

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Гаврилов Сергей Вадимович

**Численные методы решения задачи электроимпедансной
томографии в случае кусочно-постоянной проводимости**

Специальность 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова **Денисов Александр Михайлович.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова **Боголюбов Александр Николаевич;**

доктор физико-математических наук, начальник научно-исследовательской лаборатории ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л.Духова» **Сафронов Сергей Иванович.**

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится « 9 » октября 2013 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2013г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Захаров Е.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В настоящее время томографические методы широко применяются в различных областях науки и техники. Возникшие в первую очередь в связи с потребностями медицины, эти методы активно используются в геофизических исследованиях, различных технологиях неразрушающего контроля качества изделий, в обеспечении общественной безопасности и ряде других областей. В то же время медицина остается одной из основных сфер применения томографических методов. Различные виды томографии активно используются для диагностики онкологических заболеваний, в ортопедии, в кардиологии и других областях медицины. Томография также применяется для визуализации и контроля манипуляций при проведении многих видов современных оперативных вмешательств.

Математические методы имеют важное значение для развития и совершенствования томографических технологий. Численные алгоритмы и их программная реализация позволяют проводить автоматизированную обработку и интерпретацию больших объемов информации, характерных для томографии. Использование математического моделирования и программного обеспечения дает возможность строить объемные модели исследуемых объектов и проводить их анализ.

В настоящее время существует много разновидностей томографических методов, одним из критериев классификации которых является вид излучения, применяемого для зондирования исследуемых объектов. По этому критерию выделяют рентгеновскую, ультразвуковую, магнитно-резонансную и другие виды томографии. Одним из перспективных видов является электроимпедансная томография, в которой для зондирования используется электрическое поле. Электроимпедансная томография имеет ряд преимуществ в сравнении с другими томографическими

методами, что наилучшим образом прослеживается по медицинскому применению. Электроимпедансная томография не подвергает пациента рентгеновскому или иным видам радиационного излучения. Метод электроимпедансной томографии может безопасно применяться для продолжительного мониторинга активности внутренних органов человека, имеет высокую рентабельность и пригоден для реализации в портативных устройствах [15]. Совместное использование электроимпедансной томографии и других диагностических методов позволяет повысить точность и достоверность медицинских исследований. Примером может служить диагностическая визуализация новообразований молочной железы. Применение рентгеновского излучения в этих целях дает достоверный результат только в случае, когда степень поглощения рентгеновских лучей сильно отличается для новообразования и нормальных тканей молочной железы. Метод электроимпедансной томографии основан на контрасте в электрических свойствах тканей и может выявлять новообразования, незаметные или трудноразличимые на маммограмме [16].

Математические задачи, возникающие в области электроимпедансной томографии, относятся к классу нелинейных некорректно поставленных обратных задач. Численное решение таких задач представляют большую сложность и требует разработки специальных методов. Одним из эффективных принципов решения обратных задач является предложенный А.Н.Тихоновым принцип сужения класса возможных решений, учитывающий априорную информацию об искомом объекте [10]. Применительно к электроимпедансной томографии таким сужением класса является рассмотрение среды с кусочно-постоянной электрической проводимостью. Модель среды с кусочно-постоянной проводимостью, позволяющая с хорошей точностью воспроизводить свойства достаточно широкого класса объектов [12, 14], является одной

из распространенных моделей в электроимпедансной томографии и имеет большое практическое значение. Разработка численных методов решения задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и их программная реализация, безусловно, является актуальной.

Цель и задачи работы

1. Разработка численных методов решения двумерной и трехмерной задач электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на внешней границе.
2. Разработка численных методов решения двумерной и трехмерной задач электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае нескольких измерений на внешней границе.
3. Программная реализация предложенных методов и проведение вычислительных экспериментов с целью определения их эффективности.

Научная новизна. Предложены численные методы решения двумерной и пространственной задач электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе. Для двумерной и трехмерной задач электроимпедансной томографии с несколькими измерениями на внешней границе предложены итерационные методы их решения. Создано программное обеспечение, реализующее предложенные методы. Проведены вычислительные эксперименты, показавшие достаточно высокую эффективность предложенных методов.

