МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

на правах рукописи

Пучкова Алёна Игоревна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ НА КОНЕЧНОМ И БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Орлов Михаил Владимирович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Фомичёв Василий Владимирович;

кандидат физико-математических наук, доцент Смольникова Ирина Алексеевна.

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН.

Защита диссертации состоится «9» октября 2013 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан «____» _____________ 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В пятидесятых годах XX века многочисленные потребности прикладных дисциплин (техники, экономики, военных наук и др.) стимулировали постановку и рассмотрение обширного класса задач, исследование которых привело к рождению новой науки – оптимального управления. Основы теории оптимального управления были заложены академиком Л.С. Понтрягиным и группой его учеников [1]. Теория оптимального управления получила всеобщее признание как фундаментальное теоретическое достижение и нашла широкое применение в приложениях.

Изучение динамики нелинейных управляемых процессов – важнейший раздел новой теории. Нелинейная динамика встречается при моделировании многих прикладных задач из различных областей знания. В частности, широко известны модели Рамсея, двухсекторной экономики с производственной функцией Кобба-Дугласа, где требуется определить оптимальные пропорции потребления и накопления, между двумя видами ресурсов соответственно и т. п. Эти модели исследуют на конечном и бесконечном горизонтах. Интересные задачи возникают при исследовании микробиологических процессов, моделирующих рост колонии клеток и усвоение различных видов питательных веществ. В таких моделях могут возникать участки, на которых управление имеет специальный вид (так называемый сингулярный режим), что требует дополнительного исследования для обоснования оптимальности. Диссертационная работа посвящена изучению трёх таких моделей, рассматриваемых на конечном и бесконечном горизонтах времени.

Цель диссертационной работы

В проводимом в диссертации исследовании ставятся следующие цели:

- Изучить экономическую модель распределения ресурсов на бесконечном промежутке времени. Найти оптимальное решение соответствующей задачи оптимального управления, где интегрант функционала качества является гладкой функцией. Изучить задачу в случае, когда интегрант функционала качества в модели является негладкой функцией специального вида, что не позволяет применить принцип максимума в классической формулировке

- Провести исследование биологической модели, описывающей процесс роста колонии микроорганизмов. Изучить задачу скорейшего выхода на биологически обусловленный путь роста (так называемый «сбалансированный путь»). Построить оптимальное управление в форме синтеза. Сравнить два специальных режима управления биологической модели с точки зрения максимизации биомассы в конечный момент времени

- Исследовать известную модель ведения рыбного хозяйства при специальном выборе функционала качества с введением фазовых ограничений простой структуры. Изучить вопрос о существовании особых режимов. Построить оптимальные стратегии вылова при различных условиях на правый конец траектории. Провести расчёты при различных значениях параметров модели, интересных для приложений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит в основном теоретический характер. Разработанные подходы могут быть использованы для решения аналогичных задач оптимального управления и для разработки численных методов исследования подобного рода моделей.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории оптимального управления, включая современные теоремы о достаточных условиях оптимальности, а также методы дифференциальных уравнений и математического анализа. Особую роль занимает центральный результат теории оптимального управления — принцип максимума Понтрягина.

Научная новизна работы

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Проведено полное исследование специальной экономической модели распределения ресурсов на бесконечном промежутке времени. В работе показано, что в случае отсутствия особых режимов оптимальное управление не может иметь более одной точки переключения. С помощью параметризации функционала находится наилучшая точка переключения. Оптимальность построенной экстремальной пары устанавливается двумя способами.

2. Найдено оптимальное решение в случае, когда интегрант функционала качества является выпуклой функцией, которая может быть недифференцируемой в отдельных точках. Обоснование оптимальности проводится с использованием теоремы о достаточных условиях оптимальности.

3. Изучена задача скорейшего выхода на биологически обусловленный путь роста для биологической модели, описывающей процесс роста колонии микроорганизмов. Для соответствующей задачи оптимального управления построена оптимальная синтезирующая функция, и проведено полное обоснование оптимальности полученного решения. Доказано, что оптимальное управление имеет неколебательный характер, а именно, возможно не более одной точки переключения. Построена линия переключения оптимального управления. В работе получена формула для функции Беллмана.

4. Исследованы два специальных режима управления рассматриваемой биологической модели. Показано, что при достаточно большой длительности процесса управления один из режимов оказывается лучше второго с точки зрения максимизации биомассы.

5. Проведено исследование модели ведения рыбного хозяйства, которая описывается задачей оптимального управления с фазовым ограничением простой структуры. Найдены условия на параметры модели, при которых особые режимы отсутствуют. При этих условиях получены оптимальные стратегии вылова в аналитическом виде.

6. При определённых значениях параметров модели, интересных для приложений, проведены расчёты, иллюстрирующие основные выводы теоретического характера.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международной конференции “Ломоносов - 2008” (Москва, МГУ имени

М.В. Ломоносова, 7-11 апреля 2008)

- Международной конференции "Ломоносов - 2010" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 12-15 апреля 2010)
- Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - XXI" (Воронеж, Воронежский государственный университет, 3-9 мая 2010)
- Научной конференции "Тихоновские чтения 2010" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 25-29 октября 2010)
- Международной конференции "Ломоносов - 2011" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 11-15 апреля 2011)
- Международной молодежной научно-практической конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы" (Москва, НИИ механики МГУ, 3-5 октября 2011)
- Научной конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 14-23 ноября 2011)
- IV международной конференции "Математическая биология и биоинформатика" (Пущино, 14-19 октября 2012).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Объём работы составляет 129 страниц текста, включая 14 рисунков. Библиография включает 43 наименования.

Краткое содержание работы

Глава 1 В первой главе диссертации рассматривается специальная экономическая модель распределения ресурсов на бесконечном промежутке времени

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad 0 \leqslant t < +\infty, \\ x(0) = x_0, \\ J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \, F(x(t))dt \; \to \min\limits_{u(\cdot)}, \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant u^+. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x и u — одномерные фазовая переменная и управление соответственно, $\rho > 0$, $x_0 > 0$, $u^+ > 0$ — заданные константы. Класс допустимых управлений состоит из всех кусочно-непрерывных на промежутке времени $[0, +\infty)$ функций $u(\cdot)$, имеющих конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном интервале, со значениями из отрезка $[0, u^+]$.

