Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

НАУМОВ Алексей Александрович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ С ЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре математической статистики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ульянов Владимир Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ Афанасьева Лариса Григорьевна
	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН Буфетов Александр Игоревич
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 18 октября 2013 года в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ http://www.cs.msu.su в разделе „Наука “ – „Работа диссертационных советов“ – „Д 501.001.44“.

Автореферат разослан __ сентября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета В. А. Костенко

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Теория случайных матриц и методы, используемые при исследовании случайных матриц, играют важную роль в различных разделах теоретической и прикладной математики. Случайные матрицы возникли из приложений, сначала в анализе данных, а позже в качестве статистических моделей в квантовой механике. В последние годы теория случайных матриц нашла многочисленные применения во многих других областях, например, в численном анализе, финансовой инженерии, биологии.

Одна из основных проблем в теории случайных матриц – исследовать сходимость последовательности эмпирических спектральных функций распределения для заданной последовательности случайных матриц.

В основополагающей работе Вигнера[1] рассмотрены симметричные случайные матрицы, элементы которых в верхней треугольной части являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими симметричное бернуллиевское распределение. Вигнер доказал, что ожидаемая эмпирическая спектральная функция распределения собственных значений таких матриц сходится к полукруговому закону. Позже этот результат был назван "полукруговым законом Вигнера" и обобщен в ряде работ, см., например, работу Арнольда[2]. Наиболее общие условия сходимости к полукруговому закону Вигнера для симметричных случайных матриц с независимыми элементами в верхней треугольной части матрицы получены Пастуром[3]. Пастур показал, что условие Линдеберга является достаточным для сходимости к полукруговому закону. Отметим, что в работе Пастура предполагалось, что элементы матрицы имеют одинаковые дисперсии.

Другой интересный ансамбль случайных матриц представляют матрицы с независимыми элементами. Будем говорить, что выполнен круговой закон, если последовательность эмпирических спектральных функций распределения сходится к функции распределения, которая имеет плотность равномерного распределения на единичном круге. Для матриц с независимыми комплекснозначными нормально распределенными случайными элементами круговой закон был доказан Метой[4]. Его доказательство использует явное выражение для совместной плотности собственных значений случайной матрицы, которое было найдено

[1]Wigner E. *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices.* Ann. of Math. (2), 1958, **67**, 325–327.

[2]Arnold L. *On Wigner's semicircle law for the eigenvalues of random matrices.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 1971, **19**, 191–198.

[3]Пастур Л. *Спектры случайных самосопряженных операторов.* УМН, 1973, **28**, 3–64.

[4]Mehta M. *Random matrices.* Boston, MA: Academic Press Inc., 1991.

Жинибром[5]. В общем случае, в предположении существования конечных четвертых моментов и плотности у распределений элементов матрицы, круговой закон доказан Гирко[6]. Но его доказательство в литературе считается неполным. Предполагая существование плотности и некоторые моментные ограничения, Бай[7] доказал сходимость почти наверное эмпирических спектральных функций распределения к круговому закону. Без предположения о существовании плотности, но при дополнительных моментных ограничениях круговой закон получен Гётце и Тихомировым[8], Паном и Чжоу[9], Тао и Ву[10]. В предположении конечности лишь двух моментов элементов матрицы круговой закон установлен Тао и Ву[11]. Доказательства кругового закона в работах Гётце и Тихомирова, Пана и Чжоу, Тао и Ву существенным образом опираются на оценку наименьшего сингулярного числа случайной матрицы и основаны на работе Рудельсона и Вершинина[12]. Следует также отметить, что разработанная Гирко[6] техника использовалась всеми отмеченными выше авторами для доказательства кругового закона.

Рассмотрим ансамбль матриц с коррелированными элементами, который является промежуточным в отношении ранее рассмотренных ансамблей. Любые два элемента матрицы из этого ансамбля, симметричные относительно главной диагонали, коррелированны с постоянным коэффициентом корреляции, но не зависят от остальных элементов матрицы. Если коэффициент корреляции равен 1, то имеем ансамбль симметричных матриц. Если коэффициент корреляции равен 0, и дополнительно потребуем, что элементы матрицы имеют совместное гауссовское распределение, то имеем ансамбль матриц с независимыми элементами. Впервые такие ансамбли рассматривал Гирко[13]. В предположении конечности четвертого момента и существовании плотности у элементов матрицы Гирко показал, что эмпирическая спектральная функция распределения сходится к функции распределения, которая имеет плотность равномерного распределения на эллипсе. Оси эллипса определяются коэффициентом корреляции между

---

[5]Ginibre J. *Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices.* J. Mathematical Phys., 1965, **6**, 440–449.

[6]Гирко В. *Круговой закон.* Теория вероятн. и ее примен., 1984, **29**, №4, 669–679.

[7]Bai Z., Silverstein J. W. *Spectral analysis of large dimensional random matrices.* New York: Springer, 2010.