Практическая значимость. Предложенные численные методы и созданный комплекс программ могут быть использованы при применении

электроимпедансной томографии в диагностике онкологических и кардиологических заболеваний.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

1. V международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания"(Обнинск, 14-18 мая 2011 года).
2. Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики"(Новосибирск, 5-12 августа 2012 года).
3. Научная конференция "Тихоновские чтения"(Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 29.10.2012-02.11.2012).
4. Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.
5. 4-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования.», посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 года).
6. Научный семинар "Обратные задачи математической физики"под руководством профессоров А.Б.Бакушинского, А.В.Тихонравова и А.Г.Яголы в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ имени М.В.Ломоносова.

7. Семинар по математическим методам в естественных науках под руководством профессора А.Н. Боголюбова на физическом факультете МГУ имени М.В.Ломоносова.
8. Научный семинар "Моделирование и идентификация тепловых процессов в технике" под руководством чл.-корр. РАН, д.т.н., профессора О.М.Алифанова в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК [1, 2, 4, 7] статья [6] и 3 тезиса докладов на конференциях [3, 5, 8].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 110 страниц, включая 20 рисунков. Библиография включает 94 наименований на 11 страницах.

Общая характеристика работы

Во введении обоснована актуальности диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследования, показана практическая значимость полученных результатов, дана информация об апробации диссертационной работы и публикациях автора.

Обзор литературы содержит анализ основных достижений в исследуемой области. Прослеживаются основные этапы развития томографических методов, приводятся описание и область применения электроимпедансной томографии. Рассматриваются математические задачи,

возникающие в электроимпедансной томографии, приводятся основные достижения в их теоретическом исследовании и разработке численных методов их решения.

В первой главе диссертации приводится математическая постановка и предложены три численных метода решения двумерной задачи электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на границе.

Математическая постановка задачи такова. На плоскости рассматривается односвязная ограниченная область Ω с границей Γ_0 . Область Ω_1 — односвязная область с границей Γ_1 , такая, что $\overline{\Omega_1} \in \Omega$. Границы Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Через Ω_0 обозначается область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$.

Рассматривается следующая задача. В предположении, что граница Γ_0 известна и σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, требуется определить неизвестную границу Γ_1 и функцию $u(x, y)$, такие что: $u \in C(\overline{\Omega})$, $u(x, y) = u_i(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_i$ ($i = 0, 1$), где $u_0 \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega_0})$, $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega_1})$,

$$\Delta u_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, i = 0, 1; \quad (1)$$

$$u_0(x, y) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial n}, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$u_0(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial n} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (5)$$

где $f(x, y)$, $g(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma_0$ — заданные функции.

Задача (1)-(5) описывает модель среды с кусочно-постоянной проводимостью.

В §1.1 разрабатывается численный метод решения поставленной задачи, основанный на интерпретации уравнений (1)-(5) как обратной задачи к задаче Дирихле (1)-(4), в которой требуется определить неизвестные Γ_1 и $u(x, y)$ по дополнительному условию (5). Эта обратная задача в диссертационной работе называется обратной задачей Дирихле-Неймана.

В §1.1.1 выводится операторное уравнение для функции, определяющей неизвестную границу Γ_1 . Для параметризации границы Γ_1 делается предположение, что класс неизвестных кривых Γ_1 таков, что известна точка M_0 , являющаяся общим центром звездности для кривых Γ_1 из этого класса, кроме того, кривые Γ_1 задаются в полярной системе координат с центром в точке M_0 функциями $r(\psi) : r(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ и $\|r\|_{C^2[0, 2\pi]} \leq c_0$, где c_0 - фиксированное число.

Решение задачи Дирихле (1)-(4) ищется в виде суммы двух потенциалов простого слоя

$$u(M) = \int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_{\Gamma_1} \nu(P) \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P, \quad (6)$$

где точка M с координатами (x, y) принадлежит области Ω .

С использованием введенного представления (6), уравнений (4), (3) и свойств потенциалов простого слоя выводится система интегральных уравнений для плотностей $\mu(P)$ и $\nu(P)$

$$\int_{\Gamma_0} \mu(P) \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_{\Gamma_1} \nu(P) \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \pi\nu(M) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P + \\ & + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P = 0, \quad M \in \Gamma_1. \end{aligned} \quad (8)$$

где n_m - внутренняя нормаль к кривой Γ_1 в точке M .