Известная модель потребления и накопления Рамсея [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = u \, f(x) - \mu \, x, \\ x(0) = x_0, \\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\nu t} \, (1-u)f(x)dt \; \to \max\limits_{u(\cdot)}, \\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

сводится к рассматриваемой задаче (1) в случае $f(x) = Ax^{\alpha}$, $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет неоклассическим условиям [2].

Заменой переменных $y = x^{1-\alpha}$ дифференциальное уравнение задачи (2) приводится к уравнению

$$\dot{y} = (1-\alpha)A\, u - (1-\alpha)\mu\, y,$$

которое, в свою очередь, переходом к новому времени $s = \mu(1-\alpha)t$ преобразуется в

$$\dot{y} = -y + v,$$

где $v = \dfrac{A}{\mu}u$, $0 \leqslant v \leqslant \dfrac{A}{\mu} = u^{+}$. Начальное условие $y(0) = y_0 = (x_0)^{1-\alpha}$. Перейдём к функционалу. Выразив управление в виде $u = \dfrac{\dot{x} + \mu\, x}{Ax^{\alpha}}$, имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\nu t}\ (1-u)Ax^{\alpha}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\nu t}\ \left[Ax^{\alpha} - (\mu+\nu)\, x\right] dt + x_0.$$

Отбросив константу x_0, которая не является существенной при максимизации, после замены переменных t и x на s и y соответственно получаем следующую задачу минимизации

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho s}\ W(y(s))ds\ \to \min_{u(\cdot)},$$

где $W(y) = \dfrac{1}{\mu(1-\alpha)}\left[(\mu+\nu)\, y^{1/(1-\alpha)} - A\, y^{\alpha/(1-\alpha)}\right]$ и $\rho = \dfrac{\nu}{\mu(1-\alpha)}$. Таким образом, задача (2) полностью сводится к задаче (1).

Модель односекторной экономики [3], которая является обобщением модели Рамсея, и модель двухсекторной экономики в модифицированном виде [4] могут быть также преобразованы к задаче (1) при определённом соотношении параметров.

В разделе 1.1 описана постановка задачи. Предполагается, что функция $F(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой в R, где $R \equiv (-\infty, +\infty)$.

При этом существует точка $a > 0$ такая, что $F^{'}(x) < 0$ при $x < a$, $F^{'}(a) = 0$, $F^{'}(x) > 0$ при $x > a$. Также предполагается, что $F^{''}(x) > 0 \quad \forall x \in R$.

В разделе 1.2 приводятся предварительные результаты. Для допустимых траекторий задачи (1) справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 *Для любой допустимой пары $(u(t), x(t))$ задачи (1) при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$0 < x^{-}(t) \leqslant x(t) \leqslant x^{+}(t) \leqslant \max\{u^{+}, x_0\},$$

где $x^{-}(t) = x_0 e^{-t}$ — траектория, отвечающая управлению $u \equiv 0$;
$x^{+}(t) = (x_0 - u^{+})e^{-t} + u^{+}$ — траектория, отвечающая управлению $u \equiv u^{+}$.

Решение задачи (1) зависит от того, может ли управляемая система поддерживать режим $(u = a, x = a)$. Сначала рассматривается случай $0 < a \leqslant u^{+}$. В этом случае возможен особый режим $(u(t) \equiv a, x(t) \equiv a)$. Значение управления на особом участке принадлежит области управления $[0, u^{+}]$.

Теорема 1 *Пусть $a \in (0, u^{+}]$. Тогда оптимальное решение $(u_*(t), x_*(t))$ задачи (1) имеет вид:*

1. *В случае $0 < x_0 < a < u^{+}$*

$$u_*(t) = \begin{cases} u^{+}, & 0 \leqslant t < \tau, \\ a, & \tau \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x^{+}(t), & 0 \leqslant t < \tau, \\ a, & \tau \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

где τ определяется из условия $x^{+}(\tau) = a$: $\tau = \ln\left(\dfrac{u^{+} - x_0}{u^{+} - a}\right) > 0.$

2. В случае $0 < x_0 < a = u^+$

$$u_*(t) \equiv u^+, \quad x_*(t) \equiv x^+(t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

3. В случае $x_0 = a$

$$u_*(t) \equiv a, \quad x_*(t) \equiv a \quad \forall t \geqslant 0.$$

4. В случае $x_0 > a$

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau, \\ a, & \tau \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x^-(t), & 0 \leqslant t < \tau, \\ a, & \tau \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

где τ *определяется из условия* $x^-(\tau) = a$*:* $\tau = \ln\left(\dfrac{x_0}{a}\right) > 0.$

Справедливость этого результата доказывается непосредственной оценкой приращения функционала. Теорема 1 имеет простую интерпретацию. При $0 < a \leqslant u^+$ особый режим $(u(t) \equiv a, x(t) \equiv a)$ является наиболее выгодным. Поэтому необходимо попасть на прямую $x = a$ как можно быстрее и далее оставаться на ней.

Модель Рамсея изучалась в книге [2] при условии, что $a \in (0, u^+]$. В диссертационной работе дополнительно исследуется случай $a > u^+$, который оказался интересным с математической и методической точки зрения. В этом случае особый режим отсутствует. Разделы 1.3 и 1.4 посвящены исследованию задачи (1) в случаях $a > u^+$, $x_0 \leqslant a$ и $x_0 > a > u^+$ соответственно.

Теорема 2 *Пусть* $a > u^+$ *и* $x_0 \in (0, a]$*. Тогда оптимальное решение*

$(u_*(t), x_*(t))$ *задачи* (1) *имеет вид*

$$u_*(t) \equiv u^+, \quad x_*(t) \equiv x^+(t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

Теоремы 1 и 2 верны и при более слабых предположениях на функцию $F(x)$, а именно, достаточно ограниченности функции в R, а также существования точки $a > 0$ такой, что функция $F(x)$ убывает при $x \in (-\infty, a]$ и возрастает при $x \in [a, +\infty)$.

Случай $x_0 > a > u^+$ представляет особый интерес. В этом случае оптимальное решение не удаётся найти аналогичными рассуждениями, поэтому для исследования задачи (1) привлекается принцип максимума Понтрягина и теория оптимального управления [1].