[8]Götze F., Tikhomirov A. *The circular law for random matrices.* Ann. Probab., 2010, **38**, №4, 1444–1491.

[9]Pan G., Zhou W. *Circular law, Extreme Singular values and Potential theory.* arXiv:0705.3773, http://arxiv.org/abs/arXiv:0705.3773.

[10]Tao T., Vu V. *Random Matrices: The circular Law* arXiv:0708.2895, http://arxiv.org/abs/arXiv:0708.2895.

[11]Tao T., Vu V. *Random matrices: universality of local eigenvalue statistics* Acta Math., 2011, **206**, №1, 127–204.

[12]Rudelson M., Vershynin R. *The Littlewood-Offord problem and invertibility of random matrices.* Adv. Math., 2008, **218**, №2, 600–633.

[13]Гирко В. *Эллиптический закон* Теория веротн. и ее примен., 1985, **30**, № 4, 640–651.

элементами матрицы. Гирко назвал этот результат "эллиптическим законом". Но доказательство Гирко в литературе считается неполным, как и доказательство кругового закона. В гауссовском случае эллиптический закон получен Соммерсом, Крисанти, Сомполински и Стейном[14]. В настоящей диссертации приведено полное доказательство эллиптического закона в предположении конечности четвертого момента элементов матрицы и без каких-либо дополнительных предположений о существовании плотности. В ходе доказательства получена оценка наименьшего сингулярного числа, которая обобщает результат работы Вершинина[15] для случая симметричных матриц.

Гётце и Тихомиров[16] рассмотрели ансамбль симметричных случайных матриц со структурой случайного поля. Примером такого ансамбля может служить классический ансамбль симметричных матриц с независимыми элементами в верхней треугольной части матрицы, рассмотренный выше, и ансамбль случайных матриц с фиксированным или ограниченным следом. В их работе предполагалось выполнение дополнительных условий на урезанные случайные величины. В настоящей диссертации устанавливаются достаточные условия для сходимости к полукруговому закону для симметричных случайных матриц со структурой случайного поля. Полученные условия являются аналогами классических достаточных условий в центральной предельной теореме для мартингал-разностей, см., например монографию Холла и Хейди[17]. В большинстве предыдущих работ рассматривались симметричные случайные матрицы, элементы которых имеют равные дисперсии. В гауссовском случае в работе[18] был рассмотрен ансамбль матриц с разными дисперсиями. Упомянем также обзор Эрдеша[19], в котором были рассмотрены симметричные случайные матрицы с субгауссовскими распределениями и имеющие разные дисперсии. В настоящей диссертации также не предполагается равенство дисперсий элементов матрицы.

Еще одним важным ансамблем для приложений является ансамбль ковариационных матриц. Впервые такие матрицы рассматривались

[14]H. Sommers, A. Crisanti, H. Sompolinsky, Y. Stein *Spectrum of large random asymmetric matrices.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 1895–1898.

[15]Vershynin R. *Invertibility of symmetric random matrices.* arXiv:1102.0300, http://arxiv.org/abs/1102.0300.

[16]Götze F., Tikhomirov A. N. *Limit theorems for spectra of random matrices with martingale structure.* Теория веротн. и ее примен., 2006, **51**, № 1, 171–192.

[17]Hall P., Heyde C. C. *Martingale limit theory and its application.* New York: Academic Press Inc., 1980.

[18]Shlyakhtenko D. *Random gaussian band matrices and freeness with amalgamation.* International Mathematics Research Notices, 1996, **20**, 1014–1025.

[19]Erdős L. *Universality of wigner random matrices: a survey of recent results.* arXiv:1004.0861, http://arxiv.org/abs/1004.0861.

Уишартом[20]. Из работы Марченко и Пастура[21] следует, что для ковариационных матриц с независимыми строками эмпирическая спектральная функция распределения сходится к некоторому пределу, который имеет плотность. Распределение с такой плотностью теперь носит название – закон Марченко–Пастура. Результат был обобщен в ряде работ. В частности, были рассмотрены ансамбли матриц со структурой случайного поля. Гётце и Тихомиров[22] получили аналог своего результата[16] для симметричных случайных матриц. В работе Адамчека[23] не предполагалось, что все дисперсии равны, но предполагалось выполнение закона больших чисел для квадратов элементов матрицы по строкам и столбцам. Однако в работе Адамчека[23] предполагается равномерная ограниченность всех моментов элементов матрицы. В настоящей диссертации получены достаточные условия сходимости к закону Марченко–Пастура, которые аналогичны условиям в центральной предельной теореме для мартингал разностей. Подчеркнем, что в работе не предполагается равенство дисперсий элементов матрицы, а вместо этого требуется сходимость сумм дисперсий в строке и столбце к единице. Результаты обобщают классический закон Марченко–Пастура для матриц с независимыми элементами и результаты работ Гётце, Тихомирова[22] и Адамчека[23].

