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме с приложением к пуассоновским случайным суммам // ДАН. 2011. Т. 440, № 5. С. 583–588.

12. Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятн. примен. 2012. Т. 57, № 1. С. 62–97.

13. Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена // Теория вероятн. примен. 2006. Т. 51, № 3. С. 622–626.

14. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2007. Т. 14, № 1. С. 3–28.

15. Шевцова И. Г. Об абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена // Сборник статей молодых ученых факультета ВМиК МГУ. Москва: МАКС пресс, 2008. Т. 5. С. 101–110.

16. Шевцова И. Г. Некоторые оценки для характеристических функций с применением к уточнению неравенства Мизеса // Информ. и её примен. 2009. Т. 3, № 3. С. 69–78.

17. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме // ДАН. 2010. Т. 430, № 4. С. 466–469.

18. Шевцова И. Г. О неравенстве сглаживания // ДАН. 2010. Т. 430, № 5. С. 600–602.

19. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена // Теория вероятн. примен. 2010. Т. 55, № 3. С. 619–621.

20. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца // Теория вероятн. примен. 2010. Т. 55, № 2. С. 271–304.

21. Шевцова И. Г. Уточнение оценок скорости сходимости в теореме Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 435, № 1. С. 26–28.

22. Шевцова И. Г. Моментные оценки точности нормальной аппроксимации с уточнённой структурой для сумм независимых симметричных случайных величин // Теория вероятн. примен. 2012. Т. 57, № 3. С. 499–532.

23. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых симметричных случайных величин // ДАН. 2012. Т. 443, № 6. С. 671–676.

24. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин // ДАН. 2012. Т. 443, № 5. С. 555–560.

25. Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для обобщённых пуассоновских распределений // Теория вероятн. примен. 2013. Т. 58, № 1. С. 152–178.

26. Шевцова И. Г. Об абсолютных константах в неравенстве Берри–Эссеена и его структурных и неравномерных уточнениях // Информ. и её примен. 2013. Т. 7, № 1. С. 124–125.

27. Korolev V., Shevtsova I. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // Scand. Actuar. J. 2012. Vol. 2012, no. 2. P. 81–105. Available online since 04 June 2010.

28. Nefedova Y., Shevtsova I. On the constants in the uniform and non–uniform versions of the Berry–Esseen inequality for Poisson random sums // Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2010 International Congress / IEEE. 2010. P. 1141–1144.

29. Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands // arXiv:1111.6554. 2011.

30. Shevtsova I. Moment–type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation // Annales Mathematicae et Informaticae. 2012. Vol. 39. P. 241–307.

31. Shevtsova I. A square bias transformation: properties and applications // arXiv:1212.6775. 2013.

32. Shevtsova I. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications // arXiv:1301.2783. 2013.