Введём функцию

$$G(x) = \int\limits_{u^+}^{x} F^{'}(y)(y - u^+)^{\rho} dy.$$

Рассмотрим уравнение

$$G(x) = 0 \tag{3}$$

при $x \in (u^+, +\infty)$. В работе показано, что существует единственный корень x^* уравнения (3), причём $x^* > a > u^+$, $G(x) < 0$ при $x \in (u^+, x^*)$ и $G(x) > 0$ при $x \in (x^*, +\infty)$.

В разделе 1.5 с помощью принципа максимума исследуется поведение сопряжённой переменной и траекторий исходной системы. Показано, что оптимальное управление не может иметь более одной точки переключения. Функционал параметризуется с помощью этой точки переключения, после чего проводится анализ полученной функции на минимум, находится наилучшая точка переключения, и строится соответствующая пара – претендент на роль оптимального решения.

Теорема 3 *Пусть $x_0 > a > u^+$. Тогда оптимальное решение $(u_*(t), x_*(t))$, $t \geqslant 0$, задачи (1) имеет следующий вид:*

1. Если $x_0 \in (a, x^*]$, то

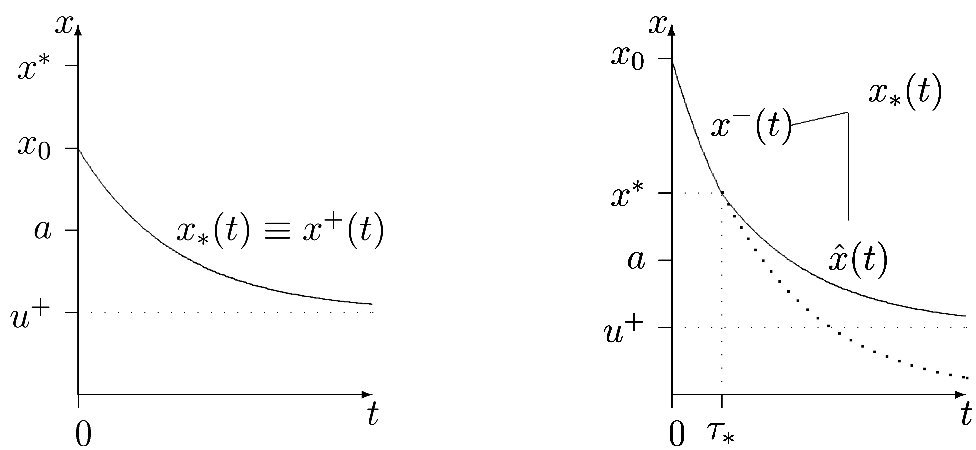
$$u_*(t) \equiv u^+, \quad x_*(t) \equiv x^+(t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

2. Если $x_0 > x^*$, то

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau_*, \\ u^+, & \tau_* \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x^-(t), & 0 \leqslant t < \tau_*, \\ \hat{x}(t), & \tau_* \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

где $\hat{x}(t) = (x_0 - u^+ e^{\tau_*})e^{-t} + u^+$, $\tau_* = \ln\left(\dfrac{x_0}{x^*}\right) > 0$ и $\hat{x}(\tau_*) = x^-(\tau_*) = x^*$.



а) $x_0 \in (a, x^*]$ б) $x_0 > x^*$

Рис. 1: вид оптимальной траектории $x_*(t)$.

Теорема 3 является основным результатом главы 1. Она доказывается двумя способами.

Первый способ – прямая оценка приращения функционала на основании методики, применяемой при доказательстве теоремы о достаточных условиях оптимальности в форме конструкций принципа максимума Понтрягина [5]. При этом в разделах 1.6 и 1.7 находится решение краевой задачи принципа максимума специального вида при $x_0 > x^*$ и $x_0 \in (a, x^*]$ соответственно. Доказательство теоремы 3 (первый способ) представлено в разделе 1.8.

Раздел 1.9 посвящён второму способу доказательства теоремы 3. Для этого используется принцип максимума Понтрягина и теорема существования оптимального управления [6]. Второй способ доказательства справедлив и при более общих предположениях, когда класс допустимых управлений состоит из всех измеримых (по Лебегу) на $[0, +\infty)$ функций со значениями из отрезка $[0, u^+]$, при этом предположение о выпуклости функции $F(x)$ оказывается излишним.

Техника, используемая для первого способа доказательства, применима и в более сложных случаях, когда прямое применение принципа максимума в классическом виде невозможно. В разделе 1.10 рассматривается пример, в котором функция $F(x)$ не является всюду дифференцируемой, несмотря на это, удаётся получить решение и доказать его оптимальность.

Рассмотрим $F(x) = |x - a|$, в этом случае задача (1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \\ x(0) = x_0, \\ J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \, |x - a| dt \ \to \min\limits_{u(\cdot)}, \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant u^+. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что для задачи (4) теоремы 1 и 2 остаются верны, поэтому рассматривается только случай $x_0 > a > u^+$. Введём обозначение

$$x^* = \sqrt[\rho+1]{2}(a - u^+) + u^+ > a.$$

Теорема 4

1. *В случае* $u^+ < a < x_0 \leqslant x^*$ *оптимальное решение задачи* (4) *имеет следующий вид:*

$$u_*(t) \equiv u^+, \;\; x_*(t) = x^+(t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

2. *В случае* $x_0 > x^*$, $a > u^+$ *оптимальное решение задачи имеет вид:*

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau_*, \\ u^+, & \tau_* \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x_0 e^{-t}, & 0 \leqslant t < \tau_*, \\ u^+ + (x_0 - u^+ e^{\tau_*})e^{-t}, & \tau_* \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

где

$$\tau_* = \ln\left(\frac{x_0}{x^*}\right) > 0.$$

Глава 2 Вторая глава посвящена исследованию биологической модели, описывающей процесс роста колонии микроорганизмов. Рассматривается следующая нелинейная управляемая динамическая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 y \varphi(x), \\ \dot{x}_2 = \omega_2 (1-y) \varphi(x), \\ \dot{y} = (u-y) \dfrac{\dot{\varphi}(x)}{\varphi(x)}, \\ \varphi(x) \equiv \min\{x_1, x_2\}, \\ x_1(0) = x_{10} > 0, \\ x_2(0) = x_{20} > 0, \\ y(0) = y_0 \in (0,1), \end{cases} \tag{5}$$

где ω_1, ω_2 — положительные константы, удовлетворяющие условию $\omega_1 + \omega_2 = 1$, и $x = (x_1, x_2)^T$ — вектор фазовых переменных. Функция $\Phi(t) = \varphi(x(t))$ характеризует объём структурной биомассы в момент времени t, $y(\cdot)$ регулирует распределение внутренних ресурсов между двумя типами механизмов усвоения питательных веществ, а функция управления $u(\cdot)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, отвечает за распределение вновь синтезированных ресурсов («строительных блоков»). Цель процесса управления — максимизировать $\Phi(t)$ в конечный момент времени.