Цель работы. В диссертации рассматривается ансамбль случайных матриц, у которых любые два элемента, симметричные относительно главной диагонали, коррелированны с постоянным коэффициентом корреляции и не зависят от остальных элементов матрицы. Одной из целей диссертации является доказательство эллиптического закона для ансамблей таких матриц без предположения о существовании плотности у элементов матрицы. Также в диссертации рассматриваются симметричные случайные матрицы и ковариационные случайные матрицы со структурой случайного поля. Второй целью диссертации является получение достаточных условий сходимости к полукруговому закону и закону Марченко–Пастура, которые эквивалентны классическим условиям в мартингальной центральной предельной теореме.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые получено полное доказательство эллиптического закона для случайных матриц в предположении конечности четвертого момента

[20]Wishart J. *Generalized product moment distribution in samples.* Biometrika, 1928, **20**, 32–52.

[21]Марченко В. А., Пастур Л. А. *Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц.* Матем. сб., 1967, **72**, № 4, 507–536.

[22]Götze F., Tikhomirov A. *Limit theorems for spectra of positive random matrices under dependence.* Записки научных семинаров ПОМИ РАН, 2004, **311**, 92–123.

[23]Adamczak R. *On the Marchenko-Pastur and circular laws for some classes of random matrices with dependent entries.* Electron. J. Probab., 2011, **16**, № 37, 1068–1095.

элементов случайной матрицы, но без каких-либо дополнительных предположений о существовании плотности у элементов матрицы.

2. Для симметричных случайных матриц со структурой случайного поля установлены достаточные условия сходимости к полукруговому закону. В работе не предполагается равенство дисперсий элементов матрицы.

3. Для несимметричных матриц со структурой случайного поля установлен закон Марченко–Пастура. В работе не предполагается равенство дисперсий элементов матрицы.

Методы исследования. Основные методы, использовавшиеся для доказательства результатов работы — метод логарифмического потенциала, метод преобразования Стилтьеса и метод моментов. Для доказательства универсальности спектра собственных значений используется метод предложенный Бенткусом[24]. В терминах матриц он заключается в том, что мы можем рассмотреть семейство матриц вида $\mathbf{Z}(\varphi) = \mathbf{X}\cos\varphi + \mathbf{Y}\sin\varphi$, где $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ некоторые матрицы. Тогда расстояние между преобразованиями Стилтьеса матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ может быть переписано в терминах преобразования Стилтьеса матриц $\mathbf{Z}(\varphi)$.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер и одновременно допускают применение к решению различных практических задач из области физики и финансовой инженерии.

Апробация работы и публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ.

Основные результаты диссертации докладывались на XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2012» (апрель 2012 года, Москва), на научном семинаре по случайным матрицам Университета Билефельд (июнь 2012 года, Билефельд, Германия), на конференции Real World Models: Recent Progress and New Frontier (октябрь 2012 года, Сюйчжоу, Китай), на большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (апрель 2013 года, Москва), на XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2013» (апрель 2013 года, Москва), на конференции Stochastics and Real World Models 2013 (июль 2013 года, Билефельд, Германия), на летней школе Randomness in Physics and Mathematics: From Quantum Chaos to Free Probability (август 2013 года, Билефельд, Германия).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех

[24]Bentkus V. *A new approach to approximations in probability theory and operator theory.* Liet. Mat. Rink., 2003, **43**, № 4, 444–470.

глав, разбитых на разделы, приложения, содержащего вспомогательные результаты, и списка литературы из 42 наименований. Общий объем работы составляет 101 страница.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору В.В. Ульянову. Также автор искренне благодарен д.ф.-м.н. профессору А.Н. Тихомирову и доктору математики, профессору Ф. Гётце.

Краткое содержание диссертации.

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации и исторический обзор, связанный с темой работы. Кроме этого, в нем также формулируются и обсуждаются полученные результаты.

Всюду далее будем предполагать, что все случайные величины заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и будем писать почти всюду (п.в) вместо $\mathbb{P}$-почти всюду.

Индикатор события A обозначим через $I(A)$. $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ обозначает борелевскую σ-алгебру подмножеств $\mathbb{T}$.