С использованием условия (5), представления (6) и свойств потенциала простого слоя строится уравнение

$$\begin{aligned} & -\pi\mu(M) + \int_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P + \\ & + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \ln \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) dl_P = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где n_m - внутренняя нормаль к кривой Γ_0 в точке M .

Уравнения (7), (8), (9), записанные в полярной системе координат, определяют нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $r(\psi)$

$$Ar = g \quad (10)$$

Для вычисления функции $(Ar)(\psi)$ при заданной $r(\psi)$, определяющей границу Γ_1 , нужно решить систему интегральных уравнений (7), (8) и определить плотности потенциалов $\mu(P), \nu(P)$, а затем вычислить значение оператора, стоящего в левой части уравнения (9).

В §1.1.2 строится итерационный метод решения обратной задачи Дирихле-Неймана. В качестве начального приближения $r_0(\psi)$ неизвестного контура Γ_1 принимается окружность. Переход от приближения $r_n(\psi)$, полученного на n -ом шаге итерационного процесса к приближению $r_{n+1}(\psi)$ осуществляется по следующему алгоритму.

В окрестности функции $r_n(\psi)$ уравнение (10) линеаризуется и

получается линейное уравнение для функции $\rho_n(\psi)$, представляющей собой поправку к функции $r_n(\psi)$:

$$B[r_n]\rho_n = g_n. \quad (11)$$

Решением этого уравнение является функция $\rho_n(\psi)$, с которой вычисляется

$$r_{n+1}(\psi) = r_n(\psi) + \rho_n(\psi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

При численной реализации итерационного метода на отрезке $[0, 2\pi]$ вводится сетка ψ_i и сеточные аналоги r_n^i функций $r_n(\psi)$. После замены интегралов, входящих в выражения, определяющие оператор $B[r_n]$, на квадратурные формулы задача решения уравнения (11) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется метод регуляризации Тихонова. Величина параметра регуляризации согласовывается с точностью задания исходной информации и с шагом итерационного процесса n .

В §1.2 разрабатывается численный метод решения двумерной задачи электроимпедансной томографии, основанный на интерпретации уравнений (1)-(5) как обратной задачи к задаче Неймана (1)-(3), (5), в которой требуется определить Γ_1 и $u(x, y)$ по дополнительному условию (4). Эта обратная задача в диссертационной работе называется обратной задачей Неймана-Дирихле.

В §1.2.1 выводится операторное уравнение для функции, определяющей неизвестную границу Γ_1 . Для класса кривых, в котором ищется граница Γ_1 , аналогично §1.1.1 делается предположение о существовании единого центра звездности и граница Γ_1 параметризуется в

полярной системе координат функцией $r(\psi)$. Для решения задачи Неймана (1)-(3), (5) используется представление в виде суммы потенциалов простого слоя (6). Это представление позволяет построить систему интегральных уравнений для нахождения плотностей потенциалов при фиксированном контуре Γ_1 , в которую входят условия (3), (5) и дополнительное условие, задающее значение решения $u(M)$ в некоторой фиксированной точке $M_1 \in \Gamma_0$.

Уравнения для определения плотностей потенциалов простого слоя в совокупности с условием (4), записанным с помощью представления (6) определяют нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $r(\psi)$.

В §1.2.2 строится итерационный метод решения обратной задачи Неймана-Дирихле. Принципы построения итерационного метода аналогичны §1.1.2. В окрестности функции $r_n(\psi)$ — приближения неизвестного контура, полученного на n -ом шаге итерационного процесса, нелинейное операторное уравнение для функции $r(\psi)$ линеаризуется и получается линейное уравнение для функции $\rho_n(\psi)$, представляющей собой поправку к функции $r_n(\psi)$. Это уравнение решается с применением метода регуляризации Тихонова.

В §1.3 разрабатывается третий численный метод решения двумерной задачи электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на границе.