В естественном предположении, что клетка микроба старается максимизировать свою среднюю скорость роста, нетрудно показать [7], что в случае, когда $x_{10} = x_{20}$ и $y_0 = \omega_2$, функция $u(t) \equiv \omega_2$ $\forall t \geqslant 0$ является наилучшим режимом управления. Легко проверить, что при таком законе управления $x_1(t) = x_2(t)$, $y(t) \equiv \omega_2$ для всех $t \geqslant 0$. Ситуация, когда $dx_2/dx_1 = 1$, известна в микробиологии как «сбалансированный рост». Таким образом, логично рассмотреть задачу выхода на «сбалансированный путь» роста в кратчайшее время. Это приводит к следующей задаче оптимального управления: в общем случае, когда либо $x_{10} \neq x_{20}$, либо $y_0 \neq \omega_2$, как можно быстрее добиться выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} x_1(T) = x_2(T), \\ y(T) = \omega_2, \\ T \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)}, \end{cases} \tag{6}$$

где $T > 0$ — некоторый момент времени. После момента T оптимальное управление становится очевидным.

В разделе 2.1 описывается постановка задачи и предварительные результаты. Рассматривается вспомогательная задача, и находится её оптимальное решение.

В разделе 2.2 заменой переменных $k = x_2/x_1$ задача быстродействия (5), (6) сводится к двумерной задаче

$$\begin{cases} \dot{y} = (u - y)S_1(y, k), \\ \dot{k} = S_2(y, k), \\ y(0) = y_0 \in (0, 1), \quad k(0) = k_0 > 0, \\ y(T) = \omega_2, \quad k(T) = 1, \\ 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ T \to \min\limits_{u(\cdot)}, \end{cases} \tag{7}$$

где $k_0 = \dfrac{x_{20}}{x_{10}}$ и

$$S_1(y, k) = \begin{cases} \omega_2(1 - y), & 0 < k < 1, \\ \omega_1 y, & 1 < k < +\infty, \end{cases}$$

$$S_2(y,k) = \begin{cases} k(\omega_2(1-y) - k\omega_1 y), & 0 < k < 1, \\ \omega_2(1-y) - k\omega_1 y, & 1 < k < +\infty. \end{cases}$$

Задача (7) рассматривается в полосе $\Pi = \{0 < y < 1, 0 < k < +\infty\}$.

Для задачи (7) построен оптимальный синтез, и проведено полное обоснование оптимальности. В том числе, показано, что оптимальное управление не может иметь более одной точки переключения, и построена линия переключения оптимального управления.

Введём обозначения

$$K(y) = \begin{cases} k_1(y) = \left(1 + \dfrac{(y-\omega_2)^2}{2\omega_1\omega_2(1-y)}\right)^{-1}, & 0 < y < \omega_2, \\ k_2(y) = 1 + \dfrac{(y-\omega_2)^2}{2\omega_1\omega_2 y}, & \omega_2 \leqslant y < 1, \end{cases}$$

$I = \{(y,k) \in \Pi :\ k > K(y)\}$ и $II = \{(y,k) \in \Pi :\ k < K(y)\}$.

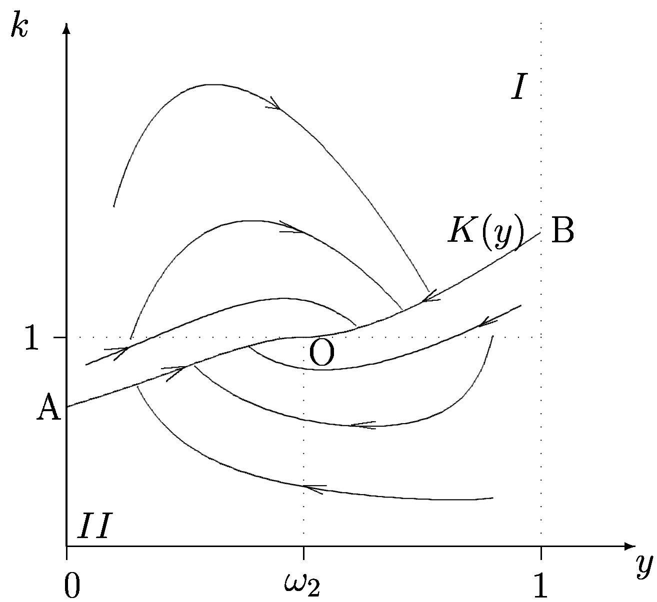


Рис. 2: фазовый портрет оптимальных траекторий задачи (7).

Следующая теорема является основным результатом главы 2.

Теорема 5 *Оптимальное управление в форме синтеза для задачи* (7) *имеет вид:*

$$u_*(y,k) = \begin{cases} 1, & (y,k) \in I, \\ 0, & (y,k) \in II, \end{cases}$$

при $k \neq K(y)$, *и*

$$u_*(y,K(y)) = \begin{cases} 0, & \omega_2 < y < 1, \\ 1, & 0 < y < \omega_2. \end{cases}$$

Для рассматриваемой задачи применение принципа максимума в явном виде невозможно, однако обоснование оптимальности удаётся провести непосредственным сравнением времени перехода в конечную точку.

Доказательство теоремы 5 представлено в разделах 2.3, 2.4 и 2.5 для случаев $(y_0,k_0) \in I$, $k_0 \geqslant 1$; $k_0 = k_2(y_0)$ и $(y_0,k_0) \in I$, $0 < k_0 < 1$, соответственно. Доказательство остальных случаев проводится аналогичным образом.

В разделе 2.6 приводится формула для вычисления оптимального времени перехода на «сбалансированный путь» из произвольной допустимой начальной точки.