Будем говорить, что последовательность случайных мер $\mu_n : \mathcal{B}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, сходится к предельной неслучайной мере μ по вероятности (обозначение: $\mu_n \to \mu$ по вероятности), если для всех непрерывных и ограниченных функций $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{T}} f(x)\mu_n(dx) - \int_{\mathbb{T}} f(x)\mu(dx)\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогично, μ_n сходится к μ почти всюду (обозначение: $\mu_n \to \mu$ п.в.), если

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\mu(dx)\right) = 1.$$

В **главе 1** рассматриваются случайные матрицы $\mathbf{X}_n(\omega) = \{X_{ij}(\omega)\}_{i,j=1}^n$, которые удовлетворяют следующим условиям $(\mathbf{C0})$:
a) пары $(X_{ij}, X_{ji})_{j\neq i}$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы;
b) $\mathbf{E}X_{12} = \mathbf{E}X_{21} = 0, \mathbf{E}X_{12}^2 = \mathbf{E}X_{21}^2 = 1$ и $\max(\mathbf{E}X_{12}^4, \mathbf{E}X_{21}^4) \le M_4$;
c) $\mathbf{E}(X_{12}X_{21}) = \rho$, $|\rho| \le 1$
d) X_{ii} – н.о.р. случайные величины, не зависящие от $\{X_{ij}\}_{i\neq j}$, и $\mathbf{E}X_{11} = 0, \mathbf{E}X_{11}^2 < \infty$.

Обозначим через $\lambda_1, ..., \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n$ и определим эмпирическую спектральную меру $\mu_n(\cdot)$ с помощью

$$\mu_n(B) = \frac{1}{n}\#\{1 \le i \le n : \lambda_i \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

Как отмечалось выше, одной из основных проблем в теории случайных матриц является исследование сходимости последовательности эмпирических спектральных функций распределения или мер к некоторому пределу. Следующая теорема, которая является основным результатом главы 1, дает ответ на поставленный вопрос для случайных матриц, удовлетворяющих условиям (**C0**).

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{X}_n$ *удовлетворяет условиям* (**C0**) *и* $|\rho| < 1$. *Тогда* $\mu_n \to \mu$ *по вероятности, и* μ *имеет плотность* f_ρ *следующего вида*

$$f_\rho(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1}(1-\rho^2)^{-1}, & x, y \in \left\{u, v \in \mathbb{R} : \frac{u^2}{(1+\rho)^2} + \frac{v^2}{(1-\rho)^2} \le 1\right\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде чем приступить к доказательству Теоремы 1.1 в общем случае, рассмотрим специальный случай, когда элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ имеют гауссовское распределение с нулевым средним,

$$\mathbf{E}X_{ij}^2 = 1 \text{ и } \mathbf{E}X_{ij}X_{ij} = \rho, \quad i \ne j, \quad |\rho| < 1.$$

Соответствующая мера на пространстве матриц $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ может быть выписана в явном виде

$$\mathbb{P}(d\mathbf{A}) = C \exp\left[-\frac{n}{2(1-\rho^2)} \operatorname{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \rho\mathbf{A}^2)\right] d\mathbf{A}, \tag{1}$$

где C – нормировочная константа, а $d\mathbf{A} = \prod_{i,j=1}^n dA_{ij}$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^{n^2}$. Соммерс, Крисанти, Сомполински и Стейн[14] установили, что в этом случае $\mu_n \to \mu$ п.в., где μ имеет плотность f_ρ из Теоремы 1.1. Доказательство существенным образом основано на явном выражении для совместной плотности собственных значений случайной матрицы $\mathbf{X}_n$, которое может быть получено из (1).

В общем случае нельзя выписать явную формулу для совместной плотности собственных значений матрицы $\mathbf{X}_n$ и, поэтому, требуются другие методы анализа. Доказательство Теоремы 1.1 основано на методе логарифмического потенциала. Напомним, что логарифмическим потенциалом U_m меры $m(\cdot)$ называется функция $U_m : \mathbb{C} \to (-\infty, +\infty]$, определенная для всех $z \in \mathbb{C}$ с помощью

$$U_m(z) = -\int_{\mathbb{C}} \ln|z - w| m(dw).$$

Логарифмический потенциал меры μ_n может быть переписан в следующем виде

$$U_{\mu_n}(z) = -\int\limits_{\mathbb{C}} \ln|z-w|\mu_n(dw) = -\frac{1}{n}\ln\left|\det\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}\right)\right|$$

$$= -\frac{1}{2n}\ln\det\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}\right)^*\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}\right) = -\int\limits_0^\infty \ln x\nu_n(dx),$$

где через $\nu_n(\cdot) := \nu_n(z,\cdot)$ мы обозначили эмпирическую спектральную меру сингулярных чисел $s_n(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}) \le \ldots \le s_1(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I})$ матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}$. Такое представление позволяет нам перейти от исследования спектра несимметричной матрицы $\mathbf{X}_n$ к исследованию спектра эрмитовой матрицы $(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I})^*(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I})$.

Одним из ключевых результатов, на котором основано доказательство Теоремы 1.1, является следующая лемма из работы Борденаве и Чафая[25].

Лемма 1.1. *Пусть $(\mathbf{X}_n)_{n\ge1}$ является последовательностью случайных матриц размера $n \times n$. Предположим, что для почти всех $z \in \mathbb{C}$ существует вероятностная мера ν_z на $[0,\infty)$, такая что*
a) $\nu_n \to \nu_z$ по вероятности при $n \to \infty$;
b) $\ln(\cdot)$ равномерно интегрируем по вероятности относительно семейства $\{\nu_n\}_{n\ge1}$.