Метод основан на введении вспомогательного контура, относительно близкого к Γ_0 , и включает в себя два этапа. На первом решается задача Коши для уравнения Лапласа и находится функция

$$u_0(M) = f_2(M), \quad M \in \Gamma_2 \quad (13)$$

на вспомогательном контуре Γ_2 , таком что $\Gamma_2 \in \Omega_0$ и Γ_2 содержит внутри себя контур Γ_1 . На втором этапе с найденной функцией $f_2(M)$ решается задача (1)-(4), (13).

В §1.3.1 приводится численный метод решения задачи Коши для уравнения Лапласа для нахождения значения потенциала на вспомогательном контуре. Математическая постановка задачи такова. Рассматривается односвязная область Ω_2 , ограниченная снаружи контуром Γ_0 и изнутри контуром Γ_2 . Требуется определить значение функции $u_0(M)$, $M \in \Gamma_2$, если известно, что в области Ω_2 функция $u_0(M)$ является решением задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta u_0(M) = 0, \quad M \in \Omega_2, \quad (14)$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (16)$$

Строится численный метод решения задачи (14)-(16), основанный на методе граничных интегральных уравнений [13, 9] и методе регуляризации Тихонова [11].

В §1.3.2 разрабатывается численный метод определения границы Γ_1 в задаче (1)-(4),(13). Метод основан на представлении решения краевой задачи в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя, построении операторного уравнения для неизвестной границы и решении его итерационным методом, на каждом шаге которого полученное операторное уравнение линеаризуется и его решение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, при котором применяется метод регуляризации Тихонова.

В §1.4 представлены сведения о программной реализации

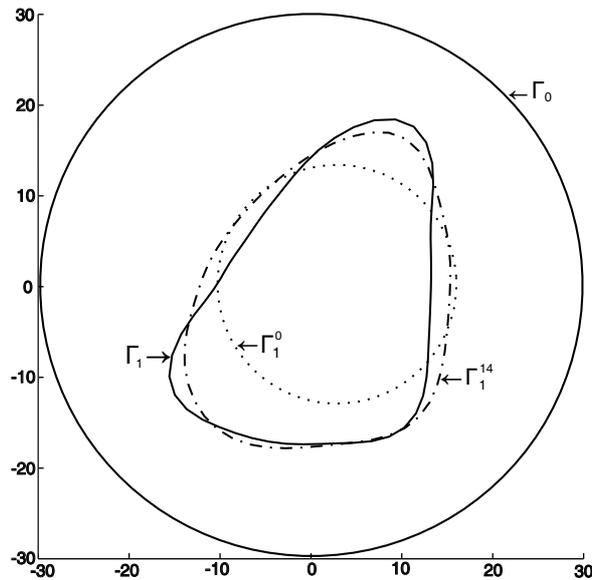


Рисунок 1. Результаты вычислительного эксперимента для метода Дирихле-Неймана

предложенных численных методов и приведены результаты вычислительных экспериментов, проведенных с использованием разработанного комплекса программ в среде программирования MATLAB. В §1.4 представлена схема проведения вычислений и полученные результаты для каждого из трех методов. На рис. 1 показаны результаты одного из вычислительных экспериментов, в котором для решения задачи электроимпедансной томографии использовалась программная реализация численного метода решения обратной задачи Дирихле-Неймана. В этом вычислительном эксперименте были выбраны $\sigma_0 = 3$, $\sigma_1 = 1$. Функция $f(\psi)$ имела вид

$$f(\psi) = 50 \left(\exp[-4 \sin^2(\psi/2)] - \exp[-4 \cos^2(\psi/2)] \right).$$

С заданными Γ_0 , Γ_1 , σ_0 , σ_1 и $f(\psi)$ решалась задача Дирихле (1)-(4) и находилась функция $g(\psi)$. В эту функцию вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(\psi)$, такая что $\|g(\psi) - g_\delta(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} / \|g(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} = 0,05$. Функция $g_\delta(\psi)$ использовалась в качестве исходных данных для численного решения обратной задачи. На рис. 1 приведены точный контур

Γ_1 , начальное приближение Γ_1^0 и результат решения обратной задачи Γ_1^{14} , полученный при выборе равномерных сеток на контуре Γ_0 в 100 узлов и на контуре Γ_1 в 60 узлов, в результате 14-ти итераций с начальным приближением Γ_1^0 . Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

В рамках проведенных вычислительных экспериментов все три предложенных численных метода показали схожую эффективность.