Теорема 6 *Оптимальное время* $T_*(y_0,k_0)$ *в задаче быстродействия* (7) *определяется следующим образом:*

1. *Для* $(y_0,k_0) \in \{(y,k) : (k \geqslant 1, 0 < y < \omega_2) \bigcup (k > k_2(y), \omega_2 \leqslant y < 1)\}$ *(при этом* $(y_0,k_0) \in I$*)*

$$T_*(y_0,k_0) = \frac{\xi + \ln\gamma_0}{\omega_1} + \frac{1 - e^{-\xi}}{\omega_2}, \quad \gamma_0 = \frac{\omega_2(1-y_0)}{\omega_1 y_0},$$

где ξ *— единственный положительный корень функции*

$$F_I(\xi) = \omega_1(\mathrm{ch}(\xi) - 1) + \omega_2(e^{\xi} - 1 - \xi) - \omega_2\left(\frac{1}{\gamma_0} + \ln\gamma_0 - 1\right) - \frac{\omega_1(k_0-1)}{1-y_0}.$$

2. Для $(y_0, k_0) \in \{(y,k) : k_1(y) < k < 1, 0 < y < \omega_2\}$ *(при этом* $(y_0, k_0) \in I$*)*

$$T_*(y_0, k_0) = \tau_I + T_*(y_I, 1), \quad (y_I, 1) \in I, k \geqslant 1,$$

где

$$\tau_I = \hat{\tau} - \sqrt{\hat{\tau}^2 - 2\frac{1-k_0}{k_0\omega_1\omega_2(1-y_0)}}, \quad \hat{\tau} = \frac{\omega_2 - y_0}{\omega_1\omega_2(1-y_0)},$$

$$y_I = \frac{y_0 + \omega_2(1-y_0)\tau_I}{1 + \omega_2(1-y_0)\tau_I}.$$

3. Для $(y_0, k_0) \in \{(y,k) : (0 < k < k_1(y), 0 < y \leqslant \omega_2) \bigcup (0 < k \leqslant 1, \omega_2 < y < 1)\}$ *(при этом* $(y_0, k_0) \in II$*)*

$$T_*(y_0, k_0) = \frac{\eta - \ln\gamma_0}{\omega_2} + \frac{1 - e^{-\eta}}{\omega_1}, \quad \gamma_0 = \frac{\omega_2(1-y_0)}{\omega_1 y_0},$$

где η *— единственный положительный корень функции*

$$F_{II}(\eta) = \omega_2(\mathrm{ch}(\eta) - 1) + \omega_1(e^{\eta} - 1 - \eta) - \omega_1(\gamma_0 - \ln\gamma_0 - 1) - \frac{\omega_2(1-k_0)}{k_0 y_0}.$$

4. Для $(y_0, k_0) \in \{(y,k) : 1 < k < k_2(y), \omega_2 < y < 1\}$ *(при этом* $(y_0, k_0) \in II$*)*

$$T_*(y_0, k_0) = \tau_{II} + T_*(y_{II}, 1), \quad (y_{II}, 1) \in II, 0 < k \leqslant 1,$$

где

$$\tau_{II} = \tilde{\tau} - \sqrt{\tilde{\tau}^2 - 2\frac{k_0 - 1}{\omega_1\omega_2 y_0}}, \quad \tilde{\tau} = \frac{y_0 - \omega_2}{\omega_1\omega_2 y_0},$$

$$y_{II} = \frac{y_0}{1 + \omega_1 y_0 \tau_{II}}.$$

5. Для $(y_0,k_0)\in\{(y,k):k=K(y),0<y<1\}$

$$T_*(y_0,k_0)=T_*(y_0,K(y_0))=\begin{cases}\dfrac{\omega_2-y_0}{\omega_1\omega_2(1-y_0)}, & y_0\leqslant\omega_2,\\ \dfrac{y_0-\omega_2}{\omega_1\omega_2y_0}, & y_0>\omega_2.\end{cases}$$

В разделе 2.7 представлены дополнительные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 5.

В разделе 2.8 анализируются два режима управления модели (5). Предполагается, что $x_{10}=x_{20}=x_0$ и $y_0\in(0,\omega_2)$, случай $y_0\in(\omega_2,1)$ рассматривается аналогично. Первый режим управления

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant s_{1/2},\\ 0, & s_{1/2}<t\leqslant\tau_*,\end{cases}$$

где

$$s_{1/2}=\frac{\ln\gamma_0+\xi_*(\gamma_0)}{\omega_1},$$

$$\tau_*-s_{1/2}=\frac{1-\gamma_0e^{-\omega_1s_{1/2}}}{\omega_2},\quad \gamma_0=\frac{\omega_2(1-y_0)}{\omega_1y_0}>1$$

и $\xi=\xi_*(\gamma_0)$ — единственный положительный корень функции

$$F(\xi)=\omega_1(\mathrm{ch}\,(\xi)-1)+\omega_2(e^{\xi}-1-\xi)-\omega_2\left(\frac{1}{\gamma_0}+\ln\gamma_0-1\right),$$

решает задачу выхода клетки на «сбалансированный путь» роста в кратчайшее время, с математической точки зрения это означает, как можно быстрее добиться выполнения условий $x_1(\tau_*)=x_2(\tau_*)$, $y(\tau_*)=\omega_2$ при $\tau_*>0$; и

$\tilde{u}(t) \equiv \omega_2$ при $t > \tau_*$. Второй режим

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1, \\ 0, & x \in I_2, \end{cases}$$

где

$$I_1 = \{x = (x_1, x_2)^T \in R^2 : \ 0 < x_1 < x_2\},$$

$$I_2 = \{x = (x_1, x_2)^T \in R^2 : \ 0 < x_2 < x_1\},$$

является наиболее интересным с биологической точки зрения. Он означает, что клетки микроба способны «правильно» реагировать на изменение плотностей внутренних резервов соответствующих механизмов усвоения питательных веществ. Интересно сравнить действие двух этих режимов управления с точки зрения функционала Φ.