Тогда существует вероятностная мера μ, такая что
a) $\mu_n \to \mu$ по вероятности при $n \to \infty$;
b) для почти всех $z \in \mathbb{C}$

$$U_\mu(z) = -\int\limits_0^\infty \ln x\nu_z(dx).$$

Под равномерной интегрируемостью в условии b) подразумевается, что для всех $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{t\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\int\limits_{|\ln x|>t}|\ln x|\nu_n(dx) > \varepsilon\right) = 0.$$

Лемма 1.1 и ее доказательство возникли из идей работы Гирко[6], которые в дальнейшем были развиты в работах Бая[7], Гётце и Тихомирова[8], Тао и Ву [10,11].

Предположим, что условия a) и b) Леммы 1.1 выполнены. В силу Леммы 1.1 существует вероятностная мера $\hat{\mu}$, такая что $\mu_n \to \hat{\mu}$ по

[25] Bordenave C., Chafaï D. *Around the circular law.* arXiv:1109.3343, http://arxiv.org/abs/1109.3343.

вероятности и $U_{\hat{\mu}}(z) = -\int\limits_0^\infty \ln x \nu_z(dx)$. Но мы знаем, что в гауссовском случае $\mu_n \to \mu$ по вероятности и $U_\mu(z) = -\int\limits_0^\infty \ln x \nu_z(dx)$. Т.к. ν_z одно и то же для всех матриц, которые удовлетворяют условиям $(\mathbf{C0})$, то имеем

$$U_{\hat{\mu}}(z) = U_\mu(z).$$

Из единственности логарифмического потенциала заключим, что $\hat{\mu} = \mu$.

Таким образом, доказательство эллиптического закона разбивается на два основных этапа. В ходе первого этапа нужно доказать равномерную интегрируемость логарифма относительно семейства мер $\nu_n(z, \cdot), n \geq 1$. Доказательство приведено в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия* $(\mathbf{C0})$, *то* $\ln(\cdot)$ *равномерно интегрируем по вероятности относительно семейства* $\{\nu_n\}_{i \geq 1}$.

Для доказательства Теоремы 1.2 нужно показать, что наименьшее сингулярное число матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}$ мало с очень малой вероятностью. Это сделано в следующей теореме.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbf{A} = \mathbf{X}_n - z\mathbf{I}$, *где* $\mathbf{X}_n$ *– случайная матрица, удовлетворяющая условиям* $(\mathbf{C0})$, *и* $K > 1$. *Тогда для всех* $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(s_n(\mathbf{A}) \leq \varepsilon n^{-1/2}, ||\mathbf{A}|| \leq K\sqrt{n}) \leq C(\rho)\varepsilon^{1/8} + C'(\rho)n^{-1/8},$$

где $C(\rho), C'(\rho)$ *– некоторые константы, зависящие только от* ρ, K *и* M_4.

Доказательство основано на идеях работ М. Рудельсона и Р. Вершинина[12,15].

Для доказательства Теоремы 1.2 нужно также установить, что для сингулярных чисел верны следующие леммы.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены* $(\mathbf{C0})$. *Тогда существует константа* $K > 0$, *зависящая от* ρ, *такая, что* $\mathbb{P}(s_1(\mathbf{X}_n) \geq K\sqrt{n}) = o(1)$.

Лемма 1.3. *Если выполнены* $(\mathbf{C0})$, *то существуют* $c > 0$ *и* $0 < \gamma < 1$ *такие, что для всех* $n \gg 1$ *и* $n^{1-\gamma} \leq i \leq n-1$ *выполнено неравенство* $s_{n-i}(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I}) \geq cn^{-1}i$ *п.в.*

Второй этап доказательства эллиптического закона состоит в том, что эмпирическая спектральная мера сингулярных чисел матрицы $(n^{-1/2}\mathbf{X}_n - z\mathbf{I})$ сходится к некоторому неслучайному пределу, который является одним и тем же для всех моделей матриц, которые удовлетворяют условиям $(\mathbf{C0})$.

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены условия* $(\mathbf{C0})$. *Существует неслучайная вероятностная мера* $\nu_z(\cdot) := \nu(z, \cdot)$, *такая что* $\nu_n \to \nu_z$ *по вероятности.*

В **главе 2** рассматривается ансамбль симметричных матриц $\mathbf{X}_n = \{X_{jk}\}_{j,k=1}^n$, элементы которых имеют $\mathbf{E}X_{jk} = 0$ и $\mathbf{E}X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Снова обозначим через $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}_n$, определим эмпирическую спектральную функцию распределения с помощью

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}_n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\lambda_i \leq x)$$

и соответствующую ей ожидаемую эмпирическую спектральную функцию распределения $F^{\mathbf{X}_n}(x) := \mathbf{E}\mathcal{F}^{\mathbf{X}_n}(x)$.