Результаты первой главы были опубликованы в работах [1, 2, 3, 6].

Во второй главе диссертационной работы разрабатывается численный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на границе.

Математическая постановка задачи такова. В пространстве рассматривается односвязная ограниченная область Ω с границей Γ_0 . Ω_1 — односвязная область с границей Γ_1 , такая, что $\overline{\Omega_1} \in \Omega$. Поверхности Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Через Ω_0 обозначается область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$.

Рассматривается следующая краевая задача. Требуется определить функцию $u(M)$, такую что: $u \in C(\overline{\Omega})$, $u(M) = u_i(M)$, $M \in \Omega_i$ ($i = 0, 1$), где $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})$ ($i = 0, 1$),

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \quad (17)$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \quad (18)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (19)$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (20)$$

Здесь σ_0, σ_1 заданные положительные постоянные, а $f(M)$ известная функция, непрерывная и не постоянная на Γ_0 .

Задача электроимпедансной томографии формулируется следующим

образом. Пусть в краевой задаче (17)-(20) поверхность Γ_0 , постоянные σ_0, σ_1 и функция $f(M)$ на Γ_0 заданы, а поверхность Γ_1 неизвестна. Требуется определить Γ_1 , если задана дополнительная информация о решении задачи (17)-(20):

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (21)$$

где $g(M)$ известная функция, непрерывная на Γ_0 , а n - внутренняя нормаль к Γ_0 .

В §2.1 выводится операторное уравнение для функции, определяющей неизвестную поверхность Γ_1 . Делается предположение, что класс неизвестных поверхностей Γ_1 таков, что известна точка M_0 , являющаяся общим центром звездности для поверхностей Γ_1 из этого класса, кроме того, поверхности Γ_1 задаются в сферической системе координат с центром в точке M_0 функциями $r(\theta, \varphi) : r(\theta, \varphi) \in C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$ и $\|r\|_{C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}} \leq c_0$, где c_0 — фиксированное число.

Для решения краевой задачи (17)-(20) вводится представление в виде суммы двух потенциалов простого слоя

$$u(M) = \iint_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P, \quad M \in \Omega, \quad (22)$$

где ρ_{MP} — расстояние между точками M и P .

С использованием представления (22), условий (19), (20) и свойств потенциала простого слоя получается система интегральных уравнений для плотностей $\mu(P)$, $\nu(P)$. Условие (21), записанное с учетом представления (22), в совокупности с системой уравнений для плотностей потенциалов простого слоя определяет нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $r(\theta, \varphi)$

$$Ur = g. \quad (23)$$

В §2.2 строится итерационный метод решения операторного уравнения (23). В качестве начального приближения $r_0(\theta, \varphi)$ для неизвестной поверхности принимается сфера. На каждом шаге итерационного метода уравнение (23) линеаризуется в окрестности функции $r_n(\theta, \varphi)$, получается линейное операторное уравнение относительно поправки к приближению $r_n(\theta, \varphi)$, которое решается с применением метода регуляризации Тихонова.

В §2.3 приводятся принципы программной реализации предложенного метода решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии и результаты вычислительных экспериментов.

Численная реализация итерационного метода проводится аналогично итерационному методу решения задачи Дирихле-Неймана в двумерном случае. На рис. 2 приведены результаты одного из вычислительных экспериментов, проведенных с использованием разработанного комплекса программ. Схема проведения вычислительного эксперимента была такова. С заданными $\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma_0, \sigma_1$ и $f(\theta, \varphi)$ решалась задача Дирихле (17)-(20) и находилась функция $g(\theta, \varphi)$, представляющая собой значение нормальной производной $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ на поверхности Γ_0 . В эту функцию вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(\theta, \varphi)$, такая что $\|g(\theta, \varphi) - g_\delta(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0,\pi] \times [0,2\pi]\}} / \|g(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0,\pi] \times [0,2\pi]\}} = 0,01$. Функция $g_\delta(\theta, \varphi)$ использовалась в качестве исходных данных для численного решения обратной задачи. На рис. 2 приведены некоторые результаты решения обратной задачи. Расчеты проводились при выборе равномерных сеток на $\Gamma_0 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 31; j = 0, 1, \dots, 63\}$ и на $\Gamma_1 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 17; j = 0, 1, \dots, 35\}$. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

Результаты второй главы были опубликованы в работах [4, 5].