Пусть $\tilde{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ — траектории, отвечающие управлениям $\tilde{u}(t)$ и $\bar{u}(t) = \bar{u}(x(t))$ соответственно. Обозначим $\tilde{\Phi}(t) = \varphi(\tilde{x}(t))$ и $\bar{\Phi}(t) = \varphi(\bar{x}(t))$. Заметим, что $\tilde{\Phi}(t) \equiv \bar{\Phi}(t)$ при всех $t \in [0, s_{1/2}]$, далее $\tilde{\Phi}(t) < \bar{\Phi}(t)$ при $t \in (s_{1/2}, \tau_{1/2}]$, где $\tau_{1/2} > s_{1/2}$ — некоторый момент времени. Возникает вопрос: выполнено ли последнее неравенство для всех $t > \tau_{1/2}$? Показано, что при достаточно большой длительности процесса управления режим быстродействия оказывается лучше режима $\bar{u}(t)$ с точки зрения максимизации структурной биомассы клетки, а именно, верна следующая теорема.

Теорема 7 *Существует такое число $T > \tau_{1/2}$, что неравенство*

$$\tilde{\Phi}(t) > \bar{\Phi}(t)$$

выполнено при всех $t \geqslant T$.

Глава 3 В третьей главе рассматривается модель ведения рыбного хозяйства. Изучается так называемая логистическая модель (или модель Шеффера) с отловом (см., например, [8], [9], [10]), которая описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{ds} = rN(s)\left(1 - \frac{N(s)}{N_{\max}}\right) - qU(s)N(s), \quad N(0) = N_0 > 0,$$

где $N(s)$ — численность популяции в момент времени s, N_0 — численность рыбы в начальный момент времени, r — удельная скорость роста (коэффициент r характеризует способность вида противостоять неблагоприятным воздействиям внешней среды), $N_{\max}$ — ёмкость среды, или другими словами, максимально возможная величина популяции в данном водоёме, q — удельный коэффициент улова (отношение числа выловленных рыб к количеству рыб, попавших в зону вылова) и $U(s)$ характеризует интенсивность рыболовства. Предполагается, что численность рыбы ограничена снизу

$$N(s) \geqslant N_{\min} \quad \forall s \in [0, \bar{T}],$$

чтобы предотвратить возможное вымирание популяции.

Цель задачи оптимального управления — максимизировать дисконтированную прибыль, которая может быть представлена в виде функционала

$$\bar{J}(U) = \int\limits_0^{\bar{T}} e^{-\delta s}\left[\bar{p}(s)qU(s)N(s) - c(U(s))\right]\, ds,$$

где $\delta > 0$ — коэффициент дисконтирования, $\bar{p}(s)$ — функция цены, множитель $qU(s)N(s)$ — количество выловленной рыбы, $c(U)$ — затраты на вылов рыбы. Предполагается, что функция $c(U)$ является линейной, т. е. $c(U) = c \cdot U$.

В книге [8] была предложена модель, в которой функция цены принимает постоянное значение p_0 до произвольного момента времени τ. В момент времени τ цена увеличивается на величину θ, т. е.

$$\bar{p}(s) = \begin{cases} p_0, & s < \tau, \\ p_0 + \theta, & s \geqslant \tau. \end{cases}$$

Предполагается, что τ имеет экспоненциальное распределение с параметром γ. Увеличение цены может и не произойти на рассматриваемом отрезке времени. В [11] авторы в качестве функции прибыли берут математическое ожидание от $\bar{J}(U)$, т. е.

$$J(U) = E_\tau \bar{J}(U) = \int\limits_0^{\bar{T}} e^{-\delta s} \left\{ \left[p_0 + \theta(1 - e^{-\gamma s}) \right] qU(s)N(s) - c\, U(s) \right\} \, ds.$$

Также предполагается, что θ прямо пропорционально первоначальной цене, т. е. $\theta = \beta_1 p_0$.

Класс допустимых управлений состоит из всех кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению

$$0 \leqslant U(s) \leqslant U_{\max} \quad \forall s \geqslant 0.$$

Задача максимизации функционала $J(U)$ по всем $U(\cdot) \in [0, U_{\max}]$ и является предметом исследования главы 3.

Эта задача рассматривалась многими авторами, см., например, работы [11], [12], [13], [14], [15], при различных функциях $\bar{p}(s)$ и $c(U)$ и различных значениях параметров, однако решение в них находится численно. В диссертационной работе оптимальное решение задачи найдено в аналитическом виде.

После замены переменных

$$t = r\ s, \quad x(t) = \frac{N(s)}{N_{\max}}, \quad u(t) = \frac{qU(s)}{r}$$

приходим к следующей задаче оптимального управления с фазовым ограничением:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (1 - u(t))x(t) - (x(t))^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ x(0) = x_0, \\ x(t) \geqslant \beta_2, \\ J(x, u) = \int\limits_0^T e^{-\alpha_1 t} \left(p(t)x(t) - B\right) u(t) dt \to \max\limits_{u(\cdot)}, \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant u_{\max}, \end{cases} \tag{8}$$

где $T = r\bar{T}$, $x_0 = N_0/N_{\max}$, $\beta_2 = N_{\min}/N_{\max}$,

$$p(t) = A\left[1 + \beta_1(1 - e^{-\alpha_2 t})\right],$$

$A = p_0 N_{\max} > 0$, $B = c/q > 0$, $\alpha_1 = \delta/r > 0$, $\alpha_2 = \gamma/r > 0$, $\beta_1 > 0$, $u_{\max} = U_{\max} q/r$. Предполагается, что $\alpha_2 > 1$, $0 < \beta_2 < x_0 < 1$, $u_{\max} \geqslant 1$ и

$$p(t)x(t) - B > 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Введём обозначения

$$\gamma_0 = \frac{1 - x_0}{x_0} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{u_{\max} - 1}{\beta_2} \geqslant 0, \quad \gamma_2 = \frac{u_{\max} - 1}{x_0} \geqslant 0.$$

В разделе 3.1 описывается постановка задачи и основные предположения.

Рассмотрим следующие функции

$$a(t) = -2p(t) < 0,$$

$$b(t) = A\beta_1\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} + p(t)(1-\alpha_1) + B$$

и

$$F_1(t) = 1 - \beta_2 + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - F_2(t) + \frac{\alpha_1 B\dot{a}(t) + a(t)\dot{b}(t)(F_2(t)+\beta_2)}{(F_2(t)+\beta_2)a(t)(b(t)+2a(t)(F_2(t)+\beta_2))},$$

$$F_2(t) = \frac{b(t) + \sqrt{(b(t))^2 - 4\alpha_1 B a(t)}}{-2a(t)} - \beta_2.$$

Предположение П1.

$$F_2(0) > 0, \quad F_2(T) < 0.$$

Предположение П2. Функция $F_1(t)$ убывает при $t \in [0,\sigma]$, где σ — единственный корень функции $F_2(t)$.