Определим набор σ-алгебр

$$\mathfrak{F}^{(i,j)} := \sigma\{X_{kl} : 1 \leq k \leq l \leq n, (k,l) \neq (i,j)\}, 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Под дробью Линдеберга для случайных матриц будем понимать

$$L_n(\tau) := \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{ij}|^2 I(|X_{ij}| \geq \tau\sqrt{n}), \quad \tau > 0.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\mathbf{E}(X_{ij}|\mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0 \text{ п.в.}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|\mathbf{E}(X_{ij}^2|\mathfrak{F}^{(i,j)}) - \sigma_{ij}^2| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{3}$$

$$\text{для любого фиксированного } \tau > 0 \quad L_n(\tau) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Всюду далее будем использовать условие (4) не только для матрицы $\mathbf{X}_n$, но и для других матриц, заменяя элементы X_{ij} в определении дроби Линдеберга соответствующими элементами.

Для всех $1 \leq i \leq n$ обозначим $B_i^2 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2$. Потребуем, чтобы σ_{ij}^2 удовлетворяли следующим условиям:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |B_i^2 - 1| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{5}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} B_i \leq C, \tag{6}$$

где C некоторая абсолютная константа.

Заметим, что условия (2)–(6) являются аналогами достаточных условий в мартингальной центральной предельной теореме, см., например, монографию Холла и Хейди[17].

Следующая теорема представляет собой основной результат главы 2.

Теорема 2.1. *Пусть случайные матрицы* $\mathbf{X}_n$ *удовлетворяют условиям* (2)–(6). *Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}_n}(x) - G(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Фиксируем произвольные $1 \leq i \leq j \leq n$. Используя свойство математического ожидания и условие (2), легко видеть, что для всех $(k,l) \neq (i,j), 1 \leq k \leq l \leq n$,

$$\mathbf{E}X_{ij}X_{kl} = \mathbf{E}\mathbf{E}(X_{ij}X_{kl}|\mathfrak{F}^{(i,j)})) = \mathbf{E}X_{kl}\mathbf{E}(X_{ij}|\mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0.$$

Следовательно, элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ некоррелированы. Если дополнительно потребовать, что элементы матрицы $\mathbf{X}_n$ независимые случайные величины, то условия (2) и (3) будут автоматически выполнены. Таким образом, для сходимости к полукруговому закону для симметричных матриц с независимыми элементами достаточно требовать выполнения условий (4)–(6).

Приведем еще один ансамбль случайных матриц, которые удовлетворяют условиям (2)–(6). Гётце и Тихомиров[16] рассмотрели ансамбли симметричных случайных матриц с фиксированным или ограниченным следом. Впервые такие ансамбли были рассмотрены в работах Розенцвейга[26] и Бронка[27]. Разумным обобщением может служить следующий ансамбль. Предположим, что $X_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq n$, имеют совместное равномерное распределение на многомерном эллипсе или эллипсоиде с полуосями $\sigma_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq n$. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{X_{jk}}{\sigma_{jk}}\right)^2 = N,$$

или в случае эллипсоида

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{X_{jk}}{\sigma_{jk}}\right)^2 \leq N,$$

где $N = n(n-1)/2$. Следуя рассуждениям работы Гётце и Тихомирова[16], легко установить справедливость условий (2)–(6).

Доказательство Теоремы 2.1 основано на том, что можно заменить исходную матрицу на гауссовскую матрицу с независимыми элементами, два первых момента которых совпадают с соответствующими моментами элементов исходной матрицы. Благодаря этому, можно вместо исходной матрицы с зависимыми элементами рассматривать гауссовскую матрицу, у

[26] Rosenzweig N. *Statistical mechanics of equally likely quantuum systems.* Statistical Physics. New York, 1963.
[27] Bronk N. *Topics in the theory of random matrices.* PhD thesis. Princeton University, 1964.

которой элементы независимы и имеют конечные моменты всех порядков. Это значительно упрощает анализ и позволяет использовать технику метода моментов.

Определим расстояние Леви между функциями распределения F_1 и F_2 через

$$L(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : F_1(x-\varepsilon) - \varepsilon \le F_2(x) \le F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Следующая теорема иллюстрирует принцип универсальности Линдеберга для случайных матриц.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n$ *обозначают независимые случайные матрицы с* $\mathbf{E}X_{ij} = \mathbf{E}Y_{ij} = 0$ *и* $\mathbf{E}X_{ij}^2 = \mathbf{E}Y_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$. *Предположим, что матрица* $\mathbf{X}_n$ *удовлетворяет условиям* (2)–(5), *и матрица* $\mathbf{Y}_n$ *имеет гауссовские независимые элементы. Дополнительно потребуем, что для матрицы* $\mathbf{Y}_n$ *выполнены условия* (4)–(5). *Тогда*