В третьей главе разрабатываются численные методы решения задачи

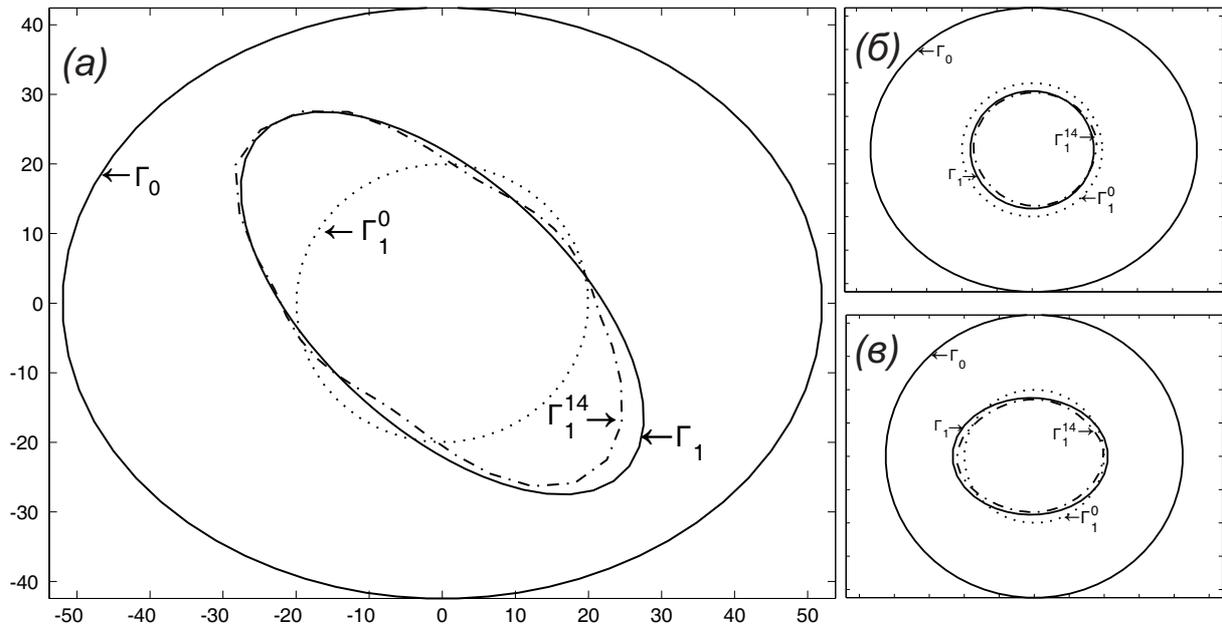


Рисунок 2. Результаты вычислительного эксперимента. Кривые Γ_1 , Γ_1^0 и Γ_1^{14} — сечения точной поверхности Γ_1 , начального приближения и найденной в результате 14 итераций поверхности Γ_1^{14} соответственно. (а) — сечение плоскостью, содержащей главную ось эллипса и ось OZ ; (б) — сечение плоскостью, проходящей через начало координат и перпендикулярной главной оси симметрии эллипса; (в) — сечение плоскостью, перпендикулярной оси OZ и проходящей через начало координат.

электроимпедансной томографии для кусочно-постоянной проводимости в случае нескольких измерений на внешней границе.

Математическая постановка задачи формулируется так. Рассматривается односвязная ограниченная область Ω на плоскости или в пространстве, имеющая границу Γ_0 . Ω_1 — односвязная область с границей Γ_1 , такая, что $\overline{\Omega_1} \in \Omega$. Границы Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Через Ω_0 обозначается область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$.