Предположение П3.

$$u_{\max} < F_1(\sigma).$$

Введём функции

$$K(\tau,u) = e^{-\alpha_1 k_1(\tau,u)}\left(p(k_1(\tau,u))\beta_2 - B\right)\left(u - 1 + \beta_2\right) l_1(\tau,u) -$$

$$-e^{-\alpha_1\tau}\left(p(\tau)\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-\tau}} - B\right)u + u\int\limits_{\tau}^{k_1(\tau,u)} e^{-\alpha_1 t} p(t) m_1(t,\tau,u)\,dt,$$

где

$$k_1(\tau,u) = \tau + \frac{1}{u-1}\ln\left(\frac{\dfrac{u-1}{\beta_2}+1}{1+(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)}\right),$$

$$l_1(\tau,u) = \frac{u\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)}{1+(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)},$$

$$m_1(t,\tau,u) = \frac{(u-1)^2 u\,(1+\gamma_0 e^{-\tau})\,e^{(u-1)(t-\tau)}}{\left(e^{(u-1)(t-\tau)}\left[(u-1)\,(1+\gamma_0 e^{-\tau})+1\right]-1\right)^2},$$

и

$$L(\tau) = \beta_2 e^{-\alpha_1 k_2(\tau)}\,(p(k_2(\tau))\beta_2 - B)\,l_2(\tau) -$$

$$-e^{-\alpha_1\tau}\left(p(\tau)\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-\tau}} - B\right) + \int\limits_{\tau}^{k_2(\tau)} e^{-\alpha_1 t} p(t) m_2(t,\tau)\,dt,$$

где

$$k_2(\tau) = \tau + \frac{1}{\beta_2} - 1 - \gamma_0 e^{-\tau}, \quad l_2(\tau) = 1 + \gamma_0 e^{-\tau},$$

$$m_2(t,\tau) = \frac{1+\gamma_0 e^{-\tau}}{\left(t-\tau+1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)^2}.$$

Предположение П4. Существует единственный корень уравнения $K(0,u)=0$ (обозначим его за $\bar{u}_{\max}$). При этом $\bar{u}_{\max} \in (1, F_1(\sigma))$.

Предположение П5.

1. В случае $u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}]$ функция $K(\tau, u_{\max}) < 0$ для всех $\tau \in (0,T]$.
2. В случае $u_{\max} \in (\bar{u}_{\max}, F_1(\sigma))$ уравнение $K(\tau, u_{\max}) = 0$ имеет единственный корень $\hat{\tau}_1 \in (0,T)$ по τ, при этом $K(\tau, u_{\max}) > 0$ для $\tau \in [0, \hat{\tau}_1)$ и $K(\tau, u_{\max}) < 0$ при $\tau \in (\hat{\tau}_1, T]$.

Предположение П6. Выполнено неравенство

$$L(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0,T].$$

Предположение П7.

$$T > \tilde{\tau},$$

где

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \hat{\tau}_2, & u_{\max} \in (\bar{u}_{\max}, F_1(\sigma)), \\ \dfrac{1}{u_{\max}-1} \ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}], \\ \dfrac{1}{\beta_2} - \dfrac{1}{x_0}, & u_{\max} = 1, \end{cases}$$

здесь

$$\hat{\tau}_2 = \hat{\tau}_1 + \frac{1}{u_{\max}-1} \ln\left(\frac{\gamma_1+1}{1+(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\hat{\tau}_1}\right)}\right).$$

В разделе 3.2 с помощью принципа максимума Понтрягина для задач с фазовыми ограничениями [16] изучается вопрос о существовании особых режимов. Показано, что при выполнении предположений П1-П3 в задаче (8) отсутствуют особые режимы.

В разделе 3.3 доказывается, что, если оптимальное управление $u(t)$ задачи (8) существует, то оно должно иметь следующую структуру:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ u_{\max}, & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ 1-\beta_2, & \tau_2 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

В разделе 3.4 функционал J параметризуется с помощью точки переключения $\tau_1 \in [0, T)$. Функция $J(\tau_1)$ исследуется на максимум, и находится наилучшая точка τ_1. Строится соответствующее решение $(u_*(t), x_*(t))$ задачи (8). Оптимальность построенной пары следует из факта существования оптимального управления и того, что для каждого набора параметров, удовлетворяющего предположениям задачи, существует единственная пара, удовлетворяющая принципу максимума.

Следующая теорема описывает основные результаты главы 3.

Теорема 8 *Оптимальное решение* $(u_*(t), x_*(t))$ *задачи* (8) *при условиях*

П1-П7 имеет вид:

1. *При* $u_{\max} \in (\bar{u}_{\max}, F_1(\sigma))$

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \hat{\tau}_1, \\ u_{\max}, & \hat{\tau}_1 \leqslant t < \hat{\tau}_2, \\ 1-\beta_2, & \hat{\tau}_2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\gamma_0 e^{-t}}, & 0 \leqslant t < \hat{\tau}_1, \\ \tilde{x}(t, \hat{\tau}_1), & \hat{\tau}_1 \leqslant t < \hat{\tau}_2, \\ \beta_2, & \hat{\tau}_2 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где $\hat{\tau}_1 > 0$ — *решение уравнения* $K(\tau, u_{\max}) = 0$ *по* τ,

$$\hat{\tau}_2 = \hat{\tau}_1 + \frac{1}{u_{\max}-1} \ln\left(\frac{\gamma_1+1}{1+(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\hat{\tau}_1}\right)}\right)$$

и

$$\tilde{x}(t,\tau) = \frac{u_{\max}-1}{e^{(u_{\max}-1)(t-\tau)}\left[(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)+1\right]-1}.$$

2. *При* $u_{\max} \in [1, \bar{u}_{\max}]$

$$u_*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \leqslant t < \hat{\tau}, \\ 1-\beta_2, & \hat{\tau} \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), & 0 \leqslant t < \hat{\tau}, \\ \beta_2, & \hat{\tau} \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{u_{\max}-1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2+1)-1}, & u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}], \\ \dfrac{1}{t+1/x_0}, & u_{\max} = 1 \end{cases}$$

u

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{\max} - 1} \ln\left(\dfrac{\gamma_1 + 1}{\gamma_2 + 1}\right), & u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}], \\ \dfrac{1}{\beta_2} - \dfrac{1}{x_0}, & u_{\max} = 1. \end{cases}$$

В разделе 3.6 рассматривается задача, где на правый конец траектории наложено ограничение $x(T) = x(0) = x_0$. Это ограничение имеет смысл при создании устойчивого рыбного хозяйства, в котором численность особей в конце рассматриваемого промежутка времени восстанавливается до первоначального значения. Находится оптимальное решение этой задачи.