$$L(F^{\mathbf{X}_n}(x), F^{\mathbf{Y}_n}(x)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Для доказательства Теоремы 2.2 мы сначала урезаем элементы матрицы на уровне $\sqrt{n}$, используя условие Линдеберга (4). Затем, следуя работе Бенткуса[24], определим семейство матриц $\mathbf{Z}_n(\varphi) = \mathbf{X}_n \cos\varphi + \mathbf{Y}_n \sin\varphi$ и покажем, что производная преобразования Стилтьеса, $S_n^{\mathbf{Z}}(z, \varphi)$, матрицы $\mathbf{Z}_n(\varphi)$ по аргументу φ мала при больших n. Затем мы можем воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница, в силу которой

$$S_n^{\mathbf{X}} - S_n^{\mathbf{Y}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial S_n^{\mathbf{Z}}(z,\varphi)}{\partial \varphi} d\varphi,$$

где $S_n^{\mathbf{X}}, S_n^{\mathbf{Y}}$ – преобразования Стилтьеса матриц $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{Y}_n$ соответственно.

Для доказательства Теоремы 2.1 остается установить сходимость в гауссовском случае, это сделано в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Пусть элементы* Y_{ij} *случайной матрицы* $\mathbf{Y}_n$ *независимы для всех* $1 \le i \le j \le n$ *и имеют гауссовское распределение с* $\mathbf{E}Y_{ij} = 0$, $\mathbf{E}Y_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$. *Предположим, что условия* (4)–(6) *выполнены. Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{Y}_n}(x) - G(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство основано на методе моментов. Легко видеть, что моменты ожидаемой эмпирической спектральной функции распределения $F^{\mathbf{Y}_n}(x)$ могут быть переписаны в виде нормированного следа степени матрицы $\mathbf{Y}_n$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dF^{\mathbf{Y}_n}(x) = \mathbf{E}\frac{1}{n} \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{Y}_n\right)^k.$$

Для доказательства сходимости последовательности $F^{\mathbf{Y}_n}(x)$ к $G(x)$ достаточно показать, что

$$\mathbf{E}\frac{1}{n}\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{Y}_n\right)^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dG(x) + o_k(1).$$

для всех $k \geq 1$, где $o_k(1)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого фиксированного k. Заметим, что функция G имеет компактный носитель и в силу этого однозначно восстанавливается по последовательности своих моментов.

Хорошо известно, что моменты полукругового закона равны

$$\beta_k = \int_{\mathbb{R}} x^k dG(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}, & k = 2m \\ 0, & k = 2m+1. \end{cases}$$

Отметим, что моменты β_{2m} совпадают с числами Каталана.

Перепишем нормированный след степени матрицы $\mathbf{Y}_n$ в виде суммы

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{Y}_n\right)^k = \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k} Y_{i_1 i_2} Y_{i_2 i_3} ... Y_{i_k i_1}, \tag{7}$$

где суммирование берется по всем векторам $\boldsymbol{i} = (i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., n\}^k$. Это представление позволяем нам записать правую часть (7) в виде суммы $I_1 + I_2 + I_3$. Первое слагаемое, I_1, даст нам в точности числа β_k. Слагаемое I_2 обратится в ноль в силу симметричности Y_{ij}. Третье слагаемое, I_3, может быть сделано сколь угодно малым в силу условий (4)–(6).

В **главе 3** будет изучен ансамбль комплекснозначных выборочных ковариационных матриц. Для этого рассмотрим матрицу $\mathbf{X} = \{X_{jk}\}$ размера $p \times n$ и потребуем, чтобы $\mathbf{E}X_{jk} = 0$ и $\mathbf{E}|X_{jk}|^2 = \sigma_{jk}^2$. Обозначим через $s_1^2 \leq ... \leq s_p^2$ собственные значения матрицы $\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ и определим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} I(s_i^2 \leq x).$$

Положим $F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) := \mathbf{E}\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x)$. Предположим, что $p = p(n)$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n} = y$. Без потери общности мы будем считать, что $y \in (0, 1]$.

В главе 2 мы рассмотрели ансамбли симметричных матриц с зависимыми элементами. Цель настоящей главы – получить аналогичные результаты для матриц вида $\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ и показать, что предельное распределение для последовательности $F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x)$ задается распределением Марченко–Пастура.