В предположении, что граница Γ_0 известна и σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, требуется определить неизвестную границу Γ_1 и функции $w^j(M)$: $w^j \in C(\overline{\Omega})$, $w^j(M) = u_i^j(M)$, $(M) \in \Omega_i$ ($i = 0, 1$), где $u_0^j \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega_0})$, $u_1^j \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega_1})$,

$$\Delta u_i^j(M) = 0, \quad (M) \in \Omega_i, i = 0, 1; \quad (24)$$

$$u_0^j(M) = u_1^j(M), \quad (M) \in \Gamma_1, \quad (25)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1^j(M)}{\partial n}, \quad (M) \in \Gamma_1, \quad (26)$$

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad (M) \in \Gamma_0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad (M) \in \Gamma_0, \quad (28)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$. Здесь пара функций $f^j(M)$ и $g^j(M)$ соответствует j -му измерению потенциала и его нормальной производной на внешней границе, а m — число измерений.

В §3.1 разрабатывается численный метод решения двумерной задачи электроимпедансной томографии в случае нескольких измерений и приводятся результаты вычислительных экспериментов.

В §3.1.1 строится численный метод решения поставленной задачи. При каждом фиксированном j , функция $f^j(x, y)$ берется в качестве начальных данных задачи Дирихле (24)-(27), и получается обратная задача Дирихле-Неймана с дополнительным условием (28), определяемым функцией $g^j(x, y)$. Для этой задачи по принципам, изложенным в §1.1, строится операторное уравнение. Для его построения вводится представление функции $u^j(x, y)$ в виде суммы двух потенциалов простого слоя. С использованием условий (26), (27), (28) и свойств потенциала простого слоя получается операторное уравнение для функции $r(\psi)$, которая параметризует границу Γ_1 в полярной системе координат,

$$A^j r = g^j. \quad (29)$$

После построения операторов A^j для всех $j = 1, 2, \dots, m$ обратная задача

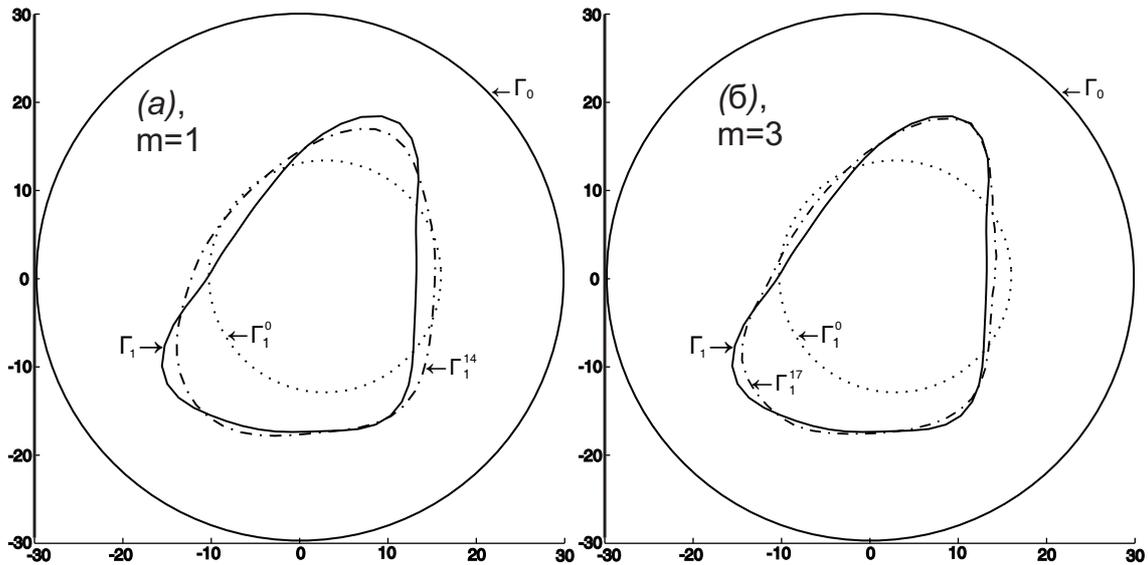


Рисунок 3. Результаты вычислительного эксперимента для задачи с 1 измерением (а) и 3-мя измерениями (б). Кривые Γ_1 и Γ_1^0 — точный контур Γ_1 и начальное приближение. Γ_1^{14} и Γ_1^{17} — кривые, полученные в результате 14 итераций в вычислительном эксперименте с 1 измерением (а) и в результате 17 итераций в вычислительном эксперименте с 3 измерениями.