В разделах 3.5 и 3.7 обсуждаются результаты расчётов, проведённых при значениях параметров модели, интересных для приложений. Эти расчёты иллюстрируют основные выводы теоретического характера.

В заключение выражаю искреннюю признательность своему научному руководителю, доценту М.В. Орлову за постоянное внимание к работе, многолетнюю помощь и всестороннюю поддержку. Хочу поблагодарить доцента Ю.Н. Киселёва за интерес к работе, консультации и ценные замечания, а также профессора А.В. Дмитрука за постановку задачи (1) и за ряд полезных советов.

Публикации по теме диссертации

[A1] Пучкова А.И. О стабилизации цепочки множеств при построении минимальной выпуклой оболочки // Сборник статей молодых учёных ф-та ВМиК МГУ. М.: МАКС Пресс, 2008. Т. 5. С. 98-100.

[A2] Пучкова А.И. Исследование модели распределения инвестиций на бесконечном промежутке времени // Сборник научных трудов ф-та ВМиК МГУ "Проблемы динамического управления". М.: МАКС Пресс, 2009. Т. 4. С. 124-143.

[A3] Puchkova A.I. Optimal Control in the Simplest Investment Allocation Model with Infinite Time Horizon // Сборник статей молодых учёных ф-та ВМиК МГУ. М.: МАКС Пресс, 2009. Т. 6. С. 146-157.

[A4] Пучкова А.И. О стабилизации цепочки множеств при построении минимальной выпуклой оболочки // Математическое образование. М.: Фонд мат. образования и просвещения, 2010. № 3-4 (55-56). С. 28-32.

[A5] Пучкова А.И., Киселёв Ю.Н.. Кулевский А.В., Орлов М.В. Об одном подходе к построению минимальной выпуклой оболочки // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2011. № 2. С. 20-24.

[A6] Орлов М.В., Пучкова А.И. Исследование специальной модели распределения ресурсов на бесконечном промежутке времени // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2012. № 3. С. 12-20.

[A7] Орлов М.В., Пучкова А.И. Сравнение двух режимов управления в процессе роста колонии микроорганизмов // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2013. № 2. С. 17-19.

[A8] Орлов М.В., Пучкова А.И. Оптимальные стратегии вылова в модели ведения рыбного хозяйства // Прикладная математика и информатика. М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2013. № 42. С. 62-75.

[A9] Пучкова А.И. Стабилизация цепочки множеств при построении минимальной выпуклой оболочки // Сборник тезисов XV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов - 2008", секция "Вычислительная математика и кибернетика". М.: МАКС Пресс, 2008. С. 71.

[A10] Пучкова А.И. Исследование модели распределения инвестиций на бесконечном промежутке времени // Материалы воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. С. 185-186.

[A11] Орлов М.В., Пучкова А.И. Исследование модели распределения инвестиций на бесконечном промежутке времени // Сборник докладов к научной конференции "Тихоновские чтения 2010". М.: МАКС Пресс, 2010. С. 35.

[A12] Пучкова А.И. Исследование инерционной модели распределения ресурсов между ассимиляторными механизмами в клетке микроба // Сборник тезисов XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов - 2011", секция "Вычислительная математика и кибернетика". М.: МАКС Пресс, 2011. С. 45-47.

[A13] Пучкова А.И., Орлов М.В. Оптимальные стратегии вылова в одной модели рыбного хозяйства // Тезисы докладов научной конференции "Ломоносовские чтения", секция "Вычислительная математика и кибернетика". М.: МАКС Пресс, 2011. С. 95-96.

[A14] Пучкова А.И., Орлов М.В. Моделирование оптимального распределения ресурсов микробом в процессе усвоения двух типов питательных веществ // Сборник докладов IV международной конференции "Математическая биология и биоинформатика". М.: МАКС Пресс, 2012. С. 111-112.

Цитированная литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.

[2] Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[3] Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1615-1628.

[4] Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели специального вида // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 12. С. 1756-1774.

[5] Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57-67.

[6] Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Тр. МИАН, 2007. Т. 257.

[7] van den Berg H.A., Kiselev Yu.N., Orlov M.V. Optimal Allocation of Building Blocks Between Nutrient Uptake Systems in a Microbe // Journal of Mathematical Biology. 2002. no. 44. P. 276-296.

[8] Clark C.W. Mathematical Bioeconomics. New York: Wiley, 1976.

[9] Schaefer M.B. Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries // Journal of the Fisheries Research Board of Canada. 1957. no. 14. P. 669-681.

[10] Schaefer M.B. Some Aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of Commercial Marine Fisheries // Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission. 1954. no. 1. P. 27-56.

[11] Goh C.J., Teo K.L. Species Preservation in an Optimal Harvest Model with Random Prices // Mathematical Biosciences. 1989. no. 95. P. 125-138.
[12] Jennings L.S., Teo K.L. A Numerical Algorithm for Constrained Optimal Control Problems with Applications to Harvesting // Proceedings of Dynamics of Complex Interconnected Biological Systems Workshop, eds. T.L. Vincent, A.I. Mees and L.S. Jennings. Birkhauser, Boston, 1990. P. 218-234.
[13] Jennings L.S., Teo K.L. A Computational Algorithm for Functional Inequality Constrained Optimization Problems // Automatica. 1990. Vol. 26. P. 371-375.
[14] Lee H.W.J., Teo K.L., Rehbock V., Jennings L.S. Control Parametrization Enhancing Technique for Optimal Discrete-Valued Control Problems // Automatica. 1999. Vol. 35. P. 1401-1407.
[15] Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems. New York: Longman Scientific and Technical, 1991.
[16] Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф. Принцип максимума для задач оптимального управления при ограниченных фазовых координатах в форме Р.В. Гамкрелидзе и его связь с другими условиями оптимальности // Доклады РАН. 2011. Т. 436, № 6. С. 738-742.