Введем набор σ-алгебр

$$\mathfrak{F}^{(i,j)} := \sigma\{X_{kl} : 1 \le k \le p, 1 \le l \le n, (k,l) \ne (i,j)\}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le n$$

Переопределим дробь Линдеберга на случай прямоугольных матриц с помощью

$$L_n(\tau) := \frac{1}{pn} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{ij}|^2 I(|X_{ij}| \ge \tau\sqrt{n}).$$

Пусть $\xi_{ij} = \Re X_{ij}$ и $\eta_{ij} = \Im X_{ij}$ обозначают действительную и мнимую части X_{ij}. Определим следующие матрицы

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_{ij}^2 & \xi_{ij}\eta_{ij} \\ \xi_{ij}\eta_{ij} & \eta_{ij}^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Σ_{ij}^{kl} элемент матрицы Σ_{ij} в позиции $(k,l), 1 \le k,l \le 2$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия

$$\mathbf{E}(X_{ij}|\mathfrak{F}^{(i,j)}) = 0 \text{ п.в.}; \tag{8}$$

$$\frac{1}{np} \sum_{k,l=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\mathbf{E}\left(\Sigma_{ij}^{kl}|\mathfrak{F}^{(i,j)}\right) - \mathbf{E}\Sigma_{ij}^{kl}| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{9}$$

$$\text{для любого } \tau > 0 \quad L_n(\tau) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{10}$$

Всюду далее будем использовать условие (10) не только для матрицы $\mathbf{X}$, но и для других матриц, заменяя элементы X_{ij} в определении дроби Линдеберга соответствующими элементами.

Для всех $1 \le i \le p$ обозначим через $B_i^2 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2$ и для всех $1 \le j \le n$ положим $D_j := \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \sigma_{ij}^2$. Потребуем, чтобы σ_{ij}^2 удовлетворяли следующим условиям:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} |B_i^2 - 1| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{11}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |D_j^2 - 1| \to 0 \text{ при } n \to \infty; \tag{12}$$

$$\max(\max_{1 \le i \le p} B_i, \max_{1 \le j \le n} D_j) \le C, \tag{13}$$

где C некоторая абсолютная константа.

Следующая теорема представляет собой основной результат главы 3.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет условиям* (8)–(13) *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{p}{n} = y \in (0,1]$. *Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) - G_y(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Идея доказательства аналогична идее доказательства Теоремы 2.1. Поэтому ниже мы просто формулируем результаты, не останавливаясь на деталях.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *обозначают независимые матрицы размера* $p \times n$*, такие что* $\mathbf{E} X_{ij} = \mathbf{E} Y_{ij} = 0$*,* $\mathbf{E}(\operatorname{Re} X_{ij})^2 = \mathbf{E}(\operatorname{Re} Y_{ij})^2, \mathbf{E}(\operatorname{Im} X_{ij})^2 = \mathbf{E}(\operatorname{Im} Y_{ij})^2$ *и* $\mathbf{E} \operatorname{Re} X_{ij} \operatorname{Im} X_{ij} = \mathbf{E} \operatorname{Re} Y_{ij} \operatorname{Im} Y_{ij}$*. Предположим, что матрица* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет условиям* (8)–(12) *, и матрица* $\mathbf{Y}$ *имеет независимые гауссовские элементы. Дополнительно потребуем, что* $\mathbf{Y}$ *удовлетворяет условиям* (10)–(12)*. Если* $\lim_{n \to \infty} \frac{p}{n} = y \in (0, 1]$*, тогда*

$$L(F^{\mathbf{XX}^*}(x), F^{\mathbf{YY}^*}(x)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 3.3. *Пусть элементы матрицы* $\mathbf{Y} = \{Y_{ij}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le n\}$ *являются независимы случайными величинами и имеют гауссовское распределение с* $\mathbf{E} Y_{ij} = 0$*,* $\mathbf{E}|Y_{ij}|^2 = \sigma_{ij}^2$*. Предположим, что выполнены условия* (10)–(13) *и* $\lim_{n \to \infty} \frac{p}{n} = y \in (0, 1]$*. Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{YY}^*}(x) - G_y(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В **приложениях А и В** приведены вспомогательные результаты, полученные другими авторами, которые использовались для доказательства основных Теорем 1.1, 2.1 и 3.1.

3. Список публикаций автора по теме диссертации.

[1] Naumov A. A. *Elliptic law for real random matrices.* Preprint of SFB701, University of Bielefeld, Germany, 2012, preprint no. 12044.

[2] Наумов А. А. *Универсальность некоторых моделей случайных матриц.* Сборник тезисов XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ – 2012», секция «Вычислительная математика и кибернетика», с. 143-144.

[3] Götze F., Naumov A. A., Tikhomirov A. N. *Semicircle law for a class of random matrices with dependent entries.* Preprint of SFB701, University of Bielefeld, Germany, 2013, preprint no. 13029.

[4] Наумов А. А. *Эллиптический закон для случайных матриц.* Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2013, № 1, с. 31-38.

[5] Наумов А. А. *Предельные теоремы для двух классов случайных матриц.* Записки научных семинаров ПОМИ РАН, 412, с. 214–225, 2013.

[6] Наумов А. А. *Полукруговой закон для случайных матриц с зависимыми элементами.* Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ – 2013», секция «Вычислительная математика и кибернетика», с. 89-90.