(24)-(28) сводится к решению операторного уравнения

$$A_m r = g_m \quad (30)$$

где оператор $A_m = (A^1, A^2, \dots, A^m)$ отображает функцию $r(\psi)$ в вектор-функцию $g_m = (g^1, g^2, \dots, g^m)$.

Уравнение (30) решается итерационным методом. В качестве начального приближения $r_0(\psi)$ неизвестного контура принимается окружность. На каждом шаге итерационного метода уравнение (30) линеаризуется в окрестности функции $r_n(\psi)$, получается линейное операторное уравнение относительно поправки к приближению $r_n(\psi)$, которое решается с применением метода регуляризации Тихонова.

В §3.1.2 приводятся сведения о программной реализации предложенного итерационного метода и результаты проведенных вычислительных экспериментов. На рис. 3 представлено сравнение

результатов вычислительных экспериментов по решению задачи электроимпедансной томографии со схожими параметрами в случае одного (а) и трех (б) измерений на внешней границе.

В §3.2 разрабатывается численный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае нескольких измерений и приводятся результаты вычислительных экспериментов, проведенных с использованием построенной программной реализации предложенного метода. В §3.2.1 изложен итерационный метод решения поставленной задачи, при построении которого используются принципы, аналогичные §3.1.1. В §3.2.2 приводятся сведения о программной реализации предложенного итерационного метода и результаты проведенных вычислительных экспериментов.

Результаты третьей главы были опубликованы в работах [3, 7, 8].

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Основные результаты

1. Разработаны и программно реализованы численные методы определения неизвестной границы неоднородности в двумерной задаче электроимпедансной томографии при кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на внешней границе;
2. Предложен и программно реализован итерационный метод определения неизвестной поверхности, являющейся границей неоднородности, в трехмерной задаче электроимпедансной томографии при кусочно-постоянной проводимости в случае одного измерения на внешней границе;

3. Для двумерной и трехмерной задач электроимпедансной томографии с несколькими измерениями на внешней границе предложены и программно реализованы итерационные методы определения границы неоднородности.

Список публикаций

- [1] *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численный метод определения границы неоднородности в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. т.50. № 8. с.1462 - 1470.
- [2] *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. т.51. № 8. с.1476 - 89.
- [3] *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Итерационные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде//V международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания Обнинск, 14-18 мая 2011 г. Тезисы докладов. с.71.
- [4] *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. т.52. № 8. с.1426-36.
- [5] *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Итерационный метод решения задачи

электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости//Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева "Обратные и некорректные задачи математической физики Новосибирск, 5-12 августа 2012 г. Тезисы докладов. с.186.

- [6] *Гаврилов С.В.* Численный метод решения задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе//Прикладн. матем. и информ. 2012. т.41. с.38-47.
- [7] *Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе//Вычисл. методы и программ. 2013. т.14. с.26-30.
- [8] *Гаврилов С.В.* Численный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе//4-я Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования.», посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г. Тезисы докладов. с.403-04.

Цитированная литература

- [9] *Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В.* Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии

сердца//Дифференц. ур-ния. 2009. т.45. № 7. с.1014-1022.

- [10] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач//Докл. АН СССР. 1943. Т.39 № 5. С 195-98.
- [11] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач//Москва: Наука. 1974.
- [12] *Choi M.H., Kao T.-J., Isaacson D., Saulnier G.J., Newell J.C.* A simplified model of mammography geometry for breast cancer imaging with electrical impedance tomography//Proceedings of the 26th Annual International Conference of the IEEE EMBS, San Francisco, CA, USA, September 2004, pp.960-963.
- [13] *Dihn Nho Hao, Lesnic D.* The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method//IMA Journal of Applied Mathematics (2000) 65, 199-217.
- [14] *Saeed S. Babaeizadeh, Dana H., Brooks D.H.* Electrical impedance tomography for piecewise constant domains using boundary element shape-based inverse solutions//IEEE Trans Med Imaging 26(5) pp.637-47 (2007)
- [15] *Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M.* Electrical impedance tomography//IEEE Signal Processing Magazine. 2001. vol. 18, № 6, pp. 31-43.
- [16] *Zou Y., Guo Z.* A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection//Medical Engineering and Physics. 2003. vol. 25, № 2, pp. 19